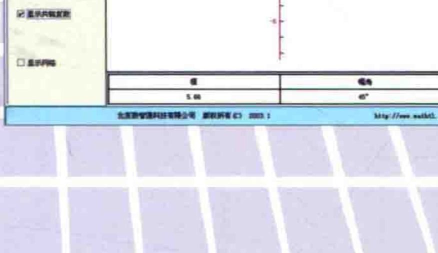
普通高等学校“十二五”规划教材

复变函数与积分变换

曾岳生　编著



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

复变函数与积分变换

曾岳生　编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本教材针对21世纪普通高等学校教学需要而编写，主要内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数表示、留数及其应用、积分变换预备知识、Fourier变换、Laplace变换、序列Fourier变换、Z变换、复变函数与积分变换数学实验等。建议教学学时为64～70课时。

本教材力图体现如下特色：①增加离散时间变量的积分变换，以适应数字信号处理的需要；②体现"探究式"教学方法；③增加了相关数学实验，以满足当代理工科大学生的要求。

本教材适合普通高等学校应用数学、应用物理、电子信息等专业使用，也可供成人高校相关专业教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 曾岳生编著．—北京：中国铁道出版社，2014.7

普通高等学校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-113-18880-1

Ⅰ.①复… Ⅱ.①曾… Ⅲ.①复变函数—高等数学—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第148273号

书　　名：**复变函数与积分变换**
作　　者：曾岳生　编著

策　　划：李小军　　　　**读者热线**：400-668-0820
责任编辑：李小军　何　佳
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任校对：汤淑梅
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街8号）
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：三河市宏盛印务有限公司
版　　次：2014年7月第1版　　2014年7月第1次印刷
开　　本：720 mm×960 mm　1/16　**印张**：19.5　**字数**：386千
书　　号：ISBN 978-7-113-18880-1
定　　价：36.00元

前　　言

根据原国家教委1995年颁布的《工程数学课程教学基本要求》，复变函数与积分变换是工程数学的基本内容之一。西安交通大学高等数学教研室编写的《工程数学——复变函数》及东南大学数学系编写的《工程数学——积分变换》自1978年初版分别至1994年第三版、2003年的第四版，很多高校已使用该教材30多年，受到广大师生和其他读者的欢迎，而成为经典教材。进入21世纪以来，又有不少高校的老师编写、出版了10余种《复变函数和积分变换》教材，它们各有特色，分别被不同高校使用。

为适应21世纪高素质人才培养的需要，本教材的编写有如下几点考虑：

1. 将复变函数与积分变换的内容有机地结合在一起，作为工程数学一个学期的教学内容，这样既保证了教学质量的提高，又可压缩课时。

2. 随着大规模集成电路的发展及计算机技术的进步，模拟信号发展到数字信号，由此，当今社会已步入信息化、数字化时代。经典《积分变换》教材只包含连续变量的Fourier变换和Laplace变换，它们是处理模拟信号的数学工具；而数字信号是离散时间变量，我们认为有必要在积分变换教材中增加离散时间变量的积分变换，如序列Fourier变换和Z变换，以作为处理数字信号的数学工具。

3. 为了培养创新型人才，特别要求教师尽量采用“探究式”教学方法。适应这种教学方法的教材，在内容呈现上，注意展现数学知识的发生过程以及解决现实问题的思维过程。本教材力求与读者一起以“研究者”的姿态去恰当地提出问题，通过分析，寻找解决问题的方法。将定理作为分析研究的结果提供给学生，使其感到自己也能“发现”定理。在基本方法的阐述上，力求富于启发性，使学生能举一反三、融会贯通，以期达到培养学生探究能力和创新能力的目的。

4. 由于高校普遍压缩了课时，本教材在内容的选取上，既尽量满足各专业的要求，又力求精简，做到深入浅出、通俗易懂，并配以恰当的例题，以便于学生自学。对于涉及分析理论中比较深的内容，例如初等多值函数的支点、支割线、单叶性解析区域、解析函数的唯一性定理、解析延拓、共形映射的Riemann定理等，我们都没有写入教材，如读者有兴趣，可以从参考书中找到相关的内容。

