GAOXIAO
XUEXIFA

清华北大学子

高效学习法

高二数学

（下B）

丛书主编／薛金星

北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)
北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

清华北大学子

高效学习法

高二数学（下B）

丛书主编　薛金星

本书主编　张希孝　丁国文

副 主 编　刘瑞杰　王洪国

刘光才　夏良深

李春丽　张宗田

北京出版社出版集团

BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)

北京教育出版社

BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

清华北大学子
高效学习法·高二数学(下 B)
QINGHUABEIDAXUEZI
GAOXIAOXUEXIFA·GAOERSHUXUE(XIA B)
丛书主编　薛金星
*
北京出版社出版集团
北 京 教 育 出 版 社 出版
(北京北三环中路 6 号)
邮政编码:100011
网　址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
各 地 书 店 经 销
北京市昌平兴华印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　16 开本　10 印张　260 千字
2005 年 10 月第 2 版　2005 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 7-5303-1975-2/G·1949
定价:12.80 元

阅读导引

[课前高效准备]

机遇总是垂青于那些有准备的人。“课前高效准备”对知识进行分类表解并加以总结，把每节课的所有知识点以方便、快捷的形式呈现给您，增强您的目标意识，让您做到心中有数。

[课堂高效探究]

学习的重点在课堂，课堂的关键在高效，技巧胜于力量。“课堂高效探究”帮您主动建构知识结构体系，从而深化理解、便于应用。同时，针对知识的重难点、易错点逐一突破和化解，帮您理解概念，掌握性质、方法和技巧，纠正易错点，以达到夯实基础知识，熟练基本技能的目的。

[多维高效解题]

被内化的知识才是最具生命力的知识。“多维高效解题”以生为本，以法立意，以导为线，还您学习的主体地位。借助典型例题，详细剖析以作示范，旨在启发解题思路，让您通过例题解析和方法归纳，学会观察，学会比较，学会联想，学会分析、综合、概括和抽象，掌握学科的思想方法，提高独立思考和解决问题的能力，以达到在探究中思考、在思考中顿悟、在顿悟中掌握的目的。

[限时高效训练]

本栏目中的题目具有时代性和典型性，特别是精选了近年来各地高考题中精、巧、活、新的热点题型编排在各节训练题中，取消带有死记硬背、机械训练性质的题目，结合具体情境和应用，着重培养正确理解和运用知识解决问题的能力，从而实现学以致用的目的。

目录 CONTENTS

第九章 直线、平面、简单几何体 …… (1)

9.1 平面的基本性质 …… (1)
课前高效准备 …… (1)
课堂高效探究 …… (1)
多维高效解题 …… (6)
限时高效训练 …… (8)

9.2 空间的平行直线与异面直线 …… (8)
课前高效准备 …… (8)
课堂高效探究 …… (9)
多维高效解题 …… (12)
限时高效训练 …… (15)

9.3 直线和平面平行与平面和平面平行 …… (16)
课前高效准备 …… (16)
课堂高效探究 …… (16)
多维高效解题 …… (22)
限时高效训练 …… (26)

9.4 直线和平面垂直 …… (27)
课前高效准备 …… (27)
课堂高效探究 …… (27)
多维高效解题 …… (31)
限时高效训练 …… (34)

9.5 空间向量及其运算 …… (35)
课前高效准备 …… (35)
课堂高效探究 …… (35)
多维高效解题 …… (39)
限时高效训练 …… (41)

9.6 空间向量的坐标运算 …… (42)
课前高效准备 …… (42)
课堂高效探究 …… (42)
多维高效解题 …… (44)
限时高效训练 …… (47)

9.7 直线和平面所成的角与二面角 …… (48)
课前高效准备 …… (48)
课堂高效探究 …… (48)
多维高效解题 …… (54)
限时高效训练 …… (58)

9.8 距 离 …… (60)
课前高效准备 …… (60)
课堂高效探究 …… (60)
多维高效解题 …… (63)
限时高效训练 …… (67)

9.9 棱柱与棱锥 …… (68)
课前高效准备 …… (68)
课堂高效探究 …… (68)
多维高效解题 …… (71)
限时高效训练 …… (75)

研究性学习课题：多面体欧拉定理的发现 …… (76)
课前高效准备 …… (76)
课堂高效探究 …… (76)
多维高效解题 …… (77)
限时高效训练 …… (79)

9.10 球 …… (80)
课前高效准备 …… (80)
课堂高效探究 …… (80)
多维高效解题 …… (83)
限时高效训练 …… (86)

章末总结 …… (87)

第十章 排列、组合和二项式定理 …… (96)

10.1 分类计数原理与分步计数原理 …… (96)
课前高效准备 …… (96)
课堂高效探究 …… (96)
多维高效解题 …… (98)
限时高效训练 …… (100)

10.2 排 列 …… (101)
课前高效准备 …… (101)
课堂高效探究 …… (101)

多维高效解题……………………（103）
限时高效训练……………………（105）
10.3 组 合……………………（106）
课前高效准备……………………（106）
课堂高效探究……………………（106）
多维高效解题……………………（110）
限时高效训练……………………（111）
10.4 二项式定理……………………（112）
课前高效准备……………………（112）
课堂高效探究……………………（112）
多维高效解题……………………（115）
限时高效训练……………………（117）
章末总结……………………（118）
第十一章 概 率……………………（123）
11.1 随机事件的概率……………………（123）
课前高效准备……………………（123）
课堂高效探究……………………（123）
多维高效解题……………………（125）
限时高效训练……………………（127）
11.2 互斥事件有一个发生的概率……（128）
课前高效准备……………………（128）
课堂高效探究……………………（128）
多维高效解题……………………（129）
限时高效训练……………………（132）
11.3 相互独立事件同时发生的概率……………………（133）
课前高效准备……………………（133）
课堂高效探究……………………（133）
多维高效解题……………………（135）
限时高效训练……………………（137）
章末总结……………………（139）

第九章　直线、平面、简单几何体

9.1　平面的基本性质

课前高效准备

1. 理解平面的基本概念,掌握它的基本画法.

2. 掌握三个公理的内容,能用三个公理解决一些简单的问题.

3. 掌握公理 3 的三个推论,能用图形和符号语言表达三个推论,并能运用三个推论解决一些简单问题,培养学生对立体几何的推理能力,并能在推理中运用数学符号.

4. 掌握斜二测画法的基本步骤和规则,会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图和长方体、正方体的直观图.

课堂高效探究

[重难点高效突破]

1. 平面的概念

解读:平面是一个不加定义,只需理解的原始概念. 立体几何里所说的平面是从现实生活中常见的平面抽象出来的. 常见的桌面、黑板面、平静的水面等都给我们以平面的局部形象.

平面像初中所学的直线一样具有无限延展性,它是理想的、绝对的平且无大小,无厚薄,不可度量. 它与平面图形的区别在于:平面图形如三角形、正方形、梯形、圆形等有大小、长短之分,可以度量.

思维突破:通过类比直线来理解平面的概念,抓住平面的两个基本特征:一是"平",二是无限延展. 通过观察、类比形成对平面概念的感性理解.

例 1　已知下列四个命题:①铺得很平的一张白纸是一个平面;②一个平面的面积可以等于 $6\ cm^2$;③平面的形状是矩形或平形四边形;④两个平面叠在一起比一个平面厚. 其中正确命题的个数是(　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

思维主线:平面是无限延展的,无大小无厚薄之分. 故选 A.

规律技巧妙法总结:平面是一个抽象性的概念,虽然可以用封闭的平面几何图形表示,但我们见到的几何图形并不是平面,而是平面的一部分.

