高等学校教材 12

线性代数大题典

PROBLEMS AND SOLUTIONS IN LINEAR ALGEBRA

徐诚浩 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数大题典

PROBLEMS AND SOLUTIONS IN LINEAR ALGEBRA

徐诚浩 编著

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是关于线性代数的专用工具书，内容涉及线性代数学的基础内容：行列式与矩阵、向量与线性方程组、特征值理论及其应用、线性空间与线性映射以及欧氏空间.

本书是按题典模式编写的题库. 为了便于查找，除了将内容按章分列以外，在每一章中再按不同主题细分成若干小节. 在各节的开始处，一般都简述了本节所涉及的基本概念、公式与结论.

全书共精选了约 1 100 道例题，有深有浅，覆盖面广. 在题型方面，以计算题为主，也有大量证明题和选择题.

本书可作为各类高等院校学生的学习参考书和教师的教学参考书，以及科技人员的工作参考书，也可作为各类专业考研生的复习资料.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数大题典/徐诚浩编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5603-4697-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①线性代数-高等数学-习题集 Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 093698 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 38.25 字数 750 千字
版　　次 2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-4697-7
定　　价 88.00 元

编者的话

线性代数是高等教育中一门重要的数学基础课程，所有理、工、农、医、财经、管理各专业，都把线性代数作为一门重要的必修课. 通过本课程的学习，要使学生掌握线性代数学的基本内容、思想和方法，加强数学训练，培养学生抽象思维能力和逻辑推理能力，善于严密推理和谨慎计算，从而提高分析、归纳和解决实际问题的能力.

线性代数学的特点是：所引进的概念较多，有些内容比较抽象；特别注重于严密的逻辑推理；前后内容紧密关联，层层相依，是一条完整的知识链；解题方法变化较多，讲究解题技巧. 正因为如此，学生普遍认为这门课程学习很难，解题更难，故常常对这门课程望而生畏，甚至望而却步.

鉴于上述实际情况，作者根据几十年的教学实践，编写了这本题典，为读者释疑解惑. 当然，读者不能仅仅满足于从本书中找到疑难问题的参考答案或题解，更重要的是要真正掌握解题的思路、方法和技巧，善于融会贯通、举一反三. 作者不希望本书产生过多的习题集常有的负面效应：仅仅用来抄袭题解而不求甚解.

顺便强调一下，学习的重点应放在对概念和方法的正确理解和熟练运用上，善于对各种概念和结论举出正例与反例. 因为解题的熟练与技巧主要来源于对概念的透彻理解. 忽视概念而盲目解题，往往是面对题目，束手无策，甚至连题意都看不懂，或者答非所问. 解题必须抓住关键知识点和解题思路，不能死记硬背，机械地生搬硬套. 要在掌握有关理论与方法的前提下，手脑联动，独立完成解题.

本书与常见的线性代数习题集的区别在于:它不是为某本确定教材的习题提供解答,而是对线性代数各种课程的常见的典型题目作出解答与分析,并尽可能一题多解.有必要时,还在题末加上注解或说明.书中有些题目是不常见的难题,供有特殊需要的读者查阅.

本书是按题典模式编写的.为了便于查找,除了将内容按章分列以外,在每一章中再按不同主题细分成若干小节.在各节的开始处,一般都简述了本节所涉及的基本概念、公式与结论.这不但能供解题时查阅,而且是对书中所用专用术语和记号作出的说明.

限于书的篇幅和根据实际需要,本书取材范围仅限于线性代数的基础内容.书中的例题都是精选出来的,有深有浅,覆盖面广.全书大大小小总题量约为1 100道,其中行列式和矩阵的题量占40%;向量与线性方程组的题量占20%;特征值理论的题量占16%;线性空间与线性映射理论的题量占24%.在题型方面,以计算题为主,也有大量证明题和选择题,而这正是学习线性代数的难点所在.

本书不仅是在校学生的解题参考书,更是任课教师的教学参考书,他们可在书中找到合适的例题和试题.科技人员也可在书中找到在工作中碰到的线性代数问题的解答.本书还为各专业的考研生准备了丰富的例题.

