

53

代数学(上)

(第二版)

■ 莫宗坚 蓝以中 赵春来



53

代数学(上)

(第二版)

D A I S H U X U E

■ 莫宗坚 蓝以中 赵春来

内容提要

本书分上、下两册出版。

上册主要讲述近代代数的初步知识,内容包括集合论与数论、群论、多项式论、线性代数以及域论。

本书内容丰富,直观性强,推理自然,解释详尽。此书的独到之处是特别注重对于代数学的背景、基本思想以及与其他学科的联系等方面的介绍。书中精选了大量的例题和习题。本书的起点低,由浅入深。具有高等代数基础知识的读者皆可以阅读本书,进而学到现代代数学的较大部分基础知识。

本书可作为高等学校数学系高年级学生以及研究生的教材,也可供数学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

代数学:新1版. 上/莫宗坚,蓝以中,赵春来编著. --北京:高等教育出版社,2015.1

ISBN 978-7-04-041408-0

I. ①代… II. ①莫… ②蓝… ③赵… III. ①代数—高等学校—教材 IV. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第261610号

策划编辑 王丽萍

责任编辑 李 鹏

封面设计 张 楠

版式设计 余 杨

责任校对 王 雨

责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 国防工业出版社印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 24.5
字 数 460千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2015年1月第1版
印 次 2015年1月第1次印刷
定 价 59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 41408-00

再版序言

此书的初版序言写于 1984 年,回首已是 30 年. 那年暑假,由陈省身先生召集我们五人——项武义、伍鸿熙、肖荫堂、Morgan 和我举办首届暑期数学讲学. 事后,丁石孙校长约我,把讲稿写成书. 我遵嘱写完. 后来本书由北京大学出版社出版. 丁校长知会我,润笔资 1 万元. 我辞谢不受. 于是北京大学出版社将此 1 万元挂了账. 几个月后,武义成立“苏步青数学教育奖”,奖助中学数学老师,向我募捐. 我心窃善之,当即写纸条:请项武义先生凭此条向北京大学出版社,取用 1 万元. 多年后,该书已经绝版,盗版充斥. 后来,高等教育出版社的王丽萍女士约我出本书的再版. 我同意了.

我衷心希望此书再版以后,能再用 30 年以上,后事如何,只能付之天意了. 因此,我尽心修改.

此书再版有三大可看之处: (1) 述古. 我适当加入了一些前人的结果——例如 Euler 的空间旋转轴定理, Sylvester 惯性定理, 等等. (2) 编新. 近 10 年来, google 及百度的“搜索引擎”大行于世. 其实,它们都是 Perron-Frobenius 定理的应用. 本版修订,列入附录. (3) 全书细改,及加入更多的习题.

过去 30 年,中国年轻的数学家们,才俊辈出,光彩夺目. 希望未来的 30 年,中国的数学界能修成正果. 是所祈也.

莫宗坚

2014 年 5 月

初版序言 —— 献给中国的青年人

这本书是根据我在美国的明尼苏达大学及普度大学的讲义编写而成的。当时讲授的对象是一、二年级的研究生。为了便于课堂讲授及读者自习，我在编写过程中，力求本书能够易于了解、联系各方。我的目标是：

一、抽象与具体结合，理论与应用结合。目前的代数学书，常常单线地朝抽象方向发展，使读者——甚至一些数学家们——觉得代数学是抽象概念的游戏。即使代数学能联系实际、解决问题，那也如一些半真半假的电影片的片头语，“如与实际相符，也纯属偶然”。此书是要力矫此弊，希望能通过例题、解说等，阐明代数学与代数几何、代数数论、物理、密码学等的联系。

各科数学都是人类探索知识、解决问题的钥匙。一般的钥匙只有小部分起开锁的作用，其余部分是防止它开别的锁，这是一般的钥匙的“有害部分”。如果把这些“有害部分”完全取消，就成了百灵钥匙了。我想说明，代数学正是这样的百灵钥匙。