例 2　(1)一个平面将空间分成________部分,两个平面将空间分成______部分;

(2)空间三个平面能把空间分成的部分为(　　)

A. 4 或 6　　　　B. 7 或 8

C. 5 或 6 或 7　　D. 4 或 6 或 7 或 8

思维主线:本题考查平面无限延展性的应用. (1)一个平面将空间分成 2 部分;当两个平面平行时,将空间分成 3 部分;当两个平面相交时,将空间分成 4 部分. 故填 2;3 或 4.

(2)如图 9-1-1①当三个平面平行时,将空间分成 4 部分;②当三个平面相交于一条直线时,将空间分成6 部分;③当两个平面平行,第三个平面与它们相交时,也将空间分成 6 部分;④当三个平面相交于三条交线时,将空间分成 7 部分;⑤当两个平面相交,第三个平面截两个相交平面时,将空间分成 8 部分. 故选 D.

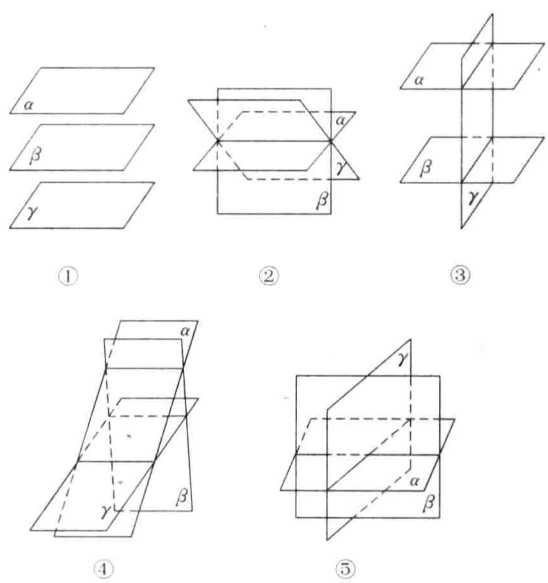


图 9-1-1

规律技巧妙法总结:分类讨论思想、数形结合思想是中学数学中常见的数学思想,在解题时要全面考虑,同时注意数形结合.

■2. 平面的画法及表示

解读:当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时,感到它们都很像平行四边形,因此立体几何中我们通常用平行四边形来表示平面.当平面水平放置时,通常把平行四边形的锐角画成 $45°$,横边画成邻边的 2 倍长.如图 9-1-2.

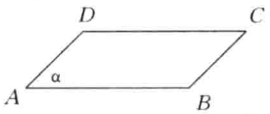


图 9-1-2

平面通常用一个希腊字母 α、β、γ 等来表示,如平面 α、平面 β、平面 γ 等,也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示,如平面 AC、平面 BD.今后一般用 A、B、C、…表示点,a、b、c、…表示线,α、β、γ、…表示平面.如图 9-1-2 中的平面可表示为平面 α 或平面 AC 等.

几个平面画在一起,当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮部分的线段画成虚线或不画.如图 9-1-3 中图①表示平面 β 在平面 α 的上面,图②表示平面 α 在平面 β 的前面.这样看起来立体感强一些.

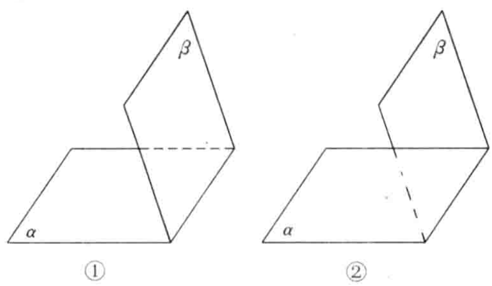


图 9-1-3

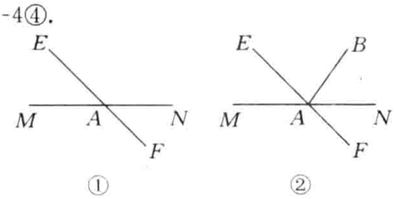
两个相交平面的画法,具体步骤如下:

(1)画两条相交直线,表示两个平面的平行四边形相交的两条边,如图 9-1-4①中的 EF、MN.

(2)画两个相交平面的交线,如图 9-1-3②中的 AB.

(3)通过端点 E、F、M、N 分别画出与 AB 平行且相等的线段 EC、FD、MP、NQ,连结 CD 和 PQ,可以得到表示平面的平行四边形 $EFDC$ 和平行四边形 $MNQP$.如图 9-1-4③.

④把被平面遮住的部分画成虚线或者不画.如图 9-1-4④.



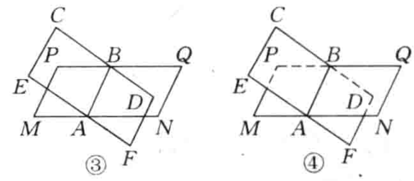


图 9-1-4

直线和平面都是由点构成的集合.立体几何中,点通常用大写字母来表示,直线和平面用小写字母表示.几何中许多符号的规定都是源于将图形视为点集.

思维突破:以前在平面几何中,凡是后引的辅助线我们都画成虚线;而立体几何则不然,凡是被平面遮住的线,都画成虚线,凡是不被遮住的线都画成实线(无论是题中原有的,还是后引的辅助线).这一点与平面几何不同,初学者要引起注意.

例 3 下面有 4 个与图 9-1-5 相关的命题:

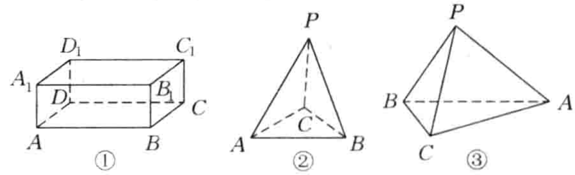


图 9-1-5

(1)图①中有三条虚线,被遮挡的面有三个;(2)图②中被遮挡的面有三个;(3)图③中被遮挡的面有一个;(4)图①中长方体的底面 $ABCD$ 与图②中三棱锥的底面 ABC 所在平面均可以表示为平面 AC.其中正确命题的个数是( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

思维主线:对空间图形的直观图,被遮住的部分画成虚线或不画,平面可以用表示平面的对角线字母表示,而②中面 ABC 无对角线,不能表示为面 AC.选 B.

规律技巧妙法总结:仔细观察图形,发挥想象能力,表示平面的大写字母前要加"平面"或"面"等字样.

例 4 如何用符号语言表示下列文字语言?

(1)点 P 在直线 l 上________;

(2)点 P 在直线 l 外________;

(3)点 P 在平面 α 内________;

(4)点 P 在平面 α 外________;

(5)直线 l 在平面 α 内________;

(6)直线 l 在平面 α 外________;

(7)平面 α 和 β 相交,交线是 l ________;

(8)直线 a 和 b 相交于点 P ________.

思维主线:联想到在集合语言中元素与集合,集合与集合间的表示方法.

解析:(1)$P\in l$ (2)$P\notin l$ (3)$P\in\alpha$ (4)$P\notin\alpha$ (5)$l\subsetneqq\alpha$ (6)$l\not\subseteq\alpha$ (7)$\alpha\cap\beta=l$ (8)$a\cap b=P$

规律技巧妙法总结:准确使用符号语言表述,注意与集合符号的异同.

3. 平面的基本性质——公理 1

解读:(1)三种语言叙述:

文字语言表述:如果一条直线的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

图形语言表述(如图 9-1-6):

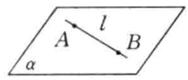


图 9-1-6

符号语言表述:$\left.\begin{matrix}A\in l\\B\in l\\A\in\alpha\\B\in\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\subset\alpha$.