5. 注意到理工科学生的计算机应用能力的培养，对于教材内容的学习，要考虑计算机的实现作为一个主要目标，我们增设了“复变函数与积分变换数学实验”一章，选编了6个数学实验，作为复变函数和积分变换课程的实训项目，可以不占课时，由学生在课外自主完成。

本书共12章，前6章为复变函数内容，包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数表示、留数及其应用、共形映射；第7～11章为积分变换内容，包括积分变换预备知识、Fourier变换、Laplace变换、序列Fourier变换和Z变换；最后一章为数学实验。为满足各专业及不同层次的需求，并体现理论联系实际的原则，基本理论和基本方法的应用，力求内容全面，不是必学内容的用星号"*"注明，供教师选用。

完成本教材的基本教学内容大约需要64～70课时，对于该课程少于64课时的专业，教师可根据专业需要确定教学内容。书中有星号"*"的内容，由教师根据实际情况加以取舍，可以不放在课堂上讲，可供有兴趣的读者和学有余力的学生选学。

本教材的编写是怀化学院教材建设的立项资助项目，怀化学院领导给予了热情的关怀；在编写过程中得到了教务处、数学系、物理与电子信息工程系的大力支持；中国铁道出版社对本教材的出版精心策划，鼎力相助，在此一并表示真诚的感谢。

由于编者水平有限，经验不足，教材编写中的疏忽在所难免，书中的不妥之处，恳请使用本教材的教师和学生批评指正。

编者

2013年11月

目　录

上篇　复变函数

下篇　积分变换

上篇 复变函数

与其他科学一样，复变函数论也是由于客观实际的需要而产生和发展起来的．在解方程 $x^2+1=0$ 时，就遇到负数开平方的问题．意大利数学家 Gardano(1501—1576)在 1545 年解三次方程时，首先产生了负数开平方的思想．为了使负数开平方有意义，需要扩大数系，于是引进虚数，记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位，使实数域扩大到复数域．1777 年瑞士数学家 Euler 系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，开始把它们用到水利学和地图学上．此后，复数才被人们广泛承认和使用．

在 19 世纪，复变函数的理论经过法国数学家 Cauchy、德国数学家 Riemann 和 Weierstrass 的巨大努力，已形成了非常系统的理论，并且深刻地渗透到数学各分支，同时在流体力学、空气动力学、电学、电磁学等方面有很多应用．20 世纪以来，复变函数已被广泛应用于理论物理、平面弹性理论和天体力学等方面．而自然科学和生产技术的发展又极大地推动了复变函数的发展，丰富了它的内容．

复变函数理论在某些方面，是一元实函数微积分学的推广与发展．因此，无论在内容上还是在研究问题的方法和逻辑结构上，它们有着许多相似之处．但是复变函数又有其自身独特的研究对象和处理方法．我们在学习复变函数中，应自觉地与高等数学中关于一元函数微积分的概念和性质进行比较，找出其共同点，但更重要的是应找出其不同点．这是学好复变函数这门课程的一种行之有效的方法．

第1章 复数与复变函数

自变量为复数的函数就是复变函数．由于在中学阶段已经学过复数的概念和基本运算，本章将在原有基础上作简要复习和补充，然后介绍复平面上的曲线、区域以及复变函数的概念、极限与连续等，为研究解析函数的理论和方法作准备．

1.1 复数及其几何表示

1.1.1 复数

设 x,y 是两个实数，则称形为 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数为**复数**，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 称为**虚数单位**，x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为

$$x=\mathrm{Re}\,z,\qquad y=\mathrm{Im}\,z.$$

当 $\mathrm{Im}\,z=0$ 时，$z=\mathrm{Re}\,z$ 为实数．因此，全体实数可看成复数的一部分，复数则是实数的扩充．当 $\mathrm{Re}\,z=0$ 时，$z=\mathrm{i}y(y\neq0)$ 称为**纯虚数**．