二、理论的整合与统一。各种数学理论的平行发展，到了代数学中，取得了整合与统一。例如，在第四章中，我们统一了“有限生成的交换群的基本定理”及“矩阵的 Jordan 标准式”；在第五章中，我们整合了“几何作图”及“解方程式”；在第八章中，我们用“Dedekind 整环”统一了“代数数论”及“仿射曲线论”的讨论，等等。

在这些理论的整合与统一中，我们希望能体现数学的内在规律美。但愿读者们能欣赏数学的“宗庙之美、百官之富”。

对于以上的目标，我自觉做得不够。向前看中国的未来，物质的建设可以速成，精神的建设需要长期的积累，所谓“十年树木，百年树人”。数学——人类

精神活动的最高产物 —— 将促进青年人对真与美的追求, 发展对文化的内省力, 因此丰裕了精神文化的生活。

本书在完成过程中, 得到蓝以中及赵春来两位的协助. 他们改正了原稿的许多遗落、误失, 与我共同商订了一些名词, 并补充了习题, 以及写了本书上册的附录一 (蓝以中). 我们联名出书, 正足以纪念我们的共同工作.

莫宗坚

序于 1984 年 8 月

符号说明

 $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H}, \mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{N}, \mathbb{O}, \mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$

交并
含于
包含
真含于
真包含
属于
不属于
空集
等价
相伴
在距离 D 下有共同
同构
不等号或半序
内积或弱内积
复数域
自然数集
有理数域
 p -adic 数域
实数域
有理整数环
整数模 n 的剩余集

$\mathbf{Z}_n^*$	整数模 n 的缩剩余集
$[a]_n$	整数 a 在 $\mathbf{Z}_n$ 中所在的同余集
$a \equiv b \pmod{m}$	a 与 b 模 m 同余
$a \mid b$	a 整除 b
$a \nmid b$	a 不整除 b
$(a, b) = 1$	a 与 b 互素
$\langle a_1, a_2, \dots \rangle$	由 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 生成的子群或向量空间
$(a_1, a_2, \dots)$	由 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 生成的理想
$\text{Ann}(S)$	S 的消灭子
(A)	由环的子集 A 生成的理想
A_n	n 个文字的交代群
$\text{Aut}(G)$	群 G 的自同构群
$C(f(x))$	多项式 $f(x)$ 的内涵
$D_\infty(a, b)$	复数 a 与 b 之间的距离, 即 $ a - b $
$D_p(a, b)$	a 与 b 的 p 距离
$\deg$	次数
$\det A$	矩阵 A 的行列式
$\dim_K V$ (或 $\dim V$)	K 向量空间 V 的维数
$\text{dis}(f(y))$	多项式 $f(y)$ 的判别式
$\text{Dis}\{w_1, \dots, w_n\}$	向量空间的一组基 $\{w_1, \dots, w_n\}$ 的判别式
$F(G)$	群 G 的不变域
$\text{FL}(m, n, K)$	域 K 上的 $m \times n$ 阶全线性群
$\text{FL}(n, K)$	域 K 上的 $n \times n$ 阶全线性群
$(G, *)$	集合 G 在运算 $*$ 下构成的群
$G > H$ (或 $H < G$)	H 为 G 的子群
$G \triangleright H$ (或 $H \triangleleft G$)	H 为 G 的正规子群
$[G : H]$	子群 H 在群 G 中的指数
G/H	群 G 对正规子群 H 的商群
$G(L/K)$	域 L 在子域 K 上的伽罗瓦群
$\text{GL}(n, K)$	域 K 上的 n 阶一般线性群
$\text{Hom}_R(M, N)$	R 模 M 到 N 的全体模映射构成的 R 模
id	恒等映射
$\text{im}(\rho)$	映射 ρ 的像
$\text{Inn}(G)$	群 G 的内自同构群
$\ker(\rho)$	映射 ρ 的核
K^*	域 K 的非零元素乘法群
K_L^c	域 K 在扩域 L 中的代数闭包
K_L^s	域 K 在扩域 L 中的可离代数闭包

