# 绝对值方程

# Absolute Value Equation

雍龙泉　著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

# 绝对值方程

# Absolute Value Equation

雍龙泉 著

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

绝对值方程等价于一个不可微的优化问题，其研究来源于两个方面：区间线性方程与线性互补问题. 本书针对存在唯一解的绝对值方程，给出了一些求解算法；针对存在多个解的绝对值方程，研究了解的结构，并给出了相应的算法. 本书丰富了绝对值方程的研究成果.

本书主要面向从事应用数学、运筹学、计算数学的科研人员使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

绝对值方程／雍龙泉著. －北京：国防工业出版社，2015.2
ISBN 978-7-118-09770-2

Ⅰ.①绝… Ⅱ.①雍… Ⅲ.①绝对值－方程－研究 Ⅳ.①O122.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 218947 号

※

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
新华书店经售

*

**开本** 710×1000 1/16 **印张** 9½ **字数** 175 千字
2015 年 2 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—2000 册 **定价** 48.00 元



国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

# 前　　言

绝对值方程等价于一个不可微的优化问题，其研究来源于两个方面：区间线性方程与线性互补问题. 目前，对于绝对值方程的研究主要集中在理论与算法两个方面，前者主要研究解的存在性和唯一性，而后者主要是建立有效的算法并进行相应的收敛性分析.

本书针对存在唯一解的绝对值方程，给出了一些求解算法；针对存在多个解的绝对值方程，研究了解的结构，并给出了相应的算法.

主要工作概括如下：

(1) 研究了绝对值方程解的存在性条件，分别给出了存在唯一解与存在 $2^n$ 个解的充分条件. 研究了绝对值方程与线性互补、绝对值方程与微分方程边值问题之间的转化关系.

(2) 针对存在唯一解的绝对值方程，给出了两种求解算法：严格可行内点算法与势下降内点算法，分析了算法的收敛性，并给出了数值实验.

(3) 分别构造了绝对值函数的上方一致逼近光滑函数与下方一致逼近光滑函数，进而把绝对值方程转化为光滑优化问题，采用光滑牛顿法进行求解，分别研究了算法的收敛性，并给出了数值实验

(4) 把绝对值方程转化为不动点问题，给出了一个迭代算法，证明了算法的收敛性，并应用于求解二阶线性常微分方程两点边值问题.

(5) 研究了一类具有 $2^n$ 个解的绝对值方程，提出了一个计算 $2^n$ 个解的方法，指出了求解多解绝对值方程应该注意的问题.

(6) 提出了基于差分算子的和声搜索算法，分析了算法的种群多样性，并应用于求解绝对值方程；其次给出了两个改进的和声搜索算法：最坏最好和声搜索与全局和声搜索，进而应用于求解绝对值方程；最后借助于聚类的思想，提出了带有聚类的和声搜索算法，并应用于求解具有 $2^n$ 个解的绝对值方程.

感谢国家自然科学基金项目(11401357)和陕西省教育厅专项科研计划项目(12JK0863)对本研究的资助. 感谢陕西理工学院对我多年研究工作的资

助，感谢我的妻子对我工作的支持，感谢所有关心我、支持我的朋友和同事.

由于作者水平有限，不足之处敬请各位专家和读者批评指正！

雍龙泉

2015 年 1 月 23 日

# 目　录

# 第1章 绪 论

本章从绝对值方程的例子出发,引出绝对值方程的研究内容;给出了正定矩阵、奇异值、线性互补问题的定义;介绍了绝对值方程解存在的条件、绝对值方程的研究进展;最后给出了本书的主要内容与结构安排.

## 1.1 绝对值方程

绝对值方程的一般形式为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^{n}$, $|\boldsymbol{x}|$表示对 $\boldsymbol{x}$ 的各个分量取绝对值, 该问题称为绝对值方程(Absolute Value Equation, AVE). 绝对值方程等价于一个不可微的 NP-hard 优化问题.

