燎原高数

高等数学辅导领导品牌

高等院校教材同步辅导及考研复习用书

高等数学

辅导及习题精解

同济·第七版 上册

主 编 张天德

教材习题全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

沈阳出版社

高等数学
辅导及习题精解

同济·第七版 上册

主　编　张天德
副主编　张焕玲　杜世田

沈阳出版社

前言

高等数学是理工类专业重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助读者学好高等数学，编者根据多年的教学经验编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》(第七版)完全配套的《高等数学辅导及习题精解》上、下册。

讲解结构五大部分

一、本章知识图解：知识结构图揭示出本章知识点之间的有机联系，便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

二、教材知识全解：梳理本节知识点在各类考试中经常考查的重要知识点，用表格形式对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题。

三、典型例题解析：作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个个的在考试中可能出现的基本题型，并针对每一个基本题型，举出大量的精选例题深入讲解，可谓基础知识梳理、重点考点深入讲解、联系考试解题三重互动、一举突破。

四、本章整合：本章知识总结系统回顾本章知识，帮助读者更好的复习与总结；考研真题精析针对每一个重点题型，精选最新研究生入学考试真题，精心深入的解答；本章同步自测精选有代表性、测试价值高的题目检测、巩固学习效果，提高应试水平。

五、教材习题详解：对教材里该章节全部习题作详细解答，在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。

内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续：将重点、难点、考点归纳为一个个基本题型，并举出丰富的精选例题、考研真题深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合。

三、联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导书，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研，为的就是让同学们同步学习中完成考研备考，达到考研要求的水平。

在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目录

教材知识全解+教材习题详解

教材知识全解

目录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目录

教材知识全解+教材习题详解

教材习题详解

教材知识全解

第一章 函数与极限

本章内容概览

函数是高等数学的主要研究对象.极限的方法是研究函数的基本方法,贯穿于高等数学的始终,它是初等数学向高等数学的过渡.因此,理解函数的概念,掌握极限的思想是学好高等数学的基础.本章主要介绍了函数的概念、性质,极限的定义,以及函数的连续性理论.

本章知识图解

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念与分类
      - 分段函数、隐函数、初等函数、反函数、复合函数
    - 函数的性质
      - 有界性、单调性、奇偶性、周期性
  - 极限
    - 极限的定义
      - 极限概念及“ε-N”、“ε-δ”表述
    - 极限的性质
      - 数列极限的唯一性、有界性、保号性,收敛数列与其子数列间的关系
      - 函数极限的唯一性、局部有界性、局部保号性,函数极限与数列极限的关系
    - 极限的计算方法
      - 四则运算法则、幂指函数运算
      - 夹逼准则、单调有界准则
      - 洛必达法则、泰勒公式(第三章介绍)
      - 两个重要极限、等价无穷小因子替换
    - 无穷小
      - 无穷小与无穷大的定义及之间的关系
      - 无穷小的性质及运算、无穷小与极限的关系
      - 无穷小阶的比较与确定
  - 连续
    - 连续的定义
      - 初等函数、分段函数、反函数与复合函数的连续性的判定
    - 连续函数的性质
      - 闭区间上连续函数的有界性与最大值最小值定理、零点定理与介值定理、一致连续性
    - 间断点的分类
      - 第一类间断点:左右极限皆存在(包括:可去间断点和跳跃间断点)
      - 第二类间断点:左、右极限至少有一个不存在

第一节 映射与函数

本节考查要点

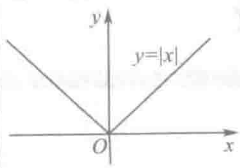
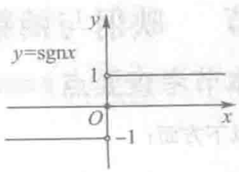
本节在考试中的出题点主要体现在以下方面:

1. 函数定义域的确定.
2. 函数性质的讨论:讨论函数的有界性、单调性、奇偶性与对称性.