在书末列出的仅仅是部分参考书,对用到的所有参考书的作者深表感谢.

徐诚浩

2012年10月于上海

◎

目录

第一章　行列式

§1　行列式性质的简单应用

一、行列式展开公式

$$D_n = |a_{ij}|_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$D_n = |a_{ij}|_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

这里 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 在 D_n 中的代数余子式，M_{ij} 为 a_{ij} 在 D_n 中的余子式.

二、行列式拉普拉斯(Laplace)展开公式

对 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|_n$，任意取定一个正整数 $1 \leqslant k \leqslant n$，任意取定 D_n 中的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列，由在交叉处的 k^2 个元素组成的 k 阶行列式称为 D_n 的 k 阶子式，记为

$$D_k = D\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$$

由剩下的$(n-k)^2$ 个元素组成的 $n-k$ 阶行列式称为 k 阶子式 D_k 在 D_n 中的余子式，记为

$$M_k = M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$$

D_k 在 D_n 中的代数余子式指的是 $n-k$ 阶子式

$$A_k = A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} = (-1)^s M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}，\text{其中 } s = \sum_{t=1}^{k} (i_t + j_t)$$

则有按其第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行的展开式

$$D_n = \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_k} D\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_k \\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_k \end{pmatrix}$$

这里 $\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_k}$ 表示对所有可能的 k 阶排列 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 对应的乘积项求和.

1. 计算以下行列式的值：

(1) $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -203 & 300 & 105 \end{vmatrix}$；

(2) $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$；

(3) $D = \begin{vmatrix} -1 & 203 & 1/3 \\ 3 & 298 & 1/2 \\ 5 & 399 & 2/3 \end{vmatrix}$.

【解】 (1) 先在第三行中减去第二行的 100 倍，再把第二行加到第一行上去，可得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -203 & 300 & 105 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3(-5+9) = 12$$

(2) 先在第三行中减去第二行的100倍，再利用 $a_{33} = -1$ 把第三行化简可求出

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 8 & 3 \\ -6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-56+48) = 8$$

(3) 先在第三列中提出公因数 $\frac{1}{6}$，再利用第三列把第二列化简，再利用 $a_{11} = -1$ 把第一列化简，再在第二列中减去第三列，可求出

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 203 & 1/3 \\ 3 & 298 & 1/2 \\ 5 & 399 & 2/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 203 & 2 \\ 3 & 298 & 3 \\ 5 & 399 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 14 & 14 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

2. 求出行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

【解一】 把第一行分别加到第三行和第四行上去,再按第一列展开,化为 3 阶行列式计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & b & -1 \\ -1 & a+c & 0 \\ 1 & a+d & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a+b+d & 0 \\ -1 & a+c & 0 \\ 1 & a+d & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a + b + d$$

【解二】 也可以直接按第三列展开得到

$$D = a\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= a + b + d$$

3. 求出行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & -1 & -1 \\ x^2 & -1 & 1 & -1 \\ x^3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 的表达式.

【解】 把后三行都加到第一行上去,得到

$$D = \begin{vmatrix} 1+x+x^2+x^3 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -1 & -1 \\ x^2 & -1 & 1 & -1 \\ x^3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+x+x^2+x^3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x+x^2+x^3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4(1+x+x^2+x^3)$$

4. 求出行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$ 的表达式.

【解】 先在第二行中减去第一行,在第四行中减去第三行;再在第二列中减去第一列,在第四列中减去第三列,然后按第二行展开可得到

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & -y & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & -x & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1+y & -y \\ 0 & 0 & -y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-x)\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & 1+y & -y \\ 0 & -y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2y^2$$

5. 设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是平面上两个不同的点,证明:过这两点的直线方程是

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

【证】 将这两点的坐标 $x = x_i$ 和 $y = y_i$, $i = 1, 2$ 代入行列式,其值确为零.

【注】 按其第一行展开可得此直线方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

6. 计算以下行列式:

(1) $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 & c_1 - a_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 & c_2 - a_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}$;

(2) $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & a_1 + b_3 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & a_2 + b_3 \\ a_3 + b_1 & a_3 + b_2 & a_3 + b_3 \end{vmatrix}$.