绝对值方程的研究来源于两个方面, 一个是区间线性方程[1](区间线性方程是指方程的系数和常数项不是已知确定的, 而是位于某一区间内, 且方程个数与未知量个数相等); 另一个来源是线性互补问题[2](线性互补问题是一类具有广泛实际应用背景的优化问题, 它为线性规划、二次规划提供了一个统一研究的框架), 对于任意的线性互补问题均可将其转化为绝对值方程, 而绝对值方程又具有简单而特殊的结构, 所以关于绝对值方程的求解便引起了众多学者的关注.

下面给出绝对值方程的几个算例.

**算例 1.1.1** 考虑如下绝对值方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{b}$, 这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}50 & 2\\ 3 & 60\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-49\\ 56\end{bmatrix}.$$

计算可得 $\boldsymbol{x}^*=[-1,1]^{\mathrm{T}}$ 是此问题的唯一解.

**算例 1.1.2** 考虑如下绝对值方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{b}$, 这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1.780 & 0.563\\ 1.913 & 0.659\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0.217\\ 0.254\end{bmatrix},$$

分 4 种情况求解:

① 当 $x_1>0, x_2>0$ 时, 求解得到 $\boldsymbol{x}^1=\begin{bmatrix}0.1616\\ 0.1616\end{bmatrix}$;

② 当 $x_1>0, x_2<0$ 时，求解得到 $\boldsymbol{x}^2=\begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix}$；

③ 当 $x_1<0, x_2>0$ 时，求解得到 $\boldsymbol{x}^3=\begin{bmatrix} 0.1072 \\ -0.1437 \end{bmatrix}$(矛盾解，舍去)；

④当 $x_1<0, x_2<0$ 时，求解得到 $\boldsymbol{x}^4=\begin{bmatrix} 0.0614 \\ 0.0823 \end{bmatrix}$(矛盾解，舍去)；

因此，该问题具有 2 个解：

$$\boldsymbol{x}^1=\begin{bmatrix} 0.1616 \\ 0.1616 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^2=\begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix}.$$

**算例 1.1.3** 考虑如下绝对值方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{b}$，这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.02 \\ 0.2 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

计算可得该问题存在如下 4 个解：

$$\boldsymbol{x}^1=\begin{bmatrix} 1.1612 \\ 2.2548 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^2=\begin{bmatrix} 1.0624 \\ -2.1906 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}^3=\begin{bmatrix} -0.9424 \\ 1.8298 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^4=\begin{bmatrix} -0.8762 \\ -1.8067 \end{bmatrix}.$$

**算例 1.1.4** 考虑如下绝对值方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{b}$，这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

容易验证该问题无解.

此外，若令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则任意 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$都是 AVE 问题的解，此时 AVE 问题具有无穷多个解.

综合上面几个例子，绝对值方程需要研究如下问题：

(1) AVE 问题在什么条件下存在唯一解;什么条件下存在多个解;什么条件下无解.

(2) 针对存在唯一解的 AVE 问题，建立有效的算法进行求解.

(3) 针对存在多个解的 AVE 问题，如何求出尽可能多的解.

目前对于绝对值方程的研究主要集中在理论与算法两个方面，前者主要研究其解的存在性和唯一性；而后者主要是建立有效的算法并进行相应的收敛性分析.

## 1.2 基本概念

**定义 1.2.1**[2] 矩阵 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 被称为半正定矩阵，如果对 $\forall z\in\mathbf{R}^n$，都有 $z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}z\geqslant 0$；$\boldsymbol{M}$ 被称为正定矩阵，如果对 $\forall z\in\mathbf{R}^n, z\neq\mathbf{0}$，都有 $z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}z>0$；这里定义的半正定矩阵与正定矩阵不限制对称性.

矩阵的奇异值在绝对值方程研究中至关重要，下面给出矩阵奇异值的定义.

**定义 1.2.2** [3] 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，记（半正定）矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i, i=1, 2,\cdots,n$，则称 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}, i=1,2,\cdots,n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值.

易见，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零奇异值的个数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；当 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵时，它的奇异值都是 0.