若 a,b 为实常数，则 $c=a+\mathrm{i}b$ 为复常数；若 x,y 为实变数，则 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复变数．

复数无大小之分，即复数不能比较大小．

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，当且仅当 $x_1=x_2$ 及 $y_1=y_2$ 时，$z_1=z_2$．

设复数 $z=x+\mathrm{i}y$，则称复数 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**，记为$\overline{z}=x-\mathrm{i}y$．

实际上，z 与$\overline{z}$互为共轭复数，即$\overline{(\overline{z})}=z$．且不难看出

$$x=\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad y=\mathrm{Im}\,z=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}},\quad z\,\overline{z}=x^2+y^2\geqslant0,\tag{1.1.1}$$

由此极易用复变数方程表示常见曲线．

例 1.1.1 用复变数 z 表示下列曲线：

(1)直线 $y=2x+3$；　　(2)$(x-2)^2+(y-1)^2=4$．

解 (1)由 $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$，原方程为

$$\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}=z+\overline{z}+3.$$

即

$$(1-2\mathrm{i})z-(1+2\mathrm{i})\overline{z}-6\mathrm{i}=0,$$

记 $\alpha=1+2\mathrm{i}$，$\beta=6\mathrm{i}$，则化为

$$\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}=\beta.$$

(2)原方程化为 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$.

则
$$z\bar{z}-2(z+\bar{z})+\frac{1}{\mathrm{i}}(z-\bar{z})+1=0,$$
$$z\bar{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\bar{z}+1=0,$$

记 $\alpha=-2+\mathrm{i}$,化为
$$z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+1=0.$$

1.1.2 复数的几何表示

由复数的概念知,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可唯一地对应一个有序实数对(x,y),而有序实数对(x,y)在引入平面直角坐标系后又与平面上的点一一对应．于是复数 z 就与坐标平面上的点一一对应．由此,可建立复数集与平面直角坐标系中的点集之间的一一对应,如图 1.1.1所示.

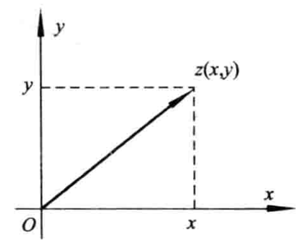


图 1.1.1

点 z 的横坐标为 x,纵坐标为 y,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用点 $z(x,y)$表示,这个建立了用直角坐标系的点表示复数的平面称为**复平面**,在复平面中 x 轴称为**实轴**,y 轴称为**虚轴**．显然,实轴上的点表示实数,虚轴上的点表示纯虚数．今后我们将不再区分复数与复平面上的点,一个复数集合就是一个平面点集,全体复数集记为 **C**.

由于复平面上的点 $z(x,y)$与复平面内从原点到点 $z(x,y)$的向量$\overrightarrow{Oz}$一一对应,原点 O 对应于零向量．而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与复平面上的点 $z(x,y)$一一对应．所以,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与复平面内的向量$\overrightarrow{Oz}$一一对应．这样,我们就可以用以原点为起点、z 为终点的向量$\overrightarrow{Oz}$表示复数．

1.1.3 复数的模与辐角

如图 1.1.2 所示,设 $z=x+\mathrm{i}y\neq0$,其对应的向量为$\overrightarrow{Oz}$. 则向量$\overrightarrow{Oz}$的长度 r 称为复数 z 的**模**,记为$|z|$,显然
$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由模的定义下列等式与不等式成立:
$$|\bar{z}|=|z|,\quad |z|^2=z\bar{z},\quad |x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,$$
$$|z|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.1.2}$$

正实轴到向量$\overrightarrow{Oz}$的转角 θ 称为复数 z 的**辐角**,记作 $\mathrm{Arg}\,z$,即 $\theta=\mathrm{Arg}\,z$. 当 $z=0$ 时,$\mathrm{Arg}\,0$ 无意义.