【解】 (1) 把后两列都加到第一列上去得到零列,所以 $D_3 = 0$.

(2) 在后两行中都减去第一行并提出公因式,得到一个第二行与第三行

相同的行列式

$$D_3=\begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3\\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1\\ a_3-a_1 & a_3-a_1 & a_3-a_1\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

7. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n\\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n\end{vmatrix}$.

【解一】 $D_1=a_1-b_1$.

在 D_2 的第二列中减去第一列可求出

$$D_2=\begin{vmatrix}a_1-b_1 & a_1-b_2\\ a_2-b_1 & a_2-b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1-b_1 & b_1-b_2\\ a_2-b_1 & b_1-b_2\end{vmatrix}=(b_1-b_2)\begin{vmatrix}a_1-b_1 & 1\\ a_2-b_1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$$

当 $n\geqslant 3$ 时,可在最后两行中都减去第一行得到一个行列式,其最后两行成比例,值为零

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n-1}-b_1 & a_{n-1}-b_2 & \cdots & a_{n-1}-b_n\\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n-1}-a_1 & a_{n-1}-a_1 & \cdots & a_{n-1}-a_1\\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1\end{vmatrix}=0$$

【解二】 当 $n\geqslant 3$ 时,也可用行列式乘法规则(见第二章)直接求出

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}_n\times\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}_n=0$$

8. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

【解一】 按第一行与第 n 行作拉普拉斯展开立刻化成一个2阶行列式与一个对角行列式之乘积

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a^2 - 1)a^{n-2}$$

【解二】 也可按其第一行展开得到

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & \\ & & & & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{2n+1}a^{n-2} = a^n - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1)$$

9. 计算 $2n$ 阶行列式 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$.

【解】 按第 n 行与第 $n+1$ 行作拉普拉斯展开,并用数学归纳法求出

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \times D_{2(n-1)} = (a_n d_n - b_n c_n)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i d_i - b_i c_i) = \prod_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i)$$

10. 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$.

【解一】 先互换 D 中的第二列与第三列,再互换第二行与第三行得

$$D=\begin{vmatrix}a_1&0&b_1&0\\0&c_1&0&d_1\\b_2&0&a_2&0\\0&d_2&0&c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&0\\0&0&c_1&d_1\\b_2&a_2&0&0\\0&0&d_2&c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&0\\b_2&a_2&0&0\\0&0&c_1&d_1\\0&0&d_2&c_2\end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2)$$

【解二】 用拉普拉斯展开定理直接按第一行和第三行展开

$$D=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\b_2&a_2\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}c_1&d_1\\d_2&c_2\end{vmatrix}=(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2)$$

11. 已知 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|=c$. 如果把每一个元素 a_{ij} 都换到第$(n-i+1,n-j+1)$位置上，求所得的行列式.

【解】 先以 $n=3$ 为例说明如下：

$i\to(3-i+1)=4-i$，$i=1,2,3$，满足 $i+(4-i)=4$.

$j\to(3-j+1)=4-j$，$j=1,2,3$，满足 $j+(4-j)=4$.

这个变换关系如下

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{31}&a_{32}&a_{33}\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\a_{33}&a_{32}&a_{31}&a_{23}&a_{22}&a_{21}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{matrix}$$

于是互换第一行与第三行；互换第一列与第三列，行列式的值不变

$$c=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{vmatrix}=c$$

类似地，对于 $n=4$ 有

$i\to(4-i+1)=5-i$，$i=1,2,3,4$，满足 $i+(5-i)=5$

$j\to(4-j+1)=5-j$，$j=1,2,3,4$，满足 $j+(5-j)=5$

于是互换第一行与第四行，互换第二行与第三行；互换第一列与第四列，互换第二列与第三列，也保持行列式的值不变

$$c=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{vmatrix}=c$$

一般地，是互换处于关于横中轴线对称位置的所有元素，且同时互换处于关于竖中轴线对称位置的所有元素，因为互换两行的次数与互换两列的次数

相同,所以这并不改变行列式的值.

12. 已知 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|=c$. 如果把每一个元素 a_{ij} 都换成 $(-1)^{i+j}a_{ij}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$,求所得的行列式.