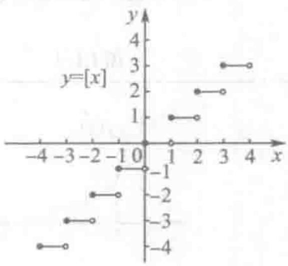
3. 反函数与复合函数:反函数的求法,函数的复合与分解.
4. 基本初等函数与初等函数:基本初等函数的性质与图形,一些常见函数的图形及规律.
5. 建立函数关系式,特别是根据实际问题建立函数关系.

教材知识全解

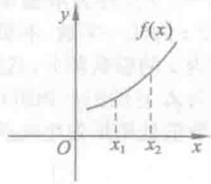
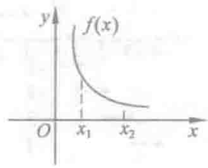
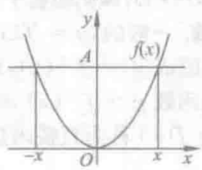
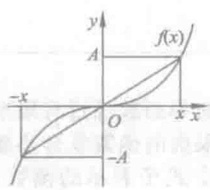
1. 函数及相关概念

名称	定义	解析
函数	设数集 $D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为 $y=f(x),x\in D$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为**定义域**(定义域一般由实际背景中变量的实际意义或者函数对应法则的要求确定),记作 D_f,即 $D_f=D$. 称函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数的**值域**,记作 R_f 或 $f(D)$,称 f 为**对应法则**	(1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值 (2) 表示函数的记号可以任意选取 (3) 构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f,当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时,两个函数相等 (4) 在函数的定义中,对每个 $x\in D$,对应的函数值 y 总是唯一的,这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则,按这个法则,对每个 $x\in D$,总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不是唯一的,于是,这样的对应法则就不符合函数定义了,我们称这种法则确定了一个多值函数. 请大家注意,在考研中所提到的函数是指单值函数,也就是说当自变量 x 取一个值时,这个对应法则 f 要保证因变量 y 有唯一的实数值与之对应,否则就得分成若干个单值函数
分段函数	在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数. 几种常见的分段函数: (1) $y=\lvert x\rvert=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\-x,x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数;其图形如图 L1-1 所示. (2) $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$,称为符号函数;对于任何实数 x,有 $x=\lvert x\rvert\operatorname{sgn}x$,其图形如图 L1-2 所示.  图 L1-1  图 L1-2	(1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数. 分段函数的典型形式如下(后面会详细讨论): $f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x),x>x_0\\a, \quad x=x_0\\\varphi_2(x),x<x_0\end{cases}$ 或 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x),x\neq x_0\\a, \quad x=x_0\end{cases}$ (2) 取整函数 $y=[x]$ 有性质:$[x]\leqslant x<[x]+1$;$[x+n]=[x]+n$;$n[x]\leqslant nx$;$[x]+[y]\leqslant[x+y]$,其中 n 为正整数

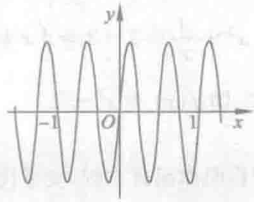
续表

名　称	定　义	解　析
分段函数	(3)$y=[x]$，称为取整函数，先给出定义，设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，其定义域为 R，值域 R 为 **Z**. 它的图形如图 L1-3 所示，在 x 为整数值处图形发生跳跃.  图 L1-3	
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**	(1)g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是： $g(D)\subset D_f$ (2) 结合律成立，$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$，但没有交换律，即 $f\circ g\neq g\circ f$
反函数	设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的**反函数**. 一般的，$y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$. 相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数	(1) 若把 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形画在同一坐标系中，则它们完全重合. 只有把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$ 后，它们的图形才关于 $y=x$ 对称，事实上这也是 x 与 y 字母互换的原因 (2) 直接函数的单值性无法保证其反函数的单值性. 比如直接函数 $y=x^2$ 的反函数是多值函数 $x=\pm\sqrt{y}$；但如果直接函数是单值单调函数，就能保证反函数的单值性了. 比如函数 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 是单值单调函数，故它有反函数 $x=\sqrt{y}$ (3) 若 f 是定义在 D 上的单调函数，则 $f:D\to f(D)$ 是单射，于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，例如，$y=\sqrt{1-x^2}$	基本初等函数： 幂函数：$y=x^\mu$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数） 指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$） 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$） 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$…… 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$……