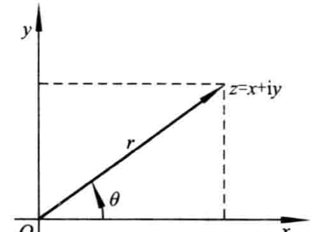


图 1.1.2

复数的辐角之间可以相差 2π 的整数倍,因此 $\mathrm{Arg}\,z$ 表

示无穷多个角．为了方便，通常把满足

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi \tag{1.1.3}$$

的辐角 $\arg z$ 称为 z 的**辐角主值**，或称为 z 的**主辐角**．于是

$$\theta = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

辐角的正负，视正实轴是按逆时针方向还是顺时针方向转至向量$\overrightarrow{Oz}$而定，即逆时针方向转至向量$\overrightarrow{Oz}$，z 的辐角取正值，顺时针方向转至向量$\overrightarrow{Oz}$，z 的辐角取负值.

主辐角值也可以规定为 $0 \leqslant \arg z < 2\pi$，在开方运算中常用此规定.

若 $a \in \mathbf{R}_+$（$\mathbf{R}_+$ 表示正实数集），则

$$\arg a = 0,\quad \arg(-a) = \pi,\quad \arg(a\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2},\quad \arg(-a\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}.$$

当 $\arg z (z = x + \mathrm{i}y \neq 0)$ 表示主辐角时，它与反正切的主值 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 有如下关系（见图 1.1.3）$\left(\text{注意：} -\pi < \arg z \leqslant \pi, -\dfrac{\pi}{2} < \arctan \dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\arg z (z\neq 0) = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & \text{当 } x>0, y\geqslant 0 \text{ 及 } y<0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x=0, y>0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi & \text{当 } x<0, y\geqslant 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi & \text{当 } x<0, y<0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x=0, y<0 \end{cases}.$$

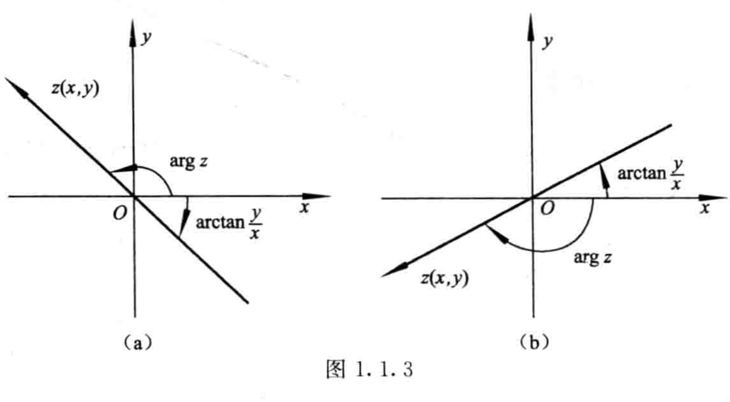


图 1.1.3

例 1.1.2 设 $z_1 = 2 - 2\mathrm{i}, z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $|z_1|$、$|z_2|$，$\mathrm{Arg}\, z_1$ 和 $\mathrm{Arg}\, z_2$.

解 $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$，$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

$$\operatorname{Arg} z_1 = \arg(2-2\mathrm{i}) + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} z_2 &= \arg(-3+4\mathrm{i}) + 2k\pi = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi + 2k\pi \\ &= (2k+1)\pi - \arctan\frac{4}{3}, k \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

例 1.1.3　已知复数 z 满足 $z\bar{z}=4$，且 $|z+1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=4$，求复数 z.

解　因 $z\bar{z}=4$，得 $|z|=2$，即点 z 的集合是以原点为圆心、以 2 为半径的圆周．由 $|z+1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=4$，即 $|z-(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})|=4$，它表示点 z 到点 $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的距离等于 4，因为 $|-1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=2$，即点 $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 在圆周 $|z|=2$ 上，故所求的点 z 与点 $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的距离等于圆 $|z|=2$ 的直径，由平面几何知识知，所求的 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

1.1.4　复数的三角函数式与指数式

由直角坐标与极坐标的关系(见图 1.1.2)，我们立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \tan(\operatorname{Arg} z) = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

于是复数 $z\neq 0$ 又可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1.1.4}$$

称为复数的**三角函数式**.

利用欧拉(Euler)公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

复数 z 又可表示为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1.1.5}$$

称为复数的**指数式**.

例 1.1.4　$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$;

$\mathrm{i} = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$;

$-1 = 1\cdot(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$;

$$-3\mathrm{i}=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}.$$

1.1.5 复数的运算

1. 复数的加法与减法

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2). \tag{1.1.6}$$

复数的加法(图 1.1.4a)与减法(图 1.1.4b)满足平行四边形法则,如图 1.1.4 所示.

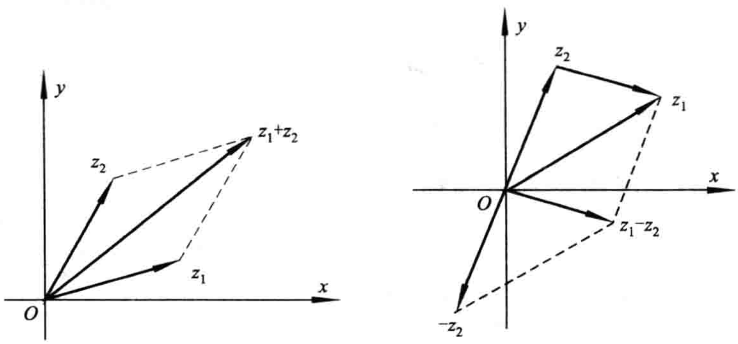


图 1.1.4

2. 复数的乘法

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,则

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.1.7}$$

3. 复数的除法

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\neq 0$,则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}. \tag{1.1.8}$$

4. 复数运算的一些性质

设 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$,则有下列性质:

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1, (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,即复数的加法遵循交换律与结合律.

(2) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1, (z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3), z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$,即复数乘法遵循交换律、结合律及乘法对加法的分配律.

(3) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}, \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$.

(4) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$.

(5) $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\ z_1+\mathrm{Arg}\ z_2$，$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\ z_1-\mathrm{Arg}\ z_2$（这里 z_1,z_2 都不为零）.

(6) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$（三角不等式）.

5. 复数的乘幂与开方

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，即 $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}$.

若 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=re^{\mathrm{i}\theta}$，则任意正整数 n，有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \tag{1.1.9}$$

若定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，$n\in\mathbf{N}$，并规定 $z^0=1$，这样，当 $z\neq0$ 时，对任何整数 n 都可以定义 z^n. 特别地，在公式(1.1.9)中当 $r=1$ 时，得到德莫弗(DeMoivre)公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.1.10}$$

求 z 的 n 次方根，相当于在方程

$$\omega^n=z \tag{1.1.11}$$

中，求解 ω.

设 $z\neq0$（$z=0$ 时解显然为 0），令 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，$\omega=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$，则方程(1.1.11)变形为

$$\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=re^{\mathrm{i}\theta},$$

从而得两个方程

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi,$$

解之得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

因此 z 的 n 次方根($n\geqslant2$)为

$$\omega_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad(k=0,1,\cdots,n-1) \tag{1.1.12}$$

容易验证，当取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$ 的值互不相同；而当 k 取其他值时，ω_k 必与 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$ 中某个值相同，如取 $k=n$ 时，$\omega_n=\omega_0$，取 $k=n+1$ 时，$\omega_{n+1}=\omega_1$ 等．所以，当 $z\neq0$ 时，$\omega=\sqrt[n]{z}$ 有且只有 n 个不同的方根，如式(1.1.12)所示.

例 1.1.5　求 $1-\mathrm{i}$ 的 4 次方根.

解　由于 $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$，所以

$$\sqrt[4]{1-\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)},\qquad k=0,1,2,3.$$

因此

$$\sqrt[4]{1-\mathrm{i}}=\omega_0,\mathrm{i}\omega_0,-\omega_0,-\mathrm{i}\omega_0.$$

式中 $\omega_0=\sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{16}\mathrm{i}}$.

1.1.6 无穷远点与复球面

在复变函数中,常常遇到这样一些函数,当自变量趋于一个给定的点时,函数的值趋于无穷. 为了研究这样的情形,有必要将复数系统加以扩充,引入一个数∞(或一个无穷远点∞). 在微积分中,∞不是一个定值,它代表的是变量无限增大的符号;而在复变函数中,把它作为一个定值,它的运算规定如下.

设 a 是一个异于∞的复数,规定

$$a+\infty=\infty+a=\infty,\frac{a}{\infty}=0,\frac{\infty}{a}=\infty.$$

设 b 是一个异于 0 的复数(b 可为∞),规定

$$b\cdot\infty=\infty\cdot b=\infty,\frac{b}{0}=\infty.$$

为了避免和算术定律矛盾,对$\infty\pm\infty,0\cdot\infty,\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$,不规定其意义.

对于复数∞,实部、虚部及辐角的概念都没有意义,而模规定为$|\infty|=+\infty$.

在复平面上没有一点和∞对应,但是我们可以设想平面上有一个理想点和它对应,这个理想点称为**无穷远点**. 复平面加上∞,称为**扩充复平面** $C_\infty=C\cup\{\infty\}$. 为使$|\infty|=+\infty$的规定合理,我们规定扩充复平面上只有一个无穷远点. 为使无穷远点的存在得到直观的解释,我们建立扩充复平面 C_∞ 的球面表示方法.

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面,球面上的一点 S 与原点重合,通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N,称 N 为**北极**,S 为**南极**(见图 1.1.5).

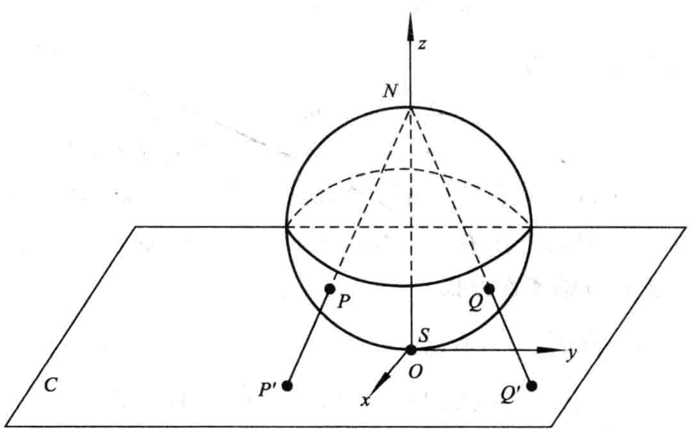


图 1.1.5

已知复平面 C 上的任意点 P'都对应一个复数 z,连结 $P'N$,则和球面交于唯一异于 N 的 P,于是平面 C 上任意点 P'都有球面上唯一表示它的点 P;反之,对于球面上

异于 N 的点 Q，过 N、Q 的直线与平面 C 交于唯一点 Q'. 我们以 N 为射影中心，则除了 N 点外，球面上所有的点与 C 平面上所有的点是一一对应的. 令 N 对应于扩充复平面上的无穷远点 ∞. 于是扩充复平面 $C_\infty = C \cup \{\infty\}$ 上所有点和球面上所有点构成一一对应. 因此，全部复数可用这个球面上的点来表示，这样规定的球面叫做**复球面**（也称为 Riemann 球面），而这样的对应关系叫做**球极平面射影**.

复球面能把扩充复平面的无穷远点明显地表示出来，这就是它比复平面有优越性之处.

习题 1.1

1. 求下列复数 z 的实部、虚部，共轭复数、模与辐角：

(1) $\dfrac{1}{3+zi}$；　(2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$；　(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$；　(4) $i^8-4i^{21}+i$.

2. 当 x,y 等于什么实数时，等式 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立？

3. 当 $|z|\leqslant 1$，求 $|z^n+a|$ 的最大值，其中 n 为正整数，a 为复数.

4. 已知 $z\in \mathbf{C}$，$|z|=1$，设 $u=(3+4i)z+(3-4i)\bar{z}$，(1) 证明：u 是实数；(2) 求 u 的最大值与最小值.

5. 证明 $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z\cdot\bar{z})$.

6. 证明三角不等式

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

7. 将下列复数化为三角函数式和指数式.

(1) $1-\sqrt{3}i$；　(2) $\dfrac{2i}{-1+i}$；　(3) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$.

8. 设 $z=e^{it}$，证明

(1) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$；(2) $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$.

9. 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta(0<\theta<2\pi)$，$\omega=1+z$，求 $\arg\omega$.

10. (1) 求方程 $z^3+8=0$ 的所有根；
   (2) 求微分方程 $y'''+8y=0$ 的一般解.

11. 设 $z=-1+\sqrt{3}i$，求 z 的 6 次方根.

12. 设 $x_n+iy_n=(1-\sqrt{3}i)^n$（x_n,y_n 为实数，n 为正整数），证明：$x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n=4^{n-1}\sqrt{3}$.

1.2 复平面上的点集

在复变函数论中的变量都是复数,称为**复变量**. 复变量有自己的变化范围,即它在复平面上的某个点集变化. 复平面上点集的基本概念与《高等数学》中的平面点集的相应概念,如点集的内点、外点、聚点以及开集、闭集、连通集、区域、邻域等都是一致的,本节仅说明如何用复数来描述复平面上的邻域、曲线和区域.

1. 邻域

$$N_\delta(z_0)=\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$$

称为点 z_0 的 δ **邻域**,其中 $\delta>0$. 而集合

$$\mathring{N}_\delta(z_0)=\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$$

称为点 z_0 的**去心邻域**.

有时需要考虑无穷远点∞的邻域,它是集合

$$N_R(\infty)=\{z \mid |z|>R\}.$$

一般 R 是充分大的正数,在几何上表示圆周 $|z|=R$ 的外部.

2. 曲线

设 $x(t)$和 $y(t)$是实变量 t 的两个实函数,它们在闭区间$[\alpha,\beta]$上连续,由方程组

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \tag{1.2.1}$$

或由复值函数

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta \tag{1.2.2}$$

所确定的点集 C 称为复平面上的一条曲线,上述方程称为曲线的**参数方程**.

$z(\alpha)$和 $z(\beta)$分别称为曲线 C 的起点和终点;若 $z(\alpha)=z(\beta)$,则称曲线 C 为**闭曲线**.

曲线 C 的正方向规定为参数 t 增加的方向,若曲线 C 为闭曲线,则规定逆时针方向为 C 的正方向. 曲线 C 的反方向用 C^- 表示. 规定了正方向的曲线称为**有向曲线**.

如果 $t_1\in[\alpha,\beta]$,$t_2\in[\alpha,\beta]$,$t_1\neq t_2$ 时有 $z(t_1)\neq z(t_2)$,则称曲线 C 为**简单曲线**,也称为 Jordan **曲线**. $z(\alpha)=z(\beta)$的简单曲线称为**简单闭曲线**或 Jordan **闭曲线**. 例如圆周

$$z=z(t)=r\cos t+\mathrm{i}r\sin t,t\in[0,2\pi]$$

就是简单闭曲线. 如图 1.2.1 所示,用复数表示为

$$|z|=r.$$

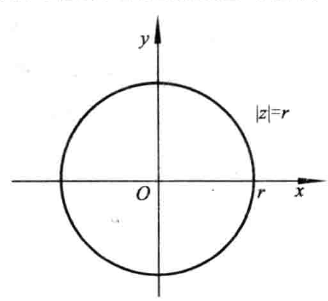


图 1.2.1