【解一】 先以 $n=3$, $n=4$ 为例说明如下:

在第二行与第二列中都提出公因数(-1)可得

$$c=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\to\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^2c=c$$

在第二行与第四行以及第二列与第四列中都提出公因数(-1)可得

$$c=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\to\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & a_{42} & -a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}c=c$$

一般地,当 $n=2m+1$ 时, $|(-1)^{i+j}a_{ij}|=(-1)^{2m}|a_{ij}|=c$.

当 $n=2m$ 时, $|(-1)^{i+j}a_{ij}|=(-1)^{2m}|a_{ij}|=c$.

【解二】 记 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,其中 $b_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

取 n 阶对角矩阵

$$\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1}\}$$

有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}$,于是必有 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$.

13. 已知 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|=c$. 如果把每一个元素 a_{ij} 都换成 $b^{i-j}a_{ij}$ $(b\neq0, 1\leqslant i,j\leqslant n)$,求所得的行列式.

【解一】 先以 $n=4$ 为例说明如下

$$c=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\to\begin{vmatrix} a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-2}a_{13} & b^{-3}a_{14} \\ b^{1}a_{21} & a_{22} & b^{-1}a_{23} & b^{-2}a_{24} \\ b^{2}a_{31} & b^{1}a_{32} & a_{33} & b^{-1}a_{34} \\ b^{3}a_{41} & b^{2}a_{42} & b^{1}a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

在第二行提出公因子 b,第二列中提出公因子 b^{-1};在第三行提出公因子 b^2,第三列中提出公因子 b^{-2};在第四行提出公因子 b^3,第四列中提出公因子 b^{-3},即知变换以后的行列式仍是 c.

一般地

$$c=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \to \left(\prod_{i=1}^{n-1} b^{-i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1} b^{i}\right)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=c$$

【解二】 根据行列式的等价定义可得

$$\begin{aligned} D_n = |b_{ij}| &= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant n} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b^l \\ &= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = |a_{ij}| \end{aligned}$$

其中 b 的方次 $l=(1-j_1)+(2-j_2)+\cdots+(n-j_n)=0$.

§2　求行列式方程的根

若 $f(x)$ 是一个带参数 x 的行列式,则求方程 $f(x)=0$ 的根称为求行列式方程的根.

1. 求出以下行列式方程的所有的根:

(1) $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}=0$;

(2) $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$;

(3) $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ x & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

【解】 (1) 当 $x=0,1,2$ 时,行列式中有两行相同,必有 $f(x)=0$,而 $f(x)=0$ 为三次方程,所以 $x=0,1,2$ 为 $f(x)=0$ 的全部根.

(2) 把后三列都加到第一列上去,提出公因式 $x+3$,再化简第一列可得

$$f(x)=(x+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&x&1&1\\1&1&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}=(x+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-1&0&0\\0&0&x-1&0\\0&0&0&x-1\end{vmatrix}$$
$$=(x+3)(x-1)^3$$

所以四次方程$f(x)=0$的所有的根为单根$x=-3$和三重根$x=1$.

(3) 把前三行都加到第四行上去,再按第四行展开可得

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\x&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\x+3&0&0&0\end{vmatrix}=-(x+3)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}$$
$$=-4(x+3)=0\Leftrightarrow x=-3$$

所求的根为$x=-3$.

2. 求出以下行列式方程的所有的根:

(1) $\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\x^2&a_1^2&a_2^2&\cdots&a_{n-1}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x^{n-1}&a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&x+1&3&\cdots&n\\1&2&x+1&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2&3&\cdots&x+1\end{vmatrix}=0$.

【解】 用直观法找出,当x取哪些值时,有两行或两列相同使得行列式的值为零.

(1) 此$n-1$次方程的所有的根为$x=a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$.

(2) 此$n-1$次方程的所有的根为$x=1,2,3,\cdots,n-1$.

3. 求出行列式方程$\begin{vmatrix}2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\\1&2&3&4\\2&4&x^2&8\end{vmatrix}=0$的所有的根.

【解】 当$9-x^2=5$,即$x^2=4$时,前两行相同;当$x^2=2\times3=6$时,后两