**算例 1.2.1** 考虑如下三对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=121\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2\end{bmatrix}_{10\times 10},$$

计算可得该矩阵的特征值为

$$\lambda_A=\begin{Bmatrix}-474.1973, & -445.5834, & -400.4763, & -342.5304, & -276.4402, \\ -207.5598, & -141.4696, & -83.5237, & -38.4166, & -9.8027\end{Bmatrix};$$

奇异值为

$$SVD(\boldsymbol{A})=\begin{Bmatrix}474.1973, & 445.5834, & 400.4763, & 342.5304, & 276.4402, \\ 207.5598, & 141.4696, & 83.5237, & 38.4166, & 9.8027\end{Bmatrix}.$$

显然，该矩阵的所有特征值都小于 1，但是所有奇异值却都大于 1.

若无特别说明，本书用 $\|\ \|$ 表示 2 范数，$\|\ \|_\infty$ 表示无穷范数，$\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，大写字母 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，即 $\boldsymbol{I}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{e})$.

**引理 1.2.1** 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有奇异值都大于 1，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|<1$.

**证明** 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值（即矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 特征值的非负平方根）为

$$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n>1,$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n)^2 > 1 \neq 0.$$

结合 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$，则有 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

又因为 $\|\boldsymbol{A}\| = \sigma_1$，$\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = \dfrac{1}{\sigma_n} < 1$；所以 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\| < 1$.

**定义 1.2.3** 线性互补问题：即求向量 $z \in \mathbf{R}^n$，满足

$$\boldsymbol{M}z + \boldsymbol{q} \geqslant \boldsymbol{0},\ z \geqslant \boldsymbol{0},\ z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}z + \boldsymbol{q}) = 0.$$

线性互补问题简记为 $LCP(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$.

当矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是半正定矩阵时，称 $LCP(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$ 为单调线性互补问题.

**引理 1.2.2** 设矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是一半正定矩阵，对于任意 $\boldsymbol{q} \in \mathbf{R}^n$，若 $LCP(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$ 是可行的，则 $LCP(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$ 必有解，且其解集为凸集.

**引理 1.2.3** 设矩阵 $\boldsymbol{M} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是一正定矩阵，则对于任意 $\boldsymbol{q} \in \mathbf{R}^n$，$LCP(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$ 有唯一解.

上述判定线性互补问题解存在的条件仅是充分条件，而非必要条件. 更多线性互补问题解存在的条件见文献[2].

## 1.3 绝对值方程解的存在性

绝对值方程从形式上看是一个线性方程组，本质上是一个不可微优化问题. 因此从方程与优化角度来进行研究，已有文献利用矩阵的一些特性(诸如矩阵的正则性，奇异值等)给出了绝对值方程解存在的条件[4]. Mangasarian O. L 给出了如下解存在的条件[5]：

① 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不为 1 并且 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值大于或等于 1，且集合

$$\{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}, (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}\} \neq \varnothing,$$

则 AVE 问题的解存在.

② 如果 $\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{0}$，$\|\boldsymbol{A}\| < 1$，$\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{0}$，则 AVE 存在非负解.

### 1.3.1 存在唯一解的条件

**引理 1.3.1**

① 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值大于 1，则对任意的 $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$，AVE 存在唯一解.

② 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\| < 1$，则对于任意的 $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$，AVE 存在唯一解.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值大于 1，则对任意的 $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$，AVE 存在唯一解. 该条件成为求解绝对值方的理论基础. 文献[6]指出：如果区间矩阵 $[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}]$ 是正

则的，那么对于任意的 $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$，AVE 有唯一解. 该条件弱于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值大于 1.

**算例 1.3.1** 考虑如下 AVE 问题，这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 11 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 12 & 1\\ 1 & 7 & 0 & 13\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}12\\15\\14\\20\end{bmatrix}.$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值($\boldsymbol{SVD}(\boldsymbol{A})=[17.4349, 12.2629, 9.6389, 7.5984]$)大于 1，因此该 AVE 问题存在唯一解，其解为 $\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 文献[7]中给出了更多具有唯一解的算例.

### 1.3.2 存在多个解的条件

Mangasarian O. L 给出具有 $2^n$ 个解的条件，文献[5]讲的较为抽象，文献[40]给出了详细的证明过程.

**定理 1.3.1** 如果 $\boldsymbol{b}<\boldsymbol{0}$ 且 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty<\gamma/2$，这里 $\gamma=\min_i|b_i|/\max_i|b_i|$，则 AVE 问题有 $2^n$ 个解，且 $2^n$ 个解可由公式 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{b}$ 分别计算出来，这里 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\pm1,\pm1,\cdots,\pm1)$.

**算例 1.3.2** 考虑如下 AVE 问题，这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.20 & 0.10 & & & \\ 0.10 & 0.20 & 0.10 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0.10 & 0.20 & 0.10\\ & & & 0.10 & 0.20\end{bmatrix}_{n\times n},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\\vdots\\-1\\-1\end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

此处矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为三对角矩阵. 由于 $\gamma=\min_i|b_i|/\max_i|b_i|=1$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=0.4<\gamma/2=1/2=0.5$，所以该问题具有 $2^n$ 个解. 当 $n=1$ 时，解为 2 个，分别是 1.25 和 $-5/6$；当 $n=2$ 时的解为 4 个，即 $\boldsymbol{x}^k=\boldsymbol{D}^k(\boldsymbol{AD}^k-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{b}, k=1,2,3,4$，这里

$$\boldsymbol{D}^1=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}^3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}^4=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}.$$

简单计算，得

$$\boldsymbol{x}^1=\begin{bmatrix}1.4286\\1.4286\end{bmatrix},\boldsymbol{x}^2=\begin{bmatrix}1.1340\\-0.9278\end{bmatrix},\boldsymbol{x}^3=\begin{bmatrix}-0.9278\\1.1340\end{bmatrix},\boldsymbol{x}^4=\begin{bmatrix}-0.7692\\-0.7692\end{bmatrix}.$$

下面给出一个无穷解的例子.

考虑 $\boldsymbol{Ax}-|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{b}$，若令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则任意 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 都是 AVE 问题的解，此

时 AVE 问题无穷个解.

### 1.3.3 无解的条件

Mangasarian O. L 在 2006 年给出了如下结果[5]:

① 对 AVE 问题，若存在 $\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^n$ 满足 $\boldsymbol{r}\geqslant\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\geqslant-\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}>0$, 则 AVE 无解.

② 若 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$, 且 $\|\boldsymbol{A}\|<1$, 则 AVE 无解.

③ 如果 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个元素大于零，且 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty<\bar{\gamma}/2$, 这里 $\bar{\gamma}=\max\limits_{b_i>0}b_i/\max\limits_i|b_i|$, 则 AVE 无解.

**算例 1.3.3** 考虑如下的 AVE 问题，这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}.$$

若选取 $\boldsymbol{r}=(4,6)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}=(6,8)^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}-\mathrm{r}=(-2,-4)^{\mathrm{T}}<\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}=2>0$,因此该 AVE 问题无解(满足无解的条件①).

**算例 1.3.4** 考虑如下 AVE 问题，这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.20 & 0.10 & & & \\ 0.10 & 0.20 & 0.10 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0.10 & 0.20 & 0.10\\ & & & 0.10 & 0.20\end{bmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ 1\end{bmatrix}_{n\times 1},$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 为三对角矩阵，$\bar{\gamma}=\max\limits_{b_i>0}b_i/\max\limits_i|b_i|=1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty=0.4<\bar{\gamma}/2=0.5$, 所以该问题无解. 事实上，此问题也满足 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$, 且 $\|\boldsymbol{A}\|<1$, 所以无解（即满足无解的条件②,也满足无解的条件③).

**算例 1.3.5** 考虑如下 AVE 问题[8]，这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}.$$

容易验证该问题无解;但是该问题既不满足无解的条件②, 也不满足无解的条件③.

下面从优化角度指出:求解绝对值方程等价于求解一个与其相关的无约束优化问题.

(1) 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称时，记 $\nabla f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|-\boldsymbol{b}$, 对 $\nabla f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|-\boldsymbol{b}$ 求积分，可得一个原函数

$$f(\boldsymbol{x})=\int(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|-\boldsymbol{b})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|-\boldsymbol{b})$$

**引理 1.3.2** 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称，则求解绝对值方程等价于求解无约束优化问题

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \triangleq \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}| - \boldsymbol{b})$$

的稳定点.

**证明** 设 $\boldsymbol{x}^*$ 为无约束优化问题的稳定点，则 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - |\boldsymbol{x}^*| - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

于是 $\boldsymbol{x}^*$ 为绝对值方程的解.

在此基础上，腾子祯给出求解绝对值方程的最速下降算法[9]. 进而，记 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\mathrm{sign}(\boldsymbol{x}))$，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}$，当矩阵 $\boldsymbol{C}$ 对称正定时，上述无约束优化问题的稳定点也是最小值点；在此基础上 Noor 等人给出了求解绝对值方程的迭代算法[10]，王炳闵给出了求解绝对值方程的一种下降算法[11].

（2）当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非对称时，可以通过求解如下无约束优化

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \triangleq \frac{1}{2}\|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}| - \boldsymbol{b})\|^2$$

来求解绝对值方程. 当目标函数值收敛到零，则达到最优解，也即绝对值方程的解；当目标函数值（无论如何也）收敛不到零，则原问题可能无解. 该方法对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有任何限制，因此该方法具有较强的实用性.

**引理 1.3.3** [5] 绝对值方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{0} \leqslant ((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \perp ((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \geqslant \boldsymbol{0}$.

## 1.4 绝对值方程研究进展

目前对于绝对值方程的研究主要集中在理论与算法两个方面，前者主要研究其解的存在性和唯一性，而后者主要是建立有效的算法并进行相应的收敛性分析.

### 1.4.1 理论研究现状

Mangasarian O. L 在 2006 年发表的文献[5]中指出 AVE 等价于双线性规划、广义线性互补问题，证明了当 1 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时，AVE 可以转化为线性互补问题；基于这些等价转化，文献中给出了绝对值方程有解、无解、唯一解、非负解及 $2^n$ 个解的充分条件等.

匹斯堡大学 Oleg Prokopyev 在 2009 年发表的文献[12]中给出在不需要任

何假设条件下把 AVE 转化为线性互补问题的一个方法，研究了 AVE 与混合整数规划之间的关系.

天津大学黄正海研究小组在 2010 年发表的文献[13]中也给出在无任何假设条件下把 AVE 转化为线性互补问题的一种方法，并且借助线性互补问题的研究结果，给出了 AVE 解的凸性.

Jiri Rohn 在近年发表的文献[14-15]中对 AVE 进行了研究，取得了较好的结果. 主要结果是：如果区间矩阵$[\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{B}|,\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{B}|]$正则，则对任意的$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$，绝对值矩阵方程$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{b}$存在唯一解.

北京交通大学魏庆举近年来也对绝对值方程有所研究，主要结论是：如果区间矩阵$[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}]$正则，那么对于任意的$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$，AVE 有唯一解[16]. 该条件弱于矩阵$\boldsymbol{A}$的奇异值大于 1. 事实上，该条件恰好是 Jiri Rohn 在文献[6]的特例，即取$\boldsymbol{B}$为单位矩阵$\boldsymbol{I}$的结果.

文献[17-18]也对绝对值方程解的存在性条件进行了归纳.

上面给出 AVE 迄今为止的理论研究结果，这些结果指出了解存在的条件. 是否还存在其他解存在的条件，这是目前研究的一个热点. 下一步应该考虑，能否用矩阵的正则性、函数的凸性、择一公理，以及例外簇，进一步研究绝对值方程解的存在性.

### 1.4.2 算法研究现状

Mangasarian O. L 在 2007 年发表的文献[19]中指出当 1 是矩阵$\boldsymbol{M}$的特征值时，对线性互补问题中的$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{q}$乘以某一正常数$\lambda$，使得 1 不再是矩阵$\lambda\boldsymbol{M}$的特征值(此时线性互补问题的解不变)，从而把线性互补问题转化为 AVE，并证明 AVE 是 NP-hard 问题；同时在该文中给出了 AVE 的最优性条件；并提出一个算法，通过用有限步的逐次线性化方法求解 AVE 的凹极小化等价再生形式，该方法在求解过程的每一步中求解一个线性规划问题并在满足最优性必要条件的点终止，从而得到 AVE 的一个局部解，并用数值实验检验了该算法的有效性.

Mangasarian O. L 在 2007 年发表的文献[20]中用更简洁的方式提出了求 AVE 的逐次线性化方法，并给出了该算法有限收敛性. 进而用数值实验检验了该算法的有效性.

Mangasarian O. L 在 2009 年发表的文献[21]中提出了求解 AVE 的广义牛顿法，该方法与逐次线性化方法相比极大地缩短了计算时间，根据算法的构造，证明了当矩阵$\boldsymbol{A}$的奇异值大于 1 时广义牛顿迭代步可行且有界. 但文章只在很严格的条件下($\|\boldsymbol{A}^{-1}\|<0.25$)给出了算法的全局线性收敛性.

匹斯堡大学 Oleg Prokopyev 在 2009 年发表的文献[12]中给出了求解 AVE 的混合整数规划法.

Jiri Rohn 在 2009 年发表的文献[6]中给出了求解 AVE 的一个方法：符号一致算法(Sign accord algorithm).

Zhang 和 Wei 在 2009 年发表的文献[22]中给出了当区间矩阵$[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}]$是正则时求解 AVE 的一个广义牛顿法，该算法结合了半光滑牛顿法和光滑牛顿法的特性，并研究了算法的全局收敛性.

Louis Caccetta 在 2010 年发表的文献[23]中给出了当矩阵$\boldsymbol{A}$的奇异值大于 1 时求解 AVE 的一个光滑牛顿法，该算法用一个光滑函数$\sqrt{x^2+\varepsilon^2}$逼近原问题中的不可微绝对值函数$|x|$，并证明了该光滑化算法在一定条件下具有二次收敛性. 这是目前有关 AVE 研究最好的结果.

中国矿业大学王海军研究小组在文献[24-25]中给出了求解 AVE 的区间算法.

Noor 在 2011 年发表的文献[26-27]中给出了求解 AVE 的迭代算法. Mangasarian O. L 在 2011 年发表的文献[28]中，利用对偶互补条件，给出了求解 AVE 的一个迭代算法.

对无解(不可行)的绝对值方程，Saeed Ketabchi 等人研究了极小范数解与最优误差校正问题[29-31].

笔者近年来也对 AVE 进行了深入研究，获得了一些研究成果[32-40].

由于 AVE 等价于不可微优化，因此上述所有方法可以归结为 3 类：i)逐次线性化方法；ii)半光滑牛顿法；iii)光滑牛顿法：即用一个光滑函数替代不可微绝对值函数. 鉴于文献[23]中给出的光滑牛顿法具有二次收敛性，因此构造光滑逼近函数将成为研究 AVE 的一个热点.

### 1.4.3 绝对值方程的应用

Mangasarian O. L 在 2009 年发表的文献[41]中指出了背包可行性问题与 AVE 之间的关系. 借助 AVE 的已有研究结果，给出了背包可行性问题解存在的条件.

京都大学福岛雅夫(M. Fukushima)优化研究小组对 AVE 问题也进行了深入研究，并把研究结果应用于选址问题，获得了较好的结果. 详细结果见文献[42].

## 1.5 本书的篇章结构

绝对值方程$\boldsymbol{Ax}-|\boldsymbol{x}|=\boldsymbol{b}$等价于一个 NP-hard 优化问题. 本书讨论了绝对