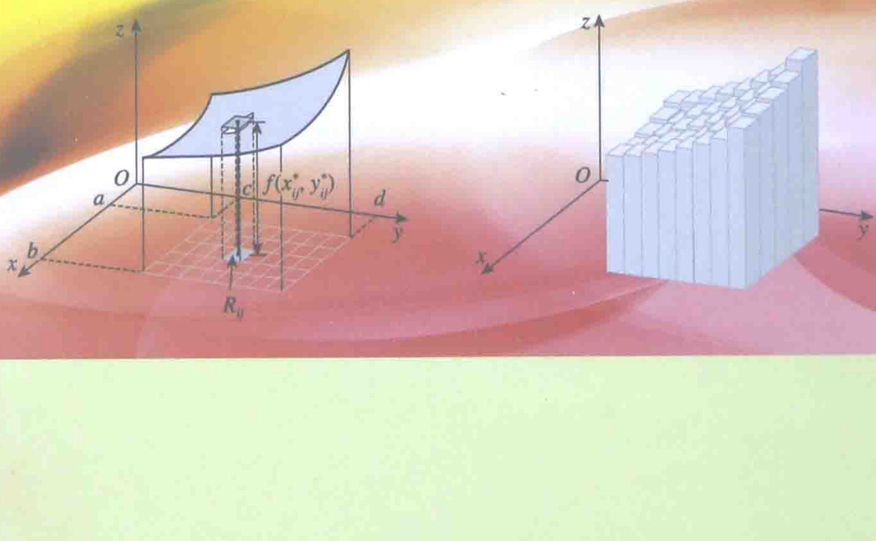
高校核心课程学习指导丛书

微积分学习指导

下册

WEIJIFEN XUEXI ZHIDAO

陈祖墀／主审
段雅丽　叶　盛　顾新身／编著



中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

微积分学习指导

下册

WEIJIFEN
XUEXI ZHIDAO

陈祖墀 / 主审
段雅丽　叶　盛　顾新身 / 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书基本上按照《微积分学导论》(下册)和《微积分》(下)的章节对应编写，包括多变量函数的微分学、多变量函数的积分学等. 每节包括知识要点、精选例题和小结三部分，尤其对基本概念和基本定理给出详细的注记，是微积分学课程教学内容的补充、延伸、拓展和深入，对教师教学中不易展开的问题和学生学习、复习中的疑难问题进行了一定的探讨.

本书可作为理工科院校本科生学习微积分的辅导书及习题课的参考书，也可作为考研的复习指南.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导. 下册/段雅丽，叶盛，顾新身编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015.2

ISBN 978-7-312-03644-6

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①段… ②叶… ③顾… Ⅲ. 微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 020405 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 安徽省瑞隆印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 19
字数 340 千
版次 2015 年 2 月第 1 版
印次 2015 年 2 月第 1 次印刷
定价 35.00 元

序

微积分课程是大学生, 特别是理工科大学生最重要的基础课程之一, 它对后续课程有直接的影响. 学好微积分对刚入学的大学生有至关重要的作用.

数学大师陈省身先生说过, 数学是做出来的, 不是读出来的. 也就是说, 做数学题是提高数学素质的关键一步. 如何做题? 怎样把题目做好? 做题的思想是如何想出来的? 等等. 由段雅丽副教授、叶盛副教授和顾新身教授撰写的这本《微积分学习指导》全面地回答了这些问题. 他们在中国科学技术大学从事微积分课程的教学工作十余年, 具有丰富的教学经验, 对学生的要求有具体的了解, 从而写出的这本书深刻、生动、翔实, 贴近学生诉求, 解答了学生在解题中的诸多困惑. 特别是对很多题目给出了解题的思路和适用的方法, 让学生不但知其然, 还知其所以然. 另外, 紧扣微积分教材各章节内容, 对很多典型的题目给出多思多解, 还收编或改编了中国科学技术大学多年来的期末或期中考试题目, 并对其作了分析与解答.

我深信这本书将成为学生学习微积分过程中的良师益友.

陈祖墀

2014 年 4 月

中国科学技术大学数学科学学院

写在中国科学技术大学校园樱花盛开的季节

前　　言

微积分是一门非常重要的基础课, 为了帮助广大学生学好微积分这门课程, 我们根据多年的教学经验, 编写了这本与教材相配套的辅导书, 基本上按照《微积分学导论》(下册) 和《微积分》(下) 的章节对应编写. 每节包括知识要点、精选例题和小结三部分. 知识要点部分对基本概念和基本定理作了简述和分析, 给出详细的注记, 包括举反例、作对比等, 对有些定理作了相应拓展. 在精选例题部分, 选择了有代表性的典型例题, 阐述了解题方法、解题思路与运算技巧, 几乎每道题都以“分析”或“注记”的形式给出解题思路或拓展性的解读; 注记中给出了题型归类、方法指导或题目延伸等; 有的是一题多解, 有的是一题在不同条件下的解读, 有的综合多个知识点, 涉及多个章节的内容, 由简到难, 多方面分析, 意在培养学生分析问题、解决问题的能力; 同时, 有的例题后面还有相关的思考题, 以培养学生的独立思考能力, 更好地巩固所学知识, 提高实际解题能力. 小结部分对每节题型或知识点作提纲性的总结.

本书是微积分教学的重要辅导书, 对教师教学中不易展开的问题和学生学习中的疑难问题进行了一定的探讨. 例题中选编或改编了一些中国科学技术大学非数学专业本科生期中或期末试题及全国硕士研究生入学考试数学试题, 进行归纳分类, 给出分析与解答, 开阔思路, 使学生所学知识融会贯通. 另外, 整本书的例题序号按自然数编排, 这样视觉上直观、简洁, 并且便于老师与学生或读者之间的交流.

本书可作为理工科院校本科生学习微积分的辅导书及习题课的参考书, 也可作为考研的复习指南.

对在编写过程中所有给予帮助的同事们和朋友们表示由衷的感谢, 特别感谢陈祖墀教授, 他为我们编写此书提供了指导性建议和意见, 并给予了鼓励与帮助.

由于时间仓促、水平有限, 本书错漏和不当之处在所难免, 还望读者指正.

编著者
2014 年 10 月
中国科学技术大学数学科学学院

目　　次

第 5 章　多变量函数的微分学

5.1　多变量函数的极限与连续

知识要点

◇ **平面点集的一些基本概念**

1. 平面上两点 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$ 间的**距离**定义为

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

它满足距离的三个要素:

正定性　$\rho(M_1,M_2)\geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $M_1=M_2$;

对称性　$\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_1)$;

三角不等式　$\rho(M_1,M_3)\leqslant\rho(M_1,M_2)+\rho(M_2,M_3)$.

2. 设 M_0 为平面中一个点, $\varepsilon>0$, $\boldsymbol{M_0}$ **的 ε-邻域**定义为

$$B(M_0,\varepsilon)=\{M\in\mathbb{R}^2|\rho(M,M_0)<\varepsilon\};$$

$\boldsymbol{M_0}$ **的 ε- 去心邻域**定义为

$$B_-(M_0,\varepsilon)=\{M\in\mathbb{R}^2|0<\rho(M,M_0)<\varepsilon\}.$$

3. 设 E 为平面点集, M 为平面上一点.

(1) 如果存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(M,\varepsilon)\subset E$, 称点 M 为 E 的**内点**. E 的全部内点记为 E°, 称为 E 的**内部**. 显然, $E^{\circ}\subseteq E$.

(2) 如果存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(M,\varepsilon)\subset E^c$($E^c$ 表示 E 的补集), 称点 M 为 E 的**外点**.

(3) 如果对任意 $\varepsilon>0$, $B(M,\varepsilon)$ 中既有 E 中的点, 也有 E^c 中的点, 称点 M 为 E 的**边界点**. E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E. E 的所有边界点的集合称为 E 的**边界**, 记为 ∂E. 显然 $\partial E=\partial E^c$.

(4) 如果对任意 $\varepsilon>0$, $B_-(M,\varepsilon)\cap E\neq\varnothing$, 即 M 的任意邻域中都含有不同于 M 的 E 中的点, 称点 M 为 E 的**聚点**.

(5) 如果存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(M,\varepsilon)\cap E=\{M\}$, 则称点 M 为 E 的**孤立点**.

注记 (1) 边界点或是孤立点, 或是聚点.

(2) 聚点包括点集的内点和非孤立的边界点.

4. 设 E 为平面点集, 如果存在常数 $K>0$, 使得 $E\subset B(O,K)$ (这里 O 表示坐标原点), 称 E 为**有界集**.

5. 设 E 为平面点集, 如果 E 中每个点都是内点, 即对 E 中任意一点 M, 都存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(M,\varepsilon)\subset E$, 则称 E 为**开集**; 如果 E 的补集 E^c 为开集, 则称 E 为**闭集**.

6. 设 $x(t),y(t)$ 为区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数, 称点集

$$L=\{(x(t),y(t)|\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$$

为一条连接 $(x(\alpha),y(\alpha))$ 和 $(x(\beta),y(\beta))$ 的平面曲线. 如果 $x'(t),y'(t)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续并且不同时为零, 则称 L 为一条**光滑曲线**. 如果曲线无自交点, 即对任意 $\alpha\leqslant t_1<t_2<\beta$, 都有 $(x(t_1),y(t_1))\neq(x(t_2),y(t_2))$, 则称 L 为一条**简单曲线或若当** (Jordan) **曲线**. 如果 $(x(\alpha),y(\alpha))=(x(\beta),y(\beta))$, 则称 L 为一条**闭曲线**.

7. 设 E 为平面点集, 如果对于 E 中任意两点都可以用 E 中的一条曲线连接起来, 称 E 为 (道路) **连通集**. 按定义, 独点集也是连通集.

8. 连通的开集称为**区域**, 一个区域和它的边界的并集称为**闭区域**.

9. 若平面区域 G 内任一条简单闭曲线的内部还在 G 内, 则称 G 为**单连通域**. 否则, 称 G 为**多连通域**.

10. 设 $\{M_n\}$ 为平面点列, 如果存在点 $M_0 \in \mathbb{R}^2$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_n, M_0) = 0,$$

即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有不等式 $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$ 成立, 称 $\{M_n\}$ 为**收敛点列**, 并称 M_0 为点列 $\{M_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$.

11. 设 $\{M_n\}$ 为平面点列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, $\rho(M_n, M_m) < \varepsilon$, 称 $\{M_n\}$ 为**柯西 (Cauchy) 点列**.

◇ 非空平面点集的主要定理

1. 闭集的聚点刻画

平面子集 E 为闭集当且仅当 E 的每个聚点都属于 E.

2. 开集和闭集的边界刻画

设 E 为平面点集, 则有:

(1) E 为开集 $\Longleftrightarrow \partial E \cap E = \varnothing$.

(2) E 为闭集 $\Longleftrightarrow \partial E \subset E$.

3. 柯西收敛准则

点列 $\{M_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{M_n\}$ 为柯西点列.

◇ 多元函数的一些概念

1. 二元函数的极限

设 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ 为二元函数, M_0 为 D 的聚点, 如果存在常数 a, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $M \in D$ 且 $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ 时, $|f(M) - a| < \varepsilon$, 则称 M 趋于 M_0 时, $f(M)$ 的极限存在且为 a, 又称为**二重极限**. 记为

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = a.$$

如果用 (x_0,y_0), (x,y) 分别表示点 M_0,M 的坐标, 此二重极限也可记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a.$$

注记 (1) 累次极限 (以二元函数为例): 设二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某一去心邻域中有定义. 如果对任意固定的 y $(y\neq y_0)$, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 令 $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, 它是定义在 y_0 去心邻域的函数. 如果 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ 存在, 则令

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y),$$

称之为函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的一个累次极限 (先 x 后 y). 类似地, 可以定义另一个累次极限 (先 y 后 x)

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

从定义看, 累次极限实质上是先后两次取一元函数的极限. 这样两个累次极限可能不等, 或者可能有一个不存在. 如函数

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

在 (0,0) 点处的两个累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1.$$

又如, 函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{xy}$ 在 (0,0) 点处的累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, 但另一个累次极限不存在.

(2) 重极限与累次极限是两个不同的概念, 它们之间没有必然联系. 可参看后面的例题.

(3) 重极限与累次极限对应后面的重积分与累次积分, 所以它们也不同, 但在一定条件下, 重积分可化为累次积分计算.

2. 二元函数的连续性

(1) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$, $f:D\to\mathbb{R}$ 为二元函数, $M_0\in D$, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $M\in D$ 且 $\rho(M,M_0)<\delta$ 时, $|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$, 则称 f 在 M_0 处**连续**.

(2) 若 M_0 为 D 的聚点, 则 f 在 M_0 处连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)=f(\lim\limits_{M\to M_0} M)$. 由连续的定义可知, 当 M_0 为 D 中孤立点时, 则 f 在 M_0 处连续.

(3) 如果 f 在 D 中每一点都连续, 则称 f 在 D 上连续.

(4) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$, $f:D\to\mathbb{R}$ 为二元函数, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $M,M'\in D$ 且 $\rho(M,M')<\delta$ 时, $|f(M)-f(M')|<\varepsilon$, 则称 f 在 D 中**一致连续**.

◇ 连续函数的性质

1. 介值定理

设 f 为连通集 D 上的连续函数, $M_1,M_2\in D$, 则 f 可以取到介于 $f(M_1)$ 和 $f(M_2)$ 之间的所有值.

2. 最值定理

设 f 为有界闭集 D 上的连续函数, 则 f 可以在 D 上取到最大值和最小值.

3. 一致连续性

设 f 为有界闭集 D 上的连续函数, 则 f 在 D 上一致连续.

注记　(1) 多元函数的极限仍具有极限值的唯一性、局部保号性、局部有界性、夹逼性以及极限的四则运算等.

(2) 多元连续函数仍具有局部有界性、保号性, 以及连续函数的四则运算, 复合函数的连续性等. 初等多元函数在其定义域内连续.

精选例题

例 1　证明函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

在 (0,0) 点处的极限不存在, 但两个累次极限存在且为 0.

证明　显然, 两个累次极限

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=0$$

可证明重极限不存在, 我们分别沿直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 趋于 $(0,0)$ 点,

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to0}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{\substack{y=2x\\x\to0}} f(x,y) = \lim_{x\to0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2}=0.$$

此极限值依赖于趋于 (0,0) 点的方式, 故函数在 (0,0) 点处的极限不存在.

例 2 证明函数

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$$

在 (0,0) 点处的极限存在, 但两个累次极限都不存在.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|\leqslant2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon,$$

故由极限的定义得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

因为 $\lim\limits_{y\to0}\sin\dfrac{1}{y}$, $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, 所以两个累次极限

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right),\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$$

都不存在.

注记 (1) 重极限的存在性与累次极限的存在性没有必然的联系. 重极限存在, 未必两个累次极限存在; 两个累次极限存在, 重极限未必存在. 当重极限与累次极限都存在时, 极限值一定相等.

(2) 证明重极限不存在时, 可以选取不同的方式趋于点 (x_0,y_0), 使得函数趋于不同的极限; 或者按某种方式趋于点 $(x_0,,y_0)$, 使得极限不存在.

例 3 求下列函数的极限:

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; (2) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\ln(1+xy)}{xy\cos(x^2+y^2)}$; (3) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

解　(1) **分析**　当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $\sin(x^3+y^3)$ 是与 x^3+y^3 等价的无穷小量, 而 x^3+y^3 是比 x^2+y^2 高阶的无穷小量, 所以猜想极限应该为 0.

因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1\quad(\text{令}x^3+y^3=u),$$

而 $0\leqslant\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leqslant(|x|+|y|)\left(1+\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\right)\leqslant\dfrac{3}{2}(|x|+|y|)\to 0\ (x\to 0,y\to 0)$. 由夹逼定理得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0,$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

(2) **分析**　当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $\ln(1+xy)$ 是与 xy 等价的无穷小量, 而 $\cos(x^2+y^2)$ 极限应为 1, 所以猜想极限应该为 1.

因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{xy}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1\quad(\text{令}xy=u),$$

由函数的连续性得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\cos(x^2+y^2)}=\frac{1}{\cos 0}=1,$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{xy\cos(x^2+y^2)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\cos(x^2+y^2)}=1.$$

(3) 这是幂指函数, 因为

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x}{x+y}=1,$$

故

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}.$$

注记　证明多变量函数极限存在并求其极限的方法:

(1) 利用定义.

(2) 利用夹逼定理.

(3) 利用四则运算性质.

(4) 作变量代换或利用不等式化为一元函数的极限问题.

(5) 利用初等函数的连续性.

例 4 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点 (0,0) 处沿着过此点的每一条射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\quad (0\leqslant t<+\infty),$$

连续, 即

$$\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0).$$

但此函数在点 (0,0) 处并不连续.

证明 因为

$$\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0,$$

故

$$\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0=f(0,0).$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 处沿着过此点的每一射线连续.

但令 $y=kx^2$, 有

$$\lim_{\substack{y=kx^2\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

故极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在, 函数在点 (0,0) 处不连续.

例 5 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{x-y}-1}{x-y}, & x>y,\\ 1, & x=y,\\ \dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}, & x<y,\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 的连续性.

解 显然, 当 $x\neq y$ 时, $f(x,y)$ 连续.

下面讨论在 $x=y$ 上 $f(x,y)$ 的连续性. 在 $x=y$ 上任取一点 (t_0,t_0), 则 $f(t_0,t_0)=1$.

当 $x>y$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to t_0\\ y\to t_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to t_0\\ y\to t_0}}\frac{\mathrm{e}^{x-y}-1}{x-y}=\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{e}^{u}-1}{u}=1=f(t_0,t_0)\quad(令x-y=u),$$

即 $f(x,y)$ 在直线 $x=y$ 上任一点沿 $x>y$ 一侧的半平面连续.

当 $x<y$ 时, 有

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to t_0\\ y\to t_0}} f(x,y)&=\lim_{\substack{x\to t_0\\ y\to t_0}}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\lim_{\substack{x\to t_0\\ y\to t_0}}\frac{2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}}{x-y}\\ &=\lim_{\substack{x\to t_0\\ y\to t_0}}\frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\dfrac{x-y}{2}}\cdot\lim_{\substack{x\to t_0\\ y\to t_0}}\cos\frac{x+y}{2}\\ &=\cos t_0.\end{aligned}$$

综上, 当 $x\neq y$ 或 $x=y=2k\pi$ $(k=0,\pm1,\cdots)$ 时, $f(x,y)$ 连续; 当 $x=y\neq 2k\pi$ 时, $f(x,y)$ 间断.

小 结

1. 证明二元函数极限的存在性, 并求其极限值.
2. 研究二元函数的连续性.

5.2 多变量函数的微分与偏导数

知识要点

◇ 基本概念

1. 偏导数

设 $z=f(x,y)$ 为区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的二元函数, $(x_0,y_0)\in D$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称它为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数 (或偏微商), 记作 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 等.

类似地, $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

注记 (1) 偏导数的计算:

偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 实质上是一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处的导数. 同理, $f'_y(x_0,y_0)$ 是一元函数 $f(x_0,y)$ 在点 y_0 处的导数. 求多元函数对某个自变量的偏导数, 只要把其他自变量都当成常数, 把该函数当成此自变量的一元函数求导即可.

(2) 由此可得到如下结论:

若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$, 则 $f(x,y)=\varphi(y)$; 若 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$, 则 $f(x,y)=\psi(x)$.

(3) 偏导数的几何意义:

$f'_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线 $z=f(x,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线对 x 轴的斜率; $f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线 $z=f(x_0,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线对 y 轴的斜率.