(2)公理 1 的剖析:

公理 1 的内容反映了直线与平面的位置关系.公理 1 的条件是"线上两点在平面内"是公理的必要条件,结论是"线上所有点都在平面内".从集合的角度看,这个公理就是说,如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集),那么这条直线就是这个平面的真子集.这个结论阐述两个观点:一是整条直线在平面内;二是直线上所有点在平面内.即 $l\subsetneq\alpha$ 且 $C\in l$,则 $C\in\alpha$.

(3)公理 1 的作用:

判定直线是否在平面内.

思维突破:理解公理 1 的关键是理解好题设和结论,公理的内涵和外延.

例 5 如果一条直线过平面内一点与平面外一点,那么它和这个平面有几个公共点?说明道理.

思维主线:结合公理 1 用反证法证明.这条直线和这个平面只有一个公共点.假如这条直线和这个平面有两个公共点,根据据公理 1 可得,这条直线上所有的点都在这个平面内,推得这条直线过平面外的一点也在这个平面内,这与已知矛盾,这说明直线与这个平面有两个公共点是不可能的.所以,这条直线与这个平面只有一个公共点.

规律技巧妙法总结:我们证明原命题比较困难时就证明它的逆否命题,即否定结论,推出与已知相矛盾的结果.其步骤为:反设,归谬,下结论.

4. 平面的基本性质——公理 2

解读:(1)公理 2 的三种数学语言表述:

文字语言表述:如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他的公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

图形语言表述(如图 9-1-7):

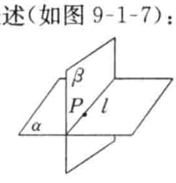


图 9-1-7

符号语言表述:$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$ 且 $P\in l$.

(2)公理 2 的剖析:

公理 2 的内容反映了平面与平面的位置关系.公理 2 的条件简言之是"两面共一点",结论是"两面共一线,且过这一点,线唯一".对于本公理应强调对于不重合的两个平面,只要它们有公共点,它们就是相交的位置关系,交集是一条直线.

(3)公理 2 的作用:判定两个平面是否相交及确定交线的位置.

思维突破:证明(判断)点共线、线共点的主要依据是公理 2.

例 6 已知$\triangle ABC$ 在平面 α 外,它的三边所在的直线分别交 α 于 P、Q、R,求证:P、Q、R 在同一条直线上.

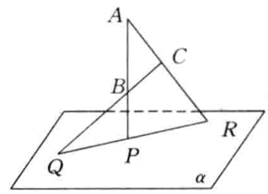


图 9-1-8

思维主线:证明 P、Q、R 分别在两个平面内,即在两平面的交线上.

平面 α 外的$\triangle ABC$ 确定一个平面 ABC.∵ $\triangle ABC$ 的三边所在的直线分别交 α 面于 P、Q、R 三点,

∴ P、Q、R 三点为平面 ABC 和平面 α 的公共点.

由公理 2 可得:平面 ABC 和平面 α 有公共点,那么它们有且只有一条经过公共点的公共直线.

∴ P、Q、R 三点在同一条直线上.

规律技巧妙法总结:证明若干点共线问题,只需证明这些点同在两个相交平面内即可,根据公理 2,找出相关的平面与平面的交线,说明这些点都在两个平面的交线上.

例 7 三个平面两两相交于三条直线,且三条直线不平行,则这三条直线相交于一点.

思维主线:这是证明三线共点问题.常规思路先证两线交于一点,再证明这点在第三条直线上.

已知:平面 α、β、γ 两两相交于三条直线 l_1、l_2、l_3,且 l_1、l_2、l_3 不平行.如图 9-1-9.

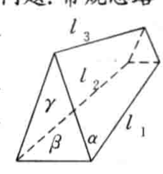


图 9-1-9

求证:l_1、l_2、l_3 相交于一点.

证明:∵ $l_1\subsetneq\beta$,

$l_2\subsetneq\beta$,

又 $l_1\nparallel l_2$,

故 l_1 与 l_2 相交.

设 $l_1\cap l_2=P$,

则 $P\in l_1\subsetneq\alpha$,

$P\in l_2\subsetneq\gamma$,

∴ P 点在平面 α 与 γ 的交线上,

即 $P\in l_3$，

$\therefore$ l_1、l_2、l_3 交于一点 P.

规律技巧妙法总结：证明三线共点，只需证明其中两线相交，然后证明另一线也过交点.

5. 平面的基本性质——公理 3

解读：(1)三种语言表述：

文字语言表述：

经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

图形语言(如图 9-1-10)：

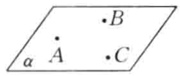


图 9-1-10

符号语言表述：A,B,C 三点不共线⇒有且只有一个平面 α，使 $A\in\alpha,B\in\alpha,C\in\alpha$.

(2)公理 3 的剖析：

公理 3 的条件是“过不在同一直线上的三点”，结论是“有且只有一个平面”. 条件中的“三点”是条件的骨干，不会被忽视，但“不在同一直线上”这一附加条件则易被遗忘，如舍之，结论就不成立了，因此绝对不能遗忘. 同时还应认识到经过一点、两点或在同一直线上的三点可有无数个平面；过不在同一直线上的四点，不一定有平面，因此要充分重视“不在同一直线上的三点”这一条件的重要性.

公理 3 中的“有且只有一个”的含义要准确理解. 这里的“有”是说图形存在，“只有一个”是说图形唯一，本公理强调的是存在和唯一两个方面，因此“有且只有一个”必须完整的使用，不能仅用“只有一个”来替代“有且只有一个”，否则就没有表达存在性. 确定一个平面中的“确定”是“有且只有”的同义词，也是指存在性和唯一性这两方面的，这个术语今后也会常常出现，要理解好.

(3)公理 3 的作用：

一是确定平面，二是可用其证明点、线共面问题.

思维突破：公理 3 的实质是三点确定一个平面. 可以联系现实生活中的门，只要两片合页、一把锁就可把门固定；联系平面几何中两点确定一条直线，可更好地把握公理的实质.

例 8 为什么有的自行车的后轮旁只安装一只撑脚?

思维主线：探求共面的条件. 根据公理 3 知道：不共线三点可以确定一个平面. 我们把自行车的前后轮看作是两个点，因此，只需要在自行车旁安装一只撑脚作为第三个点，由这不共线的三点就可以确定一个平面. 因此，自行车只安装一只撑脚就可以.

规律技巧妙法总结：转化化归思想是我们常用的解题思想，学习本节内容，学生要注意两个转化：①是将现实生活中的部分现象用公理及推论来解释，增强自己的逻辑推理能力；②是联系周围的点、线、面及以前获取的知识经验来理解，提高自己的空间想象能力.

6. 公理 3 的三个推论

解读：推论 1：经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面.

推论 2：经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3：经过两条平行直线有且只有一个平面.

(1)作为推论，需要利用公理给出严格的证明. 与平面几何的证明一样，证明立体几何问题的一般步骤是：

第一步：根据题意作图，写出已知，求证.

第二步：写出证明过程.

(2)对于“有且只有”型命题的证明，要从“有”和“只有”两方面证明，既证明存在性——“有”，又证明唯一性——“只有”.

(3)下面给出推论 2 和推论 3 的证明.

推论 2：经过两条相交直线有且只有一个平面.

已知：直线 $a\cap b=A$，

求证：经过直线 a、b 有且只有一个平面 α.

证明：(1)如图 9-1-11，在直线 a、b 上分别取不同于点 A 的点 C、B，得到不在同一直线上的三点 A、B、C，过这三个点有且只有一个平面 α(公理 3).