$K[\alpha_1, \alpha_2, \dots]$	域 K 上添加 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 所得到的环
$K(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$	域 K 上添加 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 所得到的域
$l(G)$	群 G 的长度
$[L : K]$	代数扩域 L 在 K 上的扩张次数
M^T	矩阵 M 的转置
$N_{L/K}$ (简记 N)	由域 L 到 K 的范数
$o(G)$	群 G 的阶
$o(a)$	群的元素 a 的阶
ord	阶, 阶数
$\text{Orb}(s)$	集合的元素 s 在变换群作用下的轨道
p.i.d	主理想整环
$\text{Res}_y(f(y), g(y))$	多项式 $f(y)$ 与 $g(y)$ 的结式
R/I	环 R 对理想 I 的商环
$R[\alpha_1, \alpha_2, \dots]$	环 R 上添加 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 所得到的多项式环
$\text{SL}(n, K)$	域 K 上的 n 阶特殊线性群
$\text{SL}(n, \mathbf{Z})$	n 阶整数特殊线性群
S_n	n 个文字的对称群
$\text{Stab}(T)$	子集 T 的稳定群
$\langle S \rangle$	由集合 S 生成的群或向量空间
$S \setminus T$	集合 T 在集合 S 中的补集
$\text{tr deg}(L/K)$	域 L 对域 K 的超越次数
$\text{Tr}_{L/K}$ (简记 Tr)	由 L 到子域 K 的迹
$\mathcal{V}(I)$	理想 I 的代数多样性, 或包含 I 的所有素理想的集合
1_S	集合 S 上的恒等映射
$\varphi(\)$	欧拉 φ 函数
$\varphi_n(x)$	n 次割圆多项式
$\rho : S \rightarrow T$	由集合 S 到 T 的映射 ρ
$\prod_{i \in I} S_i$	S_i ($i \in I$) 的直积
$\bigoplus_{i \in I} S_i$	S_i ($i \in I$) 的直和
□	定理、系、引理证明完毕, 或例的结束

现代数学基础图书清单

(书号前缀为 978-7-04-0xxxx-x)

序号	书号	书名	作者
1	21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 ——抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步 (第三版)	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日]加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日]黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	38040-8	微分方程与数学物理问题 (中文校订版)	[瑞典]纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西]F. Xavier、潮小李 编著
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论 —— 从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林

序号	书号	书名	作者
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37252-6	伽罗瓦理论 —— 天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数 (第二版)	万哲先 编著
39	38651-6	实分析中的反例	汪林
40	38890-9	泛函分析中的反例	汪林
41	37378-3	拓扑线性空间与算子谱理论	刘培德
42	31845-6	旋量代数与李群、李代数	戴建生 著
43	33260-5	格论导引	方捷
44	39503-7	李群讲义	项武义、侯自新、孟道骥
45	39502-0	古典几何学	项武义、王申怀、潘养廉
46	40458-6	黎曼几何初步	伍鸿熙、沈纯理、虞言林
47	41057-0	高等线性代数	黎景辉、白正简、周国晖
48	41305-2	实分析与泛函分析 (续论) (上册)	匡继昌
49	41285-7	实分析与泛函分析 (续论) (下册)	匡继昌
50	41223-9	微分动力系统	文兰
51	41350-2	阶的估计基础	潘承洞、于秀源
52	41513-1	非线性泛函分析 (第三版)	郭大钧
53	41408-0	代数学 (上) (第二版)	莫宗坚、蓝以中、赵春来
54	41420-2	代数学 (下) (修订版)	莫宗坚、蓝以中、赵春来

网上购书: academic.hep.com.cn, www.china-pub.com, 卓越, 当当, www.landaco.com

其他订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部
汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账
均可。购书免邮费, 发票随后寄出。

单位地址: 北京西城区德外大街 4 号

电 话: 010-58581118/7/6/5/4

传 真: 010-58581113

通过邮局汇款:

地 址: 北京西城区德外大街 4 号

户 名: 高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账:

户 名: 高等教育出版社有限公司

开 户 行: 交通银行北京马甸支行

银行账号: 110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

上册目录

第一章 集合论与数论	1
§1 集合论	1
§2 唯一分解定理	6
§3 同余式	13
§4 中国剩余定理	19
§5 复整数集	23
§6 p -adic 数与赋值	33
第二章 群论	45
§1 群的定义	45
§2 集合上的变换群	52
§3 子群	58
§4 内自同构及正规子群	66
§5 自同构群	75
§6 p 群及西罗 (Sylow) 定理	80
§7 Jordan-Hölder 定理	86
§8 对称群 S_n	95

第三章 多项式	103
§1 域与环	103
§2 多项式环及比域	109
§3 多项式环的唯一分解定理	118
§4 对称式, 结式及判别式	134
§5 理想	148
第四章 线性代数	165
§1 向量空间	165
§2 基及维数	170
§3 线性变换及矩阵	180
§4 模及主理想环上的模	194
§5 Jordan 标准式	212
§6 内积及正交坐标	230
§7 谱论	249
第五章 一元多项式的解及域论	263
§1 $\mathbb{C}$ 的代数封闭性	263
§2 代数扩域	268
§3 代数闭包	283
§4 特征数及有限域	287
§5 可离代数扩域	297
§6 伽罗瓦理论	306
§7 用根式解方程式	321
§8 域多项式及判别式	335
§9 超越扩张	340
附录一 自然数的 Peano 公理系	349
附录二 Perron-Frobenius 定理	353
附录三 Reed-Solomon 自我修正码	363
汉英名词索引	369

第一章 集合论与数论

§1 集 合 论

我们假定读者已熟悉集合论的基本概念,如交集、并集、子集、包含及映射等.请参考前面的“符号说明”.

定义 1.1 设 S 及 T 为集合, $\rho: S \rightarrow T$ 是由 S 到 T 的映射.任取 S 中的二元素 s_1 及 s_2 , 如果 $\rho(s_1) = \rho(s_2)$ 时,必有 $s_1 = s_2$, 则称 ρ 为——映射,或单射.如果对于 T 中任意元素 t , 必有 $s \in S$, 使 $\rho(s) = t$, 则称 ρ 为 S 到 T 上的映射,或满射.如果 ρ 同时为单射及满射, 则称 ρ 为单满映射.

集合论中最有意义的概念之一是“基数”.我们有如下的定义:

定义 1.2 设 S 及 T 为集合.如有一单满映射 $\rho: S \rightarrow T$, 则称 S 与 T 同基数.

讨论 1) 如集合 S 与整数集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 同基数, 则称 S 为有限集, 而称其基数为 n . 反之则称为无限集. 设 S 及 T 为同基数的有限集, $\rho: S \rightarrow T$ 为一映射, 则易证: 如 ρ 为单射, 则 ρ 必为满射. 反之, 如 ρ 为满射, 则 ρ 必为单射. 此一命题可谓之**鸽笼定理**, 即设想 S 为一群鸽子, T 为等数的鸽笼, 则上命题即: 如果每一鸽子已一一进笼, 则鸽笼必无空者; 反之, 如鸽笼皆无空者, 则必然每一笼中仅有一只鸽子.

2) 如集合 S 与正整数集合 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 同基数, 则称 S 为可数无限集. 有限集与可数无限集统称**可数集**. 除此之外, 皆称为**不可数集**.

3) 对所有的无限集而言, 鸽笼定理皆不成立, 然而证法比较复杂, 远离本书的趣旨, 请读者参考集合论的专书. 现在我们仅举一例以说明此种现象, 即所谓的“希尔伯特 (Hilbert) 的旅馆”: 设一旅馆有可数无限个房间 $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$, 已住满房客. 如同时又来了可数无限个新房客 $\{g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$, 则一个简易的安排方法是令原住 n 号房间的老房客移入 $2n$ 号房间, 于是空出 $\{1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots\}$ 所有奇数号房间. 令新房客依序住入即可, 也即令新房客 g_n 住入 $2n-1$ 号房间. 从此例中, 可以看出单射不一定必是满射. 反之, 如令头两个人挤一间房, 其余的人依序住入空出的房间, 则满射又不一定是单射了.