2. 函数的几种特性

<table>
<tr><th>性质</th><th>定 义</th><th colspan="2">解 析</th></tr>
<tr><td rowspan="3">单调性</td><td>单调上升(单调递增):
函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$</td><td colspan="2">
图 L1-4</td></tr>
<tr><td>单调下降(单调递减):
函数 $f(x)$ 在 X 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$</td><td colspan="2">
图 L1-5</td></tr>
<tr><td>若严格不等号成立,则称为严格单调上升(下降)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">有界性</td><td>有界:函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,若 $\exists M > 0, \forall x \in X$,有 $|f(x)| \leqslant M$(或 $\exists m, M$,使得 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立),则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数</td><td colspan="2">函数的有界性与所在区间有密切的关系. 一个函数可能在一个区间内有界,在另一区间内无界,因此描述函数的有界性时需要指明对应的区间</td></tr>
<tr><td>无界:函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,若 $\forall M > 0, \exists x' \in X$,使得 $|f(x')| > M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无界</td><td colspan="2">例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界,因为
$\forall M > 0$,取 $x' = \frac{1}{3M}$,则 $f(x') = 3M > M$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇偶性</td><td>偶函数:设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数</td><td>
图 L1-6</td><td rowspan="2">函数的奇偶性是相对于区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇或偶函数</td></tr>
<tr><td>奇函数:设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数</td><td>
图 L1-7</td></tr>
</table>

续表

性质	定　义	解　析	
周期性	设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 l,使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$,且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,l 称为 $f(x)$ 的**周期**	 图 L1-8	一般将 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期,但周期函数不一定存在最小正周期,如常数函数、狄利克雷函数. 定义中,并不要求函数的定义域必须有界

典型例题解析

基本题型Ⅰ:求函数的定义域

题型分析:函数的定义域需使得函数的所有部分有定义,一般要求多个不等式的交集,若涉及实际问题,还需要特别注意变量的实际意义,例如长度、时间等均要非负.

【例 1】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$; (2) $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{e-e^{(\frac{3x-1}{2})^2}}$.

解:(1) 由 $x\neq 0, 1+\dfrac{1}{x}\neq 0, 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0$,得 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$.

故函数定义域为 $x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq 0,-1,-\dfrac{1}{2}$.

(2) 由已知条件知 $\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ (\frac{3x-1}{2})^2\leqslant 1\end{cases}$, 即 $\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ -1\leqslant\frac{3x-1}{2}\leqslant 1\end{cases}$.

解得 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$,因此定义域为 $[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$.

方法点击:求初等函数的定义域有下列原则:

① 分母不能为零. ② 偶次根式的被开方数不能为负数.
③ 对数的真数不能为零或负数. ④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$.
⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

求复合函数的定义域,通常将复合函数看成一系列初等函数的复合,然后考查每个初等函数的定义域和值域,得到对应的不等式组,通过联立求解不等式组,就可以得到复合函数的定义域.

基本题型Ⅱ:求函数表达式

【例 2】 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

解:解法一:用变量代换. 令 $u=x+\dfrac{1}{x}$,解出 $x=(u\pm\sqrt{u^2-4})/2$,代入原式,得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$f(u)=\frac{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}{4}+\frac{4}{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}=u^2-2$,即 $f(x)=x^2-2$.

解法二:用拼凑法.

因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$.

令 $t=x+\frac{1}{x}$,则 $f(t)=t^2-2$.即 $f(x)=x^2-2$.

方法点击:含有未知函数的方程叫作函数方程,变量代换法和拼凑法是解简单函数方程的两种最基本的方法.

【例 3】 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2+1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解:因当 $0<|x|<1$ 时,$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$,

所以 $f[f(x)]=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{x^2}=|x|$.

当 $|x|\geqslant 1$ 时,$|f(x)|=|x^2+1|>1$,

所以 $f[f(x)]=f^2(x)+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$.

当 $x=0$ 时,$|f(0)|=|\sqrt{1-0^2}|=1$,所以

$f[f(0)]=[f(0)]^2+1=2$.

综上所述,$f[f(x)]=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ 2, & x=0,\\ x, & 0<x<1,\\ x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

方法点击:复合函数的求解方法主要有两种:

① 代换法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替,适用于初等函数的复合.

② 分析法:抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.

基本题型Ⅲ:求反函数

题型分析:由 $y=f(x)$ 出发解出 x 的表达式,然后交换 x 与 y 的位置,即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

【例 4】 求 $y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1-x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数.

解:当 $x>0$ 时,$y=1+x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y-1}$,且 $x>0$,所以 $x=\sqrt{y-1}$,$y>1$;当 $x=0$ 时,$y=0$;当 $x<0$ 时,$y=-1-x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{-1-y}$,且 $x<0$,所以 $x=-\sqrt{-1-y}$,即 $y<-1$.

综上所述,$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1,\\ 0, & y=0,\\ -\sqrt{-1-y}, & y<-1.\end{cases}$

即所求反函数 $y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1,\\ 0, & x=0,\\ -\sqrt{-1-x}, & x<-1.\end{cases}$

方法点击：反函数求解方法比较固定，具有很强的程序性，关键是把握好定义域和符号的变化，特别是对于分段函数要牢记所求函数表达式的区间.

基本题型 Ⅳ：把复合函数分解为基本初等函数的复合

【例 5】 函数 $y = \ln\cos(e^x)$ 由哪些基本初等函数复合而成？

解：函数 $y = \ln\cos(e^x)$ 可由 $u = e^x, v = \cos u, y = \ln v$ 这三个基本初等函数复合而成.

方法点击：牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础，而由里到外、逐级分解是解决问题的关键. 做题时不能跨越某个级别，漏掉某个基本初等函数，要分清复合函数的成分或结构.

基本题型 Ⅴ：函数单调性的问题

题型分析：单调性是函数的一个性质，充分利用单调性的定义，通常要结合不等式的放缩技巧对 $f(x_1) - f(x_2)$ 或 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 进行放缩变形.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且对任意 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$，证明 $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

证明：任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty), x_2 > x_1$，有 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$，

而 $f(x_1) - f(x_2) \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$，因而 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$，

所以 $F(x_1) < F(x_2)$，即 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

方法点击：根据定义判断函数单调性的步骤：

① 记 I 为自变量的变化范围，任取两点 $x_1, x_2 \in I$，不妨设 $x_1 < x_2$.

② 研究是否恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$）成立，一般通过考察 $f(x_1) - f(x_2)$ 是否变号来判断.

③ 根据定义，确定函数是否具备单调性.

【例 7】 判断函数 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性.

解：因为对任意 $x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 < x_2$，则 $\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\dfrac{x_1 + x_2}{2}\sin\dfrac{x_2 - x_1}{2}$.

由于 $0 < x_1 < x_2 < \pi$，故有 $0 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \pi, 0 < \dfrac{x_2 - x_1}{2} < \pi$，所以 $\sin\dfrac{x_1 + x_2}{2} > 0, \sin\dfrac{x_2 - x_1}{2} > 0$，从而 $\cos x_2 - \cos x_1 < 0$，即 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减.

方法点击：证明函数单调性的主要方法有：

① 利用函数单调性定义.

② 利用导数证明.（此法在后面讲到）

基本题型 Ⅵ：函数有界性的问题

题型分析：证明函数有界的常用方法：

① 利用函数有界性的定义，对函数取绝对值，然后对不等式进行放缩处理.

② 采用导数求最值的方法.

③ 根据连续函数的性质.（②、③ 方法的例题见后续相应章节）

【例 8】 证明函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内有界.

证明：因为 $|f(x)|=\left|\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right|\leqslant\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\dfrac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}=1+\dfrac{2x^2}{x^4+1}\leqslant1+1=2$,

所以 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，且 2 是上界.

方法点击：利用定义证明函数有界的方法

① 首先，对函数取绝对值 $|f(x)|$（或者直接利用上述"有界的等价表述"，直接转入下面的 ②）.

② 其次，利用函数的性质，并结合自变量所属定义域的特点，进行适当的不等式放大.

③ 最后，找出定义中所说的常数 M，使得对定义域中的任意 x，$|f(x)|\leqslant M$ 恒成立.

第1章

基本题型 Ⅶ：函数奇偶性的问题

【例 9】 已知 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，$|a|\neq|b|$，证明 $f(x)$ 是奇函数.

【思路探索】 先求出 $f(x)$，再证 $f(-x)=-f(x)$.

证明：可令 $t=\dfrac{1}{x}$ 代入方程，得 $af\left(\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$，即 $af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$，

将原方程及上面方程的两端分乘 a,b，再相减，得

$$a^2f(x)-b^2f(x)=\frac{ac}{x}-bcx=\frac{ac-bcx^2}{x},$$

因 $|a|\neq|b|$，所以 $f(x)=\dfrac{ac-bcx^2}{(a^2-b^2)x}$，$f(x)$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$.

因 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=\dfrac{ac-bc(-x)^2}{(a^2-b^2)(-x)}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

方法点击：判断函数奇偶性通常采用的方法有：

① 从定义出发，或者利用运算性质（奇函数的代数和为奇函数等）.

② 证明 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$.

基本题型 Ⅷ：函数周期性的问题

题型分析：周期函数的运算性质：

① 若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

③ 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$，是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数.

④ 若 $f(x)$ 为周期函数，则复合函数 $g[f(x)]$ 也是周期函数.

【例 10】 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证明：对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+c)=-f(x)$，所以

$$f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x),$$

故 $f(x)$ 为周期函数.

方法点击:判定函数为周期函数的主要方法:

① 从定义出发,找到 $T\neq 0$,使得 $f(x+T)=f(x)$.

② 利用周期函数的运算性质证明.

第二节　数列的极限

本节考查要点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面:

1. 数列极限定义的理解:收敛数列的几何特征,数列收敛的“ε-N”描述.
2. 数列极限的性质:唯一性、有界性、保号性,收敛数列与子数列间的关系.
3. 数列极限的运算:用四则运算求极限.

教材知识全解

1. 数列极限的定义

名　称		定　义	说　明
数列的极限	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$	$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\lvert x_n-A\rvert<\varepsilon$	也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$
	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$	$\forall M>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\lvert x_n\rvert>M$	对应于极限趋于 $\pm\infty$ 两种情况

2. 数列极限的性质

性　质	定　义
极限的唯一性	如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么它的极限是唯一的
收敛数列的有界性	如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界
子数列收敛	如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,那么它的任一子数列也收敛而且极限也是 a
有　序　性	给定数列 $\{x_n\},\{y_n\}$,如果 $x_n\leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,那么 $a\leqslant b$
收敛数列的保号性	如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且 $a>0$(或 $a<0$),那么存在正整数 $N>0$,使得 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$)
四 则 运 算	给定数列 $\{x_n\},\{y_n\}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ 且 a,b 有限,则 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$ (3) 当 $b\neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$

典型例题解析

基本题型 Ⅰ:数列极限的存在性

题型分析:利用数列极限的定义证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的关键是:"对任意给定的正数 ε,寻求一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$". 为解该不等式,常常需要一系列不等式放大的过程,将不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 化简为方便求解的形式. 如不等式放大成 $|x_n-a|<\cdots<\Phi(n)$,则要使 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,只需 $\Phi(n)<\varepsilon$ 即可,解此不等式得 $n>\Phi^{-1}(\varepsilon)$,即得所找的正整数 $N=[\Phi^{-1}(\varepsilon)]$.

【例 1】 设 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$,$n=1,2,\cdots$,$a=0$.

(1) 对下列 ε 分别求出极限定义 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 中相应的 N:$\varepsilon_1=0.1$,$\varepsilon_2=0.01$,$\varepsilon_3=0.001$;

(2) 对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 可以找到相应的 N,这是否证明了 a_n 趋于 a?应怎样做才对?

(3) 对给定的 ε 是否只能找到一个 N?

解:(1) 当 $\varepsilon_1=0.1$ 时,要使 $|a_n-a|=\dfrac{1+(-1)^n}{n}\leqslant\dfrac{2}{n}<0.1$,只要 $n>20$ 即可,所以相应的 $N_1=20$;同理当 $\varepsilon_2=0.01$,$\varepsilon_3=0.001$ 时,相应的 $N_2=200$,$N_3=2000$ 即可.

(2) 在(1)中虽然对 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 可找到相应的 N,但并没有证明 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$ 趋于 a. 正确的做法应该是对任意的 $\varepsilon>0$,都能找到相应的 N 才行. 即由 $|a_n-a|\leqslant\dfrac{2}{n}<\varepsilon$,求得 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$,这时才有结论 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(3) 对给定的 ε,若能找到一个合适的 N_0,那么对一切大于 N_0 的正整数都可作为定义中的 N,所以有无穷多个 N.

方法点击:在数列的极限的定义中 N 虽然依赖于 ε,但并不意味着 N 是唯一确定的.

【例 2】 用 $\varepsilon-N$ 方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

证明:$\forall\varepsilon>0$,要证 $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|=\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n}<\varepsilon$,实际上只需:

$\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n}<\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n^{n-1}}{n^{n-1}}=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$,

则当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

方法点击:在 $\varepsilon-N$ 定义中,并不一定要找到一个最小的 N,经常先将 $|x_n-A|$ 适当放大后再小于 ε,以方便寻找 N.

【例 3】 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$.

证明:$\forall\varepsilon>0$,要证 $\left|\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n\right|<\varepsilon$.

只需 $\left|\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n\right|\leqslant\left|\dfrac{n+2}{n^2-2}\right|<\left|\dfrac{n+2}{n^2-4}\right|=\dfrac{1}{n-2}<\varepsilon(n\geqslant 3)$.

即需 $n>\frac{1}{\varepsilon}+2$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}+2]+1$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n+2}{n^2-2}\sin n\right|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$.

方法点击：由于改变数列的有限项对于极限值没有影响. 所以在选择不等式进行放大时. 我们可以对 n 值做一些限定，从而简化解题过程.

【例 4】 "对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$" 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

解：由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义得"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$，总存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$". 显然可推导出"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$".

反过来，若有"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"，则对于任意的 $\varepsilon_1>0$(不妨设 $0<\varepsilon_1<1$，当 $\varepsilon_1>1$ 时，取 $\bar{\varepsilon}_1$，$0<\bar{\varepsilon}_1<1<\varepsilon_1$，代替即可)，取 $\varepsilon=\frac{1}{3}\varepsilon_1>0$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon=\frac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$，令 $N_1=N+1$，则满足"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$，总存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$".

可见上述两种说法是等价的.

故应选(C).

方法点击：数列极限定义中有"任意小"和"无限大"两个术语，二者只是用来说明数列趋于极限值的程度，均不是确定的值，它们用什么符号表示并不重要.

基本题型 Ⅱ：数列极限的性质

【例 5】 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【思路探索】 极限值与数列前面有限项的大小无关，可立即排除(A)、(B)；而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是 $0\cdot\infty$ 型未定式，可能存在也可能不存在，举反例说明即可；极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 属 $1\cdot\infty$ 型，必为无穷大量，即不存在.

解：用举反例法，取 $a_n=\frac{2}{n}$，$b_n=1$，$c_n=\frac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$，则可立即排除(A)、(B)、(C)，因此正确选项为(D).

方法点击：① 对于不便直接证明的问题，经常可考虑用反例，通过排除法找到正确选项. ② 记住：若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$，这个常用的结论.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com