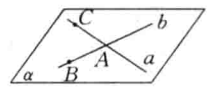


图 9-1-11

$\because$ $B\in b,A\in b,B\in\alpha,A\in\alpha$，

$\therefore$ $b\subsetneq\alpha$.

又 $C\in a,A\in a,C\in\alpha,A\in\alpha$，

$\therefore$ $a\subsetneq\alpha$(公理 1).

$\therefore$ 平面 α 是过相交直线 a、b 的平面.

(2)如果过直线 a 和 b 还有另一个平面 β，那么 A、B、C 三点也一定都在平面 β 内，这样过不在一条直线上的三点 A、B、C 就有两个平面 α、β 了，这与公理 3 矛盾.

$\therefore$ 过直线 a、b 的平面只有一个.

综上知，过直线 a、b 有且只有一个平面.

推论 3：经过两条平行直线有且只有一个平面.

已知：$a/\!/b$.

求证：经过 a、b 有且只有一个平面 α.

证明：(1)如图 9-1-12，由平面几何知识知：

当两条直线在同一平面内且不相交时，叫做平行直线.

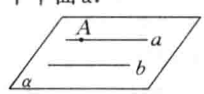


图 9-1-12

$\therefore$ 两条平行直线 a 和 b 必在某个平面 α 内，就是说，过两条平行直线 a、b 有一个平面 α.

(2)如果过 a 和 b 还有另一个平面 β，那么在 a 上任取一点 A，它一定在平面 β 内，这样过点 A 和直线 b 就有两个平面 α 和 β，这和推论 1 相矛盾.

$\therefore$ 过两条平行直线 a 和 b 的平面只有一个.

综上知，过 a、b 有且只有一个平面 α.

思维突破：熟练运用确定平面条件，证明点、线共面的方法.

例 9 已知 a、b、c、d 是两两相交且不共点的四

条直线.求证:直线 a、b、c、d 共面.

思维主线:分三线共点和三线不共点两种情况.

证明:(1)无三线共点的情况,如图 9-1-13,设 $a\cap d=M$,$b\cap d=N$,$c\cap d=P$,$a\cap b=Q$,$a\cap c=R$,$b\cap c=S$.

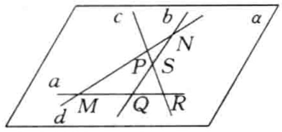


图 9-1-13

$\because a\cap d=M$,

$\therefore a$、d可确定一个平面,设为 α.

$\because N\in d,Q\in a$,

$\therefore N\in\alpha,Q\in\alpha,\therefore NQ\subset\alpha$,即 $b\subset\alpha$.

同理 $c\subset\alpha$. $\therefore a$、b、c、d 共面.

(2)有三线共点的情况,如图 9-1-14,设 b、c、d 三线相交于点 K,与 a 分别交于 N、P、M 且 $K\notin a$.

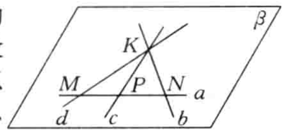


图 9-1-14

$\because K\notin a,\therefore$ 点 K 和直线 a 确定一个平面,设为 β.

$\because N\in a,a\subset\beta$,

$\therefore N\in\beta$

$\therefore NK\subset\beta$,即 $b\subset\beta$

同理 $c\subset\beta,d\subset\beta$. $\therefore a$、b、c、d 共面.

由(1)(2)知 a、b、c、d 共面.

规律技巧妙法总结:证明共面的方法:(1)先根据公理 3 及其推论确定一个平面,再证明有关的点、线也在此平面内.

(2)过有关的点线分别确定一个平面,然后再证明这些平面重合.

[易错点高效突破]

一、易错点

1. 增强空间想象能力,注意平面几何与立体几何的区别,不要简单的将平面几何的结论迁移到立体几何中来,造成失误

例 1 有三个角是直角的四边形是平行四边形.在同一平面内正确,推广到空间则错.

再如:两组对边分别相等的四边形是平行四边形.在同一平面内正确,推广到空间四边形则错.

指点迷津:平面内成立的定理、结论,在空间中不一定成立,因此推理时要严格遵循立体几何中的定理、公理作为推理的依据.

2. 全面考虑问题,把问题推广到空间,做到无一遗漏

例 2 与空间不共面的四点距离相等的平面数为______个.

思维点拨:要使各点到该平面的距离相等,且此四个点不共面,显然此四点不能在所求平面的同侧,因此只能有下述两种情况.

解:(1)三个点在所求平面的一侧,第四个点在另一侧.设 A、B、C 三点在一侧,D 点在另一侧,作 $DP\perp$平面 ABC,P 为垂足,再过 DP 的中点作平面 α 平行于平面 ABC,则平面 α 即为所求,如图 9-1-15.

同理可知,在这类情况下,这样的平面还有三个,共计四个.

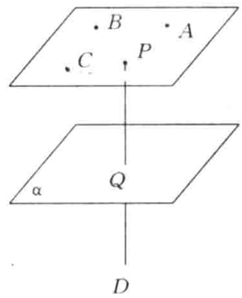


图 9-1-15

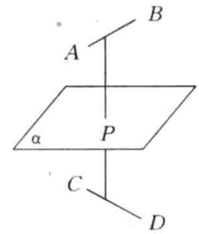


图 9-1-16

(2)两点在所求平面一侧,而其余两点在另一侧.因 A、B、C、D 不共面,故线段 AB 和 CD 所在直线是异面直线,过 AB 和 CD 的公垂线中点作与公垂线垂直的平面 α,则此平面 α 即为所求的平面,如图 9-1-16.

同理可知,这样的平面还有两个,共计三个.

综上所述,所求平面共有 7 个.

指点迷津:本题综合考查了分类思想和空间想象能力.分类时要有依据,条理清晰,不重不漏,空间想象能力要通过训练不断得到提高.

3. 解题时要严格推理、严密论证,每一步都要有根据,不能凭想当然

例 3 已知 A、B、C、D、E 五点,A、B、C、D 共面,B、C、D、E共面,则 A、B、C、D、E 五点一定共面吗?

错解:A、B、C、D、E 一定共面.

$\because A$、B、C、D 共面,

$\therefore$ 点 A 在点 B、C、D 所确定的平面内.

$\because$ 点 B、C、D、E 共面,

$\therefore$ 点 E 也在 B、C、D 所确定的平面内.

$\therefore$ 点 A、E 都在点 B、C、D 所确定的平面内,

即点 A、B、C、D、E 一定共面.

思维点拨:共面问题的证明,常分两步:(1)确定平面;(2)证明元素在确定的平面内.此题必须注意到平面是确定的,上述错解中,由于没有注意到 B、C、D三点不一定确定平面,即默认了 B、C、D 三点一定不共线,因而出错.

正解:A、B、C、D、E 五点不一定共面.

(1)当 B、C、D 三点不共线时,由公理 3 可知 B、C、D三点确定一个平面 α,由题设知 $A\in\alpha$,$E\in\alpha$,故 A、B、C、D、E 五点共面于 α;

(2)当 B、C、D 三点共线时,设共线于 l,若 $A\in l$,$E\in l$,则 A、B、C、D、E 五点共面;若 A、E 有且只有一点在 l 上,则 A、B、C、D、E 五点共面;若 A、E

都不在 l 上,则 $A、B、C、D、E$ 五点可能不共面.

综上所述,在题设条件下,$A、B、C、D、E$ 五点不一定共面.

指点迷津:若 $A、E$ 都不在 l 上($B、C、D$ 共线于 l)时,则 AE 的连线与 l 相交或平行时,由公理 3 的推论可知 $A、B、C、D、E$ 五点共面;若 AE 与 l 不相交也不平行时,通过以后的学习我们将会知道 AE 与 l 是异面直线,此时 $A、B、C、D、E$ 一定不共面.

二、易忽略点

■忽视对符号语言的深刻理解而对"$\in$""$\subsetneqq$"滥用,必须学会运用集合的观点准确使用这两个符号

例 4 若点 M 在直线 a 上,a 在平面 α 内,则 $M、a、\alpha$ 间的上述关系的集合表示可记作(　　)

A. $M\in a\in\alpha$　　B. $M\in a\subsetneqq\alpha$

C. $M\subsetneqq a\subsetneqq\alpha$　　D. $M\subsetneqq a\in\alpha$

思维点拨:$A、C、D$ 都错在"$\in$"、"$\subsetneqq$"符号的使用上,点与直线关系只能用"$\in$"或"$\notin$",直线与平面的关系只能用"$\subsetneqq$"或"$\not\subseteq$". 故选 B.

指点迷津:本题主要考查了点、直线及平面之间关系的符号运用,学生在做题时特别要注意这一点,不能出错.

多维高效解题

[思维迁移]

■1. 一题多解

例 1 如图 9-1-17,直线 $a/\!/b/\!/c$,直线 l 分别交 $a、b、c$ 于点 $A、B、C$. 求证:四条直线 $a、b、c、l$ 共面.

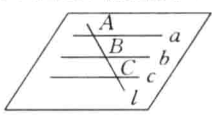


图 9-1-17

思维点拨:证明共面问题主要依据是公理 3 及其推论,由此入手进行思考,发掘解题方法.

证法 1:$\because a/\!/b,\therefore a,b$ 确定一个平面 α.

$\because A\in a,B\in b,\therefore A\in\alpha,B\in\alpha.\therefore l\subset\alpha$.

$\because C\in l,\therefore C\in\alpha.\therefore a$ 与 C 同在 α 内.

又 $a/\!/c$,$\therefore$ 直线 $a、c$ 确定一个平面 β.

$\because$ 点 $C\in c,c\subset\beta$,则点 $C\in\beta$,即平面 β 也是直线 a 和点 C 确定的平面.

$\therefore$ 平面 α 和平面 β 重合,因此 $c\subset\alpha$.

$\therefore a,b,c,l$ 共面.

证法 2:由证法 1 得,a,b,l 共面于 α,即 b 在 $a、l$ 确定的平面内.

同理可证 c 在 $a、l$ 确定的平面内.

$\because$ 过 a 与 l 只能确定一个平面,

$\therefore a,b,c,l$ 共面于 $a、l$ 确定的平面.

评注:证明共面的方法有:(1)先根据公理 3 及其推论确定一个平面,再证明有关的点、线在此平面内;(2)过有关的点、线分别确定一个平面,然后再证明这些平面重合;(3)反证法.

■2. 一题多变

例 2 如图9-1-18,已知空间四边形(四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形)$ABCD$,平面四边形 $EFGH$ 的顶点分别在空间四边形的各边上,若 EF 与 GH 不平行,求证:直线 $EF、GH、BD$ 共点.

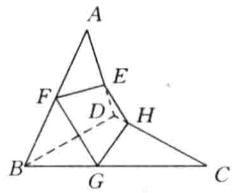


图 9-1-18

思维点拨:这是三线共点问题的证明,一般先证明某两条直线相交,再证明交点在第三条直线上,由公理 2,可以证明交点在过第三条直线的两个平面上.

证明:$\left.\begin{array}{l}EF、GH\subsetneqq \text{面} EFGH\\ EF\not\parallel GH\end{array}\right\}$

$\Rightarrow EF$ 与 GH 相交.

设 $EF\cap GH=P$,连结 BD.　①

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}EF\subsetneqq\text{面} ABD\\ P\in EF\end{array}\right\}\Rightarrow P\in\text{面} ABD\\ \text{同理 } P\in\text{面} CBD\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow P\text{ 是面 } ABD \text{ 与面 } CBD \text{ 的公共点}\\ \text{面} ABD\cap\text{面} CBD=BD\end{array}\right\}$

$\Rightarrow P\in BD$.　②

由①②可知 $EF、GH、BD$ 共点.

评注:点共线问题和线共点问题,其实质都是公理 2 的应用. 无论什么问题的证明,推理必须严谨、完整、有条理、有根据.

变式:四边形 $ABCD$ 为空间四边形,$E、H$ 分别是 $AB、AD$ 的中点,$F、G$ 分别是 $CB、CD$ 上的点,且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$.

(1)求证:四边形 $EFGH$ 是梯形;

(2)延长 $FE、GH$ 交于点 P,求证:$P、A、C$ 三点共线.

思维点拨:在空间中,证明点共线的问题,常转化为证明点在直线上,而证明点在直线上,可设法找到两个平面,使该直线是这两个平面的交线,再证明该点是这两个平面的公共点,由公理 2 知,两个平面的公共点必然在这两个平面的公共直线上.

证明:(1)$\because EH$ 是$\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore EH/\!/BD$.

又$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$,

$\therefore FG/\!/BD,\therefore EH/\!/FG$.

又 $EH=\frac{1}{2}BD,FG=\frac{2}{3}BD$,

$\therefore EH\neq FG,\therefore EFGH$ 是梯形.

(2)如图 9-1-19 所示,平面 ABC 与平面 ADC

交于直线 AC，P 为直线 EF 与直线 GH 的交点.

∵ $P\in EF$，$EF\subsetneqq$ 平面 ABC，∴ $P\in$ 平面 ABC.

又 $P\in GH$，$GH\subsetneqq$ 平面 ACD，故 $P\in$ 平面 ACD.

∴ P 必在两平面的交线 AC 上，即 P、A、C 三点共线.

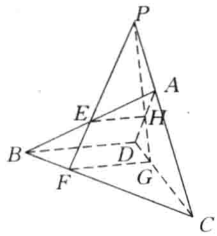


图 9-1-19

■3. 难题巧解

例 3 如图 9-1-20，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 A_1C 和平面 BDC_1 交于 O 点，AC、BD 交于 M 点.

求证：C_1、O、M 三点共线.

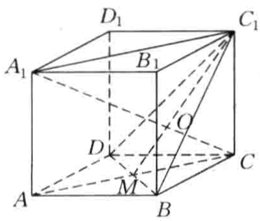


图 9-1-20

证明：连结 C_1M，

则面 $A_1ACC_1\cap$ 面 $BC_1D=MC_1$.

∵ $A_1C\cap$ 面 $BDC_1=O$，

∴ $O\in A_1C$，∴ $O\in$ 面 A_1ACC_1，

又 $O\in$ 面 BDC_1，∴ $O\in MC_1$，

∴ C_1、O、M 三点共线.

> **评注：**在空间中证点共线，常转化为证点在两个平面的交线上.

[创新探究]

■1. 学科综合题

例 1 空间六个点，其中任何三点都不共线，任何四点都不共面，在每两点间连起直线段后，将每一条这样的线段涂上红色或蓝色中的任一种. 试证：不论如何涂色，一定有一个三角形它的三条边有相同的颜色.

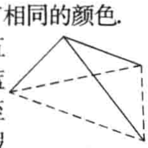


图 9-1-21

证明：从任一点出发到其余五个点，共有五条直线，分别涂红蓝两种颜色，根据抽屉原理，其中至少有三条线段染有相同的颜色，假如是红色，把这三条由一点出发具有相同颜色的线段的另外三个端点两两连结起来，就组成一个三角形，如图 9-1-21 中虚线所示，如果这虚线三角形的三条边是由两种颜色组成，其中至少有一条红边与两条实线组成一个红边三角形；如果这三条虚线中一条红边也没有，那么三条虚线本身就组成一个蓝边三角形. 因此，无论如何涂色，一定存在一个三角形，它的三条边有相同的颜色.

> **评注：**此类问题的研究必须以一个顶点为基准点去进行研究，使问题的研究有一定的程序性.

■2. 开放题

例 2 空间交于 1 点的 4 条直线最多可以确定的平面数是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

解：确定最多平面的情况应是每 2 条直线所确定的平面都不重合，这样若把 4 条直线依次编号，则相邻 2 个号码（1 与 4 也看成相邻）共确定 4 个平面，而相对 2 个号码共确定 2 个平面，故选 C.

■3. 探究题

例 3 已知 $\alpha\cap\beta=a$，直线 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，且 $a\cap m=M$，$a\cap n=N$，M、N 不重合，问 m 与 n 能否平行？证明你的结论.

解：不平行.

证明：假设 $m/\!/n$，则 m、n 可确定平面 γ，由于 γ 过直线 m 和点 N，又因为过点 N 与 m 的平面有且只有一个，所以 γ 与 α 重合，同理 γ 与 β 重合，故 α 与 β 重合，这与已知 $\alpha\cap\beta=a$ 矛盾，故 $m\not/\!/ n$.

> **评注：**反证法是证明几何题的一种常用方法，要切实掌握好反证法的步骤.

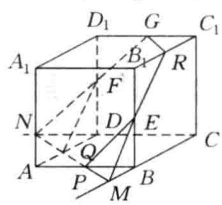
[链接高考]

例 （2005 年全国高考题）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点，那么正方体的过 P、Q、R 的截面图形是（　　）

A. 三角形　　B. 四边形

C. 五边形　　D. 六边形

解：如图 9-1-22，作 $RG/\!/PQ$ 交 C_1D_1 于 G，



9-1-22

连结 QP 与 CB 交于 M，连结 MR 交 BB_1 于 E，连结 PE、RE 为截面的部分外形.

同理连 PQ 交 CD 于 N，

连 NG 交 DD_1 于 F，连 QF、FG.

∴ 截面 $PQFGRE$ 为六边形. ∴ 应选 D.

> **评注：**截面形状，一般由公理 3 及推论先确定一个平面，再由公理 1、2 确定交线，从而做出截面图形.

限时高效训练

[基本知识技能题]

(限时30分钟,满分40分)

一、选择题(本大题共5小题,每小题5分,共25分)

1. 点P在直线l上,直线l在平面β内,可记为(　　)

   A. $P\subset l, l\subset\beta$　　B. $P\in l, l\subset\beta$

   C. $P\in l, l\in\beta$　　D. $P\subset l, l\in\beta$

2. 下列说法中正确的是(　　)

   A. 空间的三个点确定一个平面

   B. 四边形一定是平面图形

   C. 梯形一定是平面图形

   D. 六边形一定是平面图形

3. 三条平行直线所确定的平面个数是(　　)

   A. 三个　B. 两个　C. 一个　D. 一个或三个

4. 四条直线相交于一点,它们能确定的平面个数为(　　)

   A. 1　B. 4　C. 6　D. 1或4或6

5. 已知$\triangle ABC$的平面直观图$\triangle A'B'C'$是边长为a的正三角形,那么原三角形ABC的面积为(　　)

   A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$　D. $\sqrt{3}a^2$

二、填空题(本大题共3小题,每小题5分,共15分)

6. 设平面α与平面β交于直线l,$A\in\alpha$,$B\in\alpha$,且$AB\cap l=C$,则$AB\cap\beta=$________.

7. 对于命题:$\left.\begin{matrix}\text{直线 } a\cap\text{直线 } b=P\\ a\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\in\alpha$,用文字语言可叙述为____________.

8. 空间不全共线的四个点确定________个平面.

[综合应用创新题]

(限时45分钟,满分60分)

一、选择题(本大题共3小题,每小题5分,共15分)

1. (学科内综合题)下列命题中真命题的个数是(　　)

   ①若四个点不共面,则它们中任何三点都不在同一直线上;

   ②四边相等的四边形是菱形;

   ③如果两个平面有三个公共点,那么这两个平面一定重合;

   ④一组对边平行且相等的四边形一定是平行四边形.

   A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

2. 空间四点中"三点共线"是四点"共面"的(　　)

   A. 充分不必要条件

   B. 必要不充分条件

   C. 充分必要条件

   D. 既不充分也不必要条件

3. (自主探究题)直线$l_1/\!/l_2$,在l_1上取3点,在l_2上取2点,由这5点能确定的平面的个数是(　　)

   A. 9　B. 6　C. 3　D. 1

二、填空题(本大题共3小题,每小题5分,共15分)

4. 若$\alpha\cap\beta=c$,$a\subsetneqq\alpha$,$b\subsetneqq\beta$,$a\cap b=P$,则P________c(用$\in,\notin,\subsetneqq,\not\subset$填空).

5. 下列命题:

   ①公理1可用集合符号叙述为:若$A\in l$,$B\in l$,且$A\in\alpha$,$B\in\alpha$,则必有$l\in\alpha$;

   ②四边形的两条对角线必相交于一点;

   ③用平行四边形表示的平面,以平行四边形的四条边作为平面边界线;

   ④梯形是平面图形.

   其中正确的命题为____________.

6. 四边形$ABCD$中,$AB=BC=CD=DA=BD=1$,若成为空间四面体时,AC的取值范围是________.

三、解答题(本大题共3小题,共30分)

7. (创新应用题)(10分)如图9-1-23,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,E、F分别为CC_1和AA_1的中点,画出平面BED_1F与平面$ABCD$的交线,并证明.

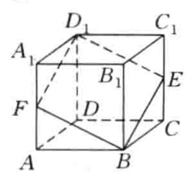


图9-1-23

8. (自主探究题)(10分)两个不全等的三角形不在同一平面内,它们的边两两对应平行.求证:(1)三条对应顶点的连线交于一点;(2)这两个三角形相似.

9. (10分)如图9-1-24,正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,E为AB的中点,F为AA_1的中点.

   求证:(1)E、C、D_1、F四点共面;

   (2)CE、D_1F、DA三线共点.

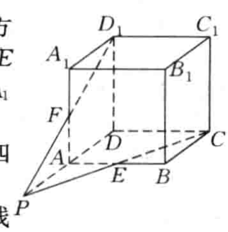


图9-1-24

9.2 空间的平行直线与异面直线

课前高效准备

1. 掌握公理4的意义及空间四边形的概念,能正确运用公理4判断两直线平行,帮助学生发展空

间想象能力.

2. 理解异面直线的定义,会用反证法证明两条直线异面;理解异面直线所成的角的概念,掌握求异面直线所成角的方法.

课堂高效探究

[重难点高效突破]

1. 证明空间两条直线互相平行

解读: 证明空间两条直线平行,纵观全书可有五种方法,到本节为止,可有两种证明空间两条直线平行的方法.

(1)用定义证明两条直线平行,需证两个方面:一是两直线在同一平面内,二是两直线没有公共点.

(2)用公理 4 证明两条直线平行,只需证一件事:就是需找到直线 c,使得 $a\parallel c$,同时 $b\parallel c$,由公理 4 得到 $a\parallel b$.

思维突破: (1)公理 4 给出空间两条直线平行的一种证明方法.

(2)公理 4 的重要作用是应用它证明等角定理及其推论,为下一步研究异面直线打基础.

例 1 如图 9-2-1,E,F 分别是长方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的棱 A_1A,C_1C 的中点,求证:四边形 B_1EDF 是平行四边形.

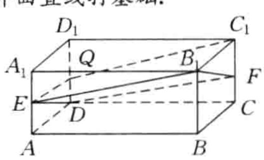


图 9-2-1

思维主线: 平行四边形是平面图形,若能证得四边形的一组对边平行且相等,那么这个四边形就是平行四边形.

证明: 设 Q 是 DD_1 的中点,连结 EQ,QC_1.

∵ E 是 AA_1 的中点,∴ $EQ \mathrel{\underline{\parallel}} A_1D_1$.

又 $A_1D_1 \mathrel{\underline{\parallel}} B_1C_1$,

∴ $EQ \mathrel{\underline{\parallel}} B_1C_1$(平行公理),

∴ 四边形 EQC_1B_1 为平行四边形,

∴ $B_1E \mathrel{\underline{\parallel}} C_1Q$.

又 Q、F 是矩形 DD_1C_1C 的两边中点,

∴ $QD \mathrel{\underline{\parallel}} C_1F$,

∴ 四边形 DQC_1F 为平行四边形,

∴ $C_1Q \mathrel{\underline{\parallel}} DF$.

又 $B_1E \mathrel{\underline{\parallel}} C_1Q$,∴ $B_1E \mathrel{\underline{\parallel}} DF$,

∴ 四边形 B_1EDF 为平行四边形.

规律技巧妙法总结: 公理 4 是我们证明分别在两个平面的两条直线平行的常用定理.

2. 异面直线的判定定理

解读: 连结过平面外一点与平面内一点的直线,和平面内不经过该点的直线是异面直线.

思维突破: 用该定理证明时,必须阐述出定理满足的条件:$a\subsetneqq\alpha$,$A\notin\alpha$,$B\in\alpha$,$B\notin a$,然后可以推导出 a 与 AB 是异面直线.

例 2 已知空间四边形 $ABCD$,求证它的对角线 AC 和 BD 是异面直线.

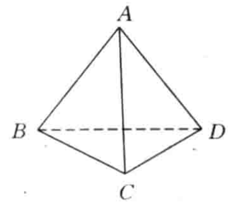


图 9-2-2

思维主线: 利用异面直线的判定定理.

证明: 过 BC 和 CD 作一平面 α,则对角线 BD 在平面 α 内.

对角线 AC 与平面 α 交于 BD 外的一点 C,即点 C 不在直线 BD 上,且 A 点在平面 α 外.

∴ 根据异面直线判定定理知 AC 和 BD 是异面直线.

规律技巧妙法总结: 判定两条直线是否为异面直线时常用此定理,但要注意选择好基础面.

3. 反证法

解读: 所谓反证法就是证明原命题的等价命题——逆否命题,从而间接地证明原命题正确.

反证法证题的一般步骤是:假设结论的反面成立. 据理推出矛盾,从而断定原结论正确.

如果结论的反面情况只有一种,则只需将此否定驳倒即可达到反证的目的,这种比较单纯的反证法称为归谬法. 如果结论的反面情况不只一种,则必须将其逐一驳倒,才能推出命题结论正确.

由平面的基本性质中公理 3 的推论 1 知:经过一条直线及其直线外的一点,有且只有一个平面. 因此,经过直线 a 及空间不在 a 上的一点 O,可确定一个平面 α. 在平面 α 内,过点 O 作 $a'\parallel a$. 这样的直线 a' 就是过直线 a 外一点,平行于直线 a 的直线.

思维突破: 反证法是证明否定命题的基本方法,在立体几何中,下面三类问题常用反证法.

(1)直接利用公理、定义证题,即在尚未建立有关定理作为依据的情况下证题;

(2)证明某些唯一性结论的命题;

(3)所证结论是一种否定性命题.

例 3 已知两直线 a,b 是异面直线,a 上有两点 A、C,b 上有两点 B、D,求证:AB 和 CD 是异面直线.

思维主线: 证明两直线 AB、CD 异面,其实质是证明使 $AB\subset\alpha$,$CD\subset\alpha$ 的平面 α 不存在.

证明: 假如 AB 和 CD 不是异面直线,则 AB、CD 共面.

设 $AB\subset\alpha$、$CD\subset\alpha$,则 $A\in\alpha$,$C\in\alpha$,

又 $A\in a$,$C\in a$,

∴ $AC\subset\alpha$ 即 $a\subset\alpha$,

同理 $b\subset\alpha$,

这与 a、b 异面矛盾.

故假设不成立，则直线 AB 和 CD 是异面直线.

规律技巧妙法总结：反证法证明过程一般有如下几个步骤：

(1)反设：作出与命题结论相反的假设.

(2)归谬：将反设和条件进行推理，得出矛盾.

(3)结论：肯定原命题正确.

4. 异面直线所成的角

解读：定义：过空间任意一点 O，作与异面直线 a 和 b 分别平行的直线所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角(或夹角).

①由于点 O 是任意的，这样作出的角有无数多个，由等角定理可知，这无数个锐角(或直角)都相等；

②两条异面直线所成角的大小，是由这两条异面直线的相对位置决定的，与点 O 的位置选取无关；

③两条异面直线所成的角 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$；

④因为点 O 可以任意选取，这就给我们找出两条异面直线所成的角带来了方便，具体运用时，为了简便，我们可以把点 O 选在两条异面直线的某一条上，特别是这一直线的某些特殊点，例如线段的"端点"或"中点"处；

⑤找两条异面直线所成的角，要作平行移动(作平行线)，把两条异面直线所成的角转化为两条相交直线所成的角，求异面直线所成的角的基本步骤是"找—证—求"；

⑥当两条异面直线所成的角是直角时，我们就说这两条异面直线互相垂直，异面直线 a 和 b 互相垂直，也记作 $a\perp b$；

⑦以后我们说两条直线互相垂直，这两条直线可能是相交的，也可能是不相交的，即有共面垂直，也有异面垂直这样两种情形.

下面通过举例进行阐释：

(1)两条异面直线所成的角，是借用平面几何中的角的概念予以定义的，是研究空间两条直线的基础.

(2)"等角定理"为两条异面直线所成的角的定义提供了可能性与唯一性，即过空间任一点，引两条直线分别平行于两条异面直线，那么它们所成的锐角(或直角)都是相等的，而与所取点的位置无关.

例 4 如图 9-2-3，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角.

解：∵ 过点 C 的直线 $BC/\!/B_1C_1$，

∴ 异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角，即为相交直线 AC 与 BC 所成的角，并且易知 AC 与 BC 所成的角为 $45°$. 因此，也可知异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角为 $45°$.

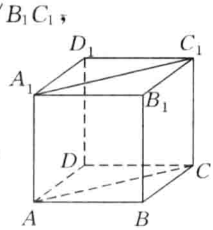


图 9-2-3

另外，∵ 过点 C_1 的直线 $A_1C_1/\!/AC$，∴ 异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角，即为相交直线 A_1C_1 与 B_1C_1 所成的角，并且易知 A_1C_1 与 B_1C_1 所成的角为 $45°$. 因此，可知异面直线 AC 与 B_1C_1 所成的角的大小为 $45°$.

(3)若两条异面直线所成的角为直角，就说这两条异面直线互相垂直.

例 5 如图 9-2-4，已知在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp CD$，$AB=4$，$CD=4\sqrt{3}$，M、N 分别为对角线 AC、BD 的中点，求 MN 与 AB、CD 所成的角.

解：取 BC 的中点 P，连结 PM、PN.

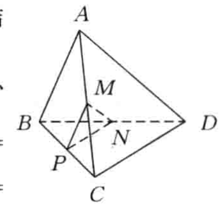


图 9-2-4

∵ PM、PN 分别是△ABC、△BCD 的中位线，

∴ $PN/\!/CD$，且 $PN=\frac{1}{2}CD$，$PM/\!/AB$，且 $PM=\frac{1}{2}AB$，

∴ $PN=2\sqrt{3}$，$PM=2$，且∠PMN、∠PNM 分别是 MN 与 AB、CD 所成的角或其补角，∠MPN 是异面直线 AB、CD 所成的角或其补角，

∵ $AB\perp CD$，∴ $\angle MPN=90°$.

∵ $\tan\angle PMN=\frac{PN}{PM}=\sqrt{3}$，

∴ $\angle PMN=60°$，$\angle PNM=30°$.

∴ MN 和 AB 所成的角为 $60°$，MN 和 CD 所成的角为 $30°$.

(4)寻找两条异面直线 a，b 所成的角时，要经过空间任意一点 O，分别引 $a'/\!/a$，$b'/\!/b$. 这里涉及经过空间任意一点如何引平行线的问题.

由平面的基本性质中公理 3 的推论 1 知：经过一条直线及直线外的一点，有且只有一个平面. 因此，经过直线 a 及空间不在 a 上的一点 O 可确定一个平面 α. 在平面 α 内，过点 O 作 $a'/\!/a$. 这样的直线 a' 就是过直线 a 外一点，平行于直线 a 的直线.

例 6 (1)如图 9-2-5，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，寻找异面直线 A_1C_1 与 BC 所成的角.

解：在平面 $ABCD$ 中，$A\notin BC$，连结 AC，可以证明 $AC/\!/A_1C_1$，∴ AC 与 BC 所成的角即为异面直线 A_1C_1 与 BC 所成的角.

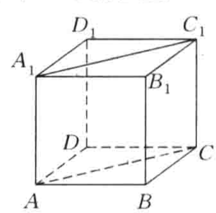


图 9-2-5

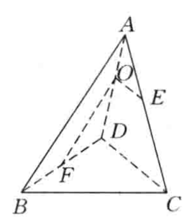


图 9-2-6

(2)如图 9-2-6，在空间四边形 $ABCD$ 中，寻找异面直线 AB 与 CD 所成的角.

解：取 AD 的中点 O，

∵ $O\in$ 平面 ADC，$CD\subsetneq$ 平面 ADC，且 $O\notin CD$，

∴ 在平面 ADC 内过 O 作 $OE/\!/CD$，交 AC 于 E，易知 E 为 AC 的中点.

又 $O\in$ 平面 ABD，$AB\subsetneqq$ 平面 ABD，且 $O\notin AB$，

∴ 在平面 ABD 内过 O 作 $OF\parallel AB$ 交 BD 于 F，易知 F 为 BD 的中点.

∵ $OF\parallel AB$，$OE\parallel CD$，

∴ OE 与 OF 所成的角即为异面直线 AB 与 CD 所成的角或其补角.

规律技巧妙法总结：求异面直线所成的角的基本法则是："作平行线，构成三角形."作平行线的目的是为了将异面直线所成的角转化成一个平面内的角. 构造三角形的目的是通过解三角形求角.

(1)平移方法一般有以下三种：直接平移法、中位线平移法、补形平移法.

(2)平移直线寻找两条异面直线所成角的过程中，线的平移是在某个平面中进行的，该面的特点：①该平面包含其中一条异面直线，②该平面与另一条异面直线相交.

(3)求角或求角的三角函数值的一般步骤是：①找角，②求角或求角的三角函数值.

例 7 已知棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 点是 BC 的中点，求 A_1C 与 DE 所成角的余弦值.

思维主线：将正方体扩形为长方体再平移.

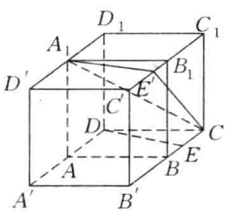


图 9-2-7

解：如图 9-2-7，以 AB 为棱再造一正方体 $A'B'BA-D'C'B_1A_1$. 选取 $C'B_1$ 中点 E'，连结 A_1E'、CE'. 则 $A_1E'\parallel DE$，于是 $\angle E'A_1C$ 为异面直线 A_1C 与 DE 所成的角.

∵ $A_1E'=\sqrt{A_1B_1^2+B_1E'^2}$

$=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

$CE'=\sqrt{CC_1^2+C_1E'^2}$

$=\sqrt{a^2+\left(a+\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}a$.

$A_1C=\sqrt{3}a$.

∴ 在 $\triangle E'A_1C$ 中，据余弦定理有

$$\cos\angle E'A_1C=\frac{E'A_1^2+CA_1^2-E'C^2}{2\cdot E'A_1\cdot CA_1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2+(\sqrt{3}a)^2-\left(\frac{\sqrt{13}a}{2}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{5}a}{2}\times\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

规律技巧妙法总结：采用补形法来求异面直线所成角也是经常用到的数学方法.

[易错点高效突破]

一、易错点

1. 异面直线所成角的范围：异面直线所成的角的范围 $(0°,90°]$，我们通过引平行线构造三角形解角时，若为锐角或直角，它就是异面直线所成的角；若为钝角，则它的补角才是异面直线所成角，此点若不注意，极易造成错误

例 1 空间四边形 $ABCD$ 中，若 M、N 分别为对角线 BD、AC 的中点，$AB=CD=2$，$MN=\sqrt{3}$，求 AB 和 CD 所成角的大小.

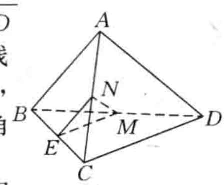


图 9-2-8

解：如图 9-2-8，取 BC 的中点 E，连 ME，NE，

∴ $ME\parallel CD$，$NE\parallel AB$.

∴ 直线 ME、NE 所成的角就是异面直线 AB 和 CD 所成的角.

在 $\triangle NEM$ 中，

$\cos\angle NEM=\frac{NE^2+ME^2-MN^2}{2NE\cdot ME}=-\frac{1}{2}$，

∴ $\angle NEM=120°$.

∴ AB 和 CD 所成的角为 $60°$.

指点迷津：此题有两点需注意：一是 $\angle NEM=120°$ 为钝角，它的补角为所求；二是要说明异面直线所成的角，有必要的文字说明.

2. 立体几何中的计数问题，是由所数的量的性质确定一规律，然后按规律计数，避免盲目乱数，做到"不重不漏"

例 2 如果两条异面直线称作"一对"，那么在正方体的十二条线棱中，共有几对异面直线(　　)

A. 12 对　　B. 24 对

C. 36 对　　D. 48 对

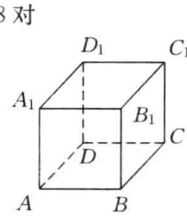


图 9-2-9

解：正方体中与 AB 异面的有 C_1C，D_1D，B_1C_1，A_1D_1，

∵ 各棱具有相同的位置关系，且正方体有 12 条棱，排除两棱的重复计算，

∴ 异面直线共有 $\frac{12\times4}{2}=24$(对).

指点迷津：分析清楚几何体的特点是避免重复计数的关键，以一条棱为基量，考查与其异面的对数.

二、易忽略点

利用等角定理时，要注意方向相同这一条件. 如果没有这一条件，需分类讨论，防止漏解

例 3 $\angle B$ 与 $\angle A$ 的两边分别平行，若 $\angle A=60°$，求 $\angle B$.