定理 1.1 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数无限集.

证明 我们采用所谓“三角数法”. 考虑正有理数的集合 $\mathbf{Q}_+$. 把 $\mathbf{Q}_+$ 中的元素按分母大小排成如下的无限矩阵:

$$\mathbf{Q}_+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\ & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\ & \nearrow & \nearrow & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

然后我们把整个矩阵的元素, 按箭头所指的顺序, 依次对应到所有正的偶数, 自然, 已经出现过的有理数则略去. 例如,

$$\frac{1}{1} \rightarrow 2, \quad \frac{1}{2} \rightarrow 4, \quad \frac{2}{1} \rightarrow 6, \quad \frac{1}{3} \rightarrow 8, \quad \frac{3}{1} \rightarrow 10,$$

等等. 这样就把 $\mathbf{Q}_+$ 对应到了正偶数集. 同法, 我们可以把负有理数集 $\mathbf{Q}_-$ 对应到大于 1 的正奇数集. 再把 0 对应到 1. 不难看出, 这个对应是由 $\mathbf{Q}$ 到正整数集 $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ 的单满映射. 于是 $\mathbf{Q}$ 是可数无限集. $\square$

系 设有可数集 $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in}, \dots\}, i \in$ 可数集 I . 则这些可数个 S_i 的并集 $\bigcup_{i \in I} S_i$ 也是可数集.

证明 利用三角数法. $\square$

定理 1.2 实数集 $\mathbf{R}$ 为不可数集.

证明 假设 $\mathbf{R}$ 为可数集, 则所有实数可以排成一行: $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$. 我们用“对角线法”来证明这是不可能的.

把 $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ 用十进小数写出如下:

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1.b_{11}b_{12}\cdots b_{1n}\cdots, \\ r_2 &= a_2.b_{21}b_{22}\cdots b_{2n}\cdots, \\ &\dots\dots\dots \\ r_n &= a_n.b_{n1}b_{n2}\cdots b_{nn}\cdots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

其中诸 a_i 为整数, b_{ij} 为 $0, 1, 2, \dots, 9$ 之一. 现取一实数

$$r = 0.c_1c_2\cdots c_n\cdots$$

如下: 如果 $b_{nn} \neq 5$, 则取 $c_n = 5$, 否则取 $c_n = 4$ ($n = 1, 2, \dots$). 显然 $r \neq r_n$ ($\forall n = 1, 2, \dots$). 故 r 不在集合 $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ 之中. 由此知 $\mathbf{R}$ 为不可数集. $\square$

在代数学中, 经常应用构造“直积”、“商集”的方法. 我们有如下定义.

定义 1.3 设 I 为一个集合. 如果对每一个 $i \in I$, 都有一个集合 S_i , 则 S_i 的直积 $\prod_{i \in I} S_i$ 定义为

$$\{(s_i)_{i \in I} : s_i \in S_i\},$$

即 I 到 $\bigcup_{i \in I} S_i$ 的所有映射 s , 而且能适合 $s(i) = s_i \in S_i$ 者. 如 I 为可数集时,

$\prod_{i \in I} S_i$ 中的元素常写成一行 $(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$.

定义 1.4 设 T 为一集合. 如果 T 为一些分离的子集的并集, 即 $T = \bigcup_{j \in J} T_j$, 并且不同的子集 T_j 的交集为空集, 则这些子集 T_j 的集合 $\{T_j : j \in J\}$ 称为 T 的一个商集.

讨论 1) 设 T 为所有中国人的集合, 按照某种法定年龄的标准, T 可以划分为 $T_1 =$ 未成年人的集合, $T_2 =$ 成年人的集合. 则 $\{T_1, T_2\}$ 构成 T 的一个商集. 此商集中仅有两个元素.

2) 设 $\{T_j : j \in J\}$ 为 T 的一个商集, 则可在 T 中定义一个相应的“等价关系” $\sim$ 如下:

$$a \sim b \iff a, b \text{ 属于同一个 } T_j.$$

一般言之, 任意关系“ $\sim$ ”如具有下列三条性质, 则称为一个等价关系: