数学理论与应用系列

离散数学

（第二版）

胡新启 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学理论与应用系列

离散数学（第二版）

胡新启 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/胡新启编著.—2版.—武汉:武汉大学出版社,2014.9
(数学理论与应用系列)
ISBN 978-7-307-14444-6

Ⅰ.离…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.离散数学　Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第224320号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北民政印刷厂
开本:720×1000　1/16　印张:21.5　字数:358千字　插页:1
版次:2007年11月第1版　　2014年9月第2版
2014年9月第2版第1次印刷
ISBN 978-7-307-14444-6　　定价:39.00元

前　言

离散数学是高等院校应用数学专业及相关专业重要的专业基础课。一方面，它为相关专业课如数据结构、编译系统、操作系统、数据库、信息管理系统等提供必要的数学基础；另一方面，通过离散数学的学习，可以培养学生的逻辑思维能力与抽象思维能力。

离散数学涉及的内容非常广泛，不同的作者往往有不同的选材内容。本书主要介绍集合论、代数系统、图论、数理逻辑等四部分内容，这和大多数离散数学教材差不多。本书的主要特点有：

(1) 内容组织上层次分明，结构清晰；

(2) 叙述严谨，重点突出，深入浅出，便于自学；

(3) 对部分定理只给出了直观解释，没有给出证明，主要是为了重点突出，避免舍本逐末；

(4) 书中各章配有大量的例题与习题，希望培养与提高学生运用基础理论来分析问题、解决问题的能力。

本书是编者在长期从事离散数学教学工作的基础上，分析比较了国内外同类型教材编写而成的。编者对这些教材的作者们表示衷心感谢！本书作为教材，主要适用于应用数学专业的本科生，同时也适用于计算机科学与工程及其他专业和层次的学生。

离散数学教学大多安排 72 学时，也有 54 学时或 108 学时的，可根据教学学时的多少，选讲其中部分内容。少数内容可供学有余力的同学们自学。

尽管编者竭尽全力，但由于水平有限，书中难免仍有不妥甚至错误之处，恳请广大读者和同行提出宝贵意见。

编　者

2014 年 6 月

目　　录

第 1 章　集　合

集合是数学中的基本概念，集合论观点目前已渗透到现代数学的各个领域．本章主要介绍集合论的基础知识，包含集合的定义与表示，集合的运算及相关性质，集合的幂集，笛卡儿积，集合的覆盖与划分以及有限集合的计数等．

1.1　集合的基本概念

集合是数学中没有给出精确定义的基本的最原始的数学概念，只能给出它的描述，这正如平面几何里的“点”、“线”、“面”作为最原始的概念不加定义一样．

一般来说，将具有共同性质的一些对象汇集成的一个整体称为一个**集合**．如自然数集、实数集、全部英文字母形成的集合、C 语言的全体基本字符形成的集合等．通常用大写英文字母表示集合，如 A, B, X 等．组成一个集合的不再细分的个体(或对象)，称为**元素**，常用小写英文字母表示，如 a, b, x 等．若 a 是集合 A 中的元素，则称 a **属于**集合 A，记为 $a \in A$；用 $x \notin X$ 表示元素 x 不在集合 X 中．当 $a_1 \in A$，$a_2 \in A$，…，$a_n \in A$ 时，常简写为 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$．元素与集合之间是属于或者不属于的关系，两者必有且只有一个成立．

“集合”、“元素”和“属于”是关于集合的三个基本概念，它们是未加形式定义的原始概念，仅作了上面的直观描述．集合论中的其他概念，均可由此三个概念出发，给出严格的定义．

常用的表示集合的方法有列举法和描述法两种．

列举法（或**枚举法**）是列出集合中的所有元素（元素较少时），或列出足够多的元素（元素较多或无穷时）以反映集合中元素的特征，其间用逗号相隔，放在花括号内，如 $A = \{1,2,3\}$，$B = \{\{a\}, b, 春, 夏, 秋, 冬\}$，

$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$\mathbf{I}_m=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，$\mathbf{P}_m=\{1,2,\cdots,m\}$. 有限集都可用列举法表示.

描述法是将集合中元素应当满足的条件描述出来, 如:

$$B=\{n^2 \mid n\in\mathbf{N}\},\quad C=\{x \mid x\in\mathbf{R},\ 且 -1<x<1\}$$

等. 一般来说, 设集合 $A=\{x \mid P(x)\}$, 是指 A 中元素 x 均具有性质 $P(x)$, 而凡具有性质 $P(x)$ 的元素 x 均在集合 A 中.

上述两种表示法中, 列举法适用于元素不太多或元素的规律比较明显、简单的情况, 而描述法则刻画了集合中元素的共同特征.

对于某些有规律的无限集, 例如: 其元素与自然数可建立一一对应的关系的集合, 也可使用列举法表示, 如 $C=\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$. 这种表示一定得让人能看出其元素间的规律.

虽然此处给出了集合的两种表示方法, 但这一说明并不是十分准确的, 并且我们也并不十分在意到底用的是何种表示方法, 例如也可通过集合的运算, 如 $X=A\cup(B-C)$, 来表示集合 X, 或其他方式, 如递归定义, 来表示集合等.

集合由它的元素所确定, 集合也简称集. 集合中的元素具有如下性质:

- 确定性. 对一个具体的集合来说, 其元素是确定的. 对集合 A, 任一元素 a 或者属于 A 或者不属于 A, 两者必居其一.
- 无重复性. 集合中的元素彼此不同. 这与后面图论中涉及的多重集合不同, 那里因为特殊的原因允许有重复的元素. 例如: 我们认为 $\{a,a,b\}=\{a,b\}$.
- 无序性. 集合中的元素无顺序. 如: $\{1,2,3\}=\{2,3,1\}$.
- 抽象性. 集合中的元素是抽象的, 甚至可以是集合. 如: $A=\{1,\alpha,\{1\}\}$, 这里 $\{1\}$ 是一个集合, 同时又是 A 中的一个元素.

例 1.1 设 $A=\{a,\{a,b\},\{1,2\}\}$. 可以看出, $a\in A$, 但 $b\notin A$; $1\in\{1,2\}$, 但 $1\notin A$. 集合 A 中仅含有 3 个元素, 即 $a,\{a,b\},\{1,2\}$.

经常用到的几个集合有:

$\mathbf{N}$——自然数集（包含整数 0）;

$\mathbf{Z}$——整数集;

$\mathbf{Q}$——有理数集;

$\mathbf{R}$——实数集;

$\mathbf{C}$——复数集.

空集和全集是两个特殊的集合, 在集合论中的地位很重要. 不含任何元素的集合称为**空集**, 用$\varnothing$或$\{\ \}$表示. 在所讨论的问题中, 所涉及的全体对象构成的集合称为**全集**(也称为论域), 通常用U或E表示. 全集随着研讨问题的不同而不同. 不同问题可以取不同的全集, 甚至对同一问题也可以取不同的全集, 例如平面几何问题, 可以把整个平面作为全集, 也可以将整个三维空间作为全集.

集合中元素的个数可以是有限的, 也可以是无限的, 前者所对应的集合称为**有限集**, 后者所对应的集合称为**无限集**. 若A是有限集, 用$|A|$表示A中元素的数目, 并称之为集合的**基数**, $|A|$也可记为$\mathrm{card}(A)$或$\kappa(A)$. 显然有$|\varnothing|=0$. 我们将含有n个元素的集合简称为n**元集**.

1.2 子集与集合的相等

包含与相等是集合间的两种基本关系, 也是集合论中的两个基本概念.

定义1.1 设有A,B两集合. 若B中的每个元素都是A中的元素, 则称B是A的**子集**, 也称B**包含于**A, 或A**包含**B, 记为$B\subseteq A$或$A\supseteq B$. 若B是A的子集, 且A中至少有一个元素不属于B, 则称B为A的**真子集**, 记为$B\subset A$或$A\supset B$, 也称B**真包含于**A, 或A**真包含**B.

例如: 设$A=\{1,2,3\}$, $B=\{1\}$, 则有$B\subset A$, $A\supseteq A$, $\mathbf{N}\supset B$.

通常用"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"或"等价于", 则根据定义有

$$B\subseteq A \ \Leftrightarrow\ \forall x\in B,\ 有x\in A;$$

$$B\subset A \ \Leftrightarrow \forall x\in B,\ 有x\in A,\ 且\exists x_0\in A,\ 使x_0\notin B.$$

由此可得出: $B\nsubseteq A\Leftrightarrow \exists x_0\in B,\ x_0\notin A$.

这里"$\forall$"表示对任意的, 对每一个; "$\exists$"表示存在某个. 以后不再说明.

由定义可知: 对任意的集合A, 有$\varnothing\subseteq A$, $A\subseteq A$. 特别地, 有$\varnothing\subseteq\varnothing$. 称集合$A$的子集$\varnothing$和$A$为$A$的**平凡子集**; 任何集合都是全集的子集.

事实上, 假设存在集合A, 使$\varnothing\nsubseteq A$, 则$\exists x\in\varnothing$, $x\notin A$, 这与空集$\varnothing$的定义矛盾.

由定义易得: 空集是唯一的.

注意符号$\in$和$\subseteq$意义的区别. $\in$表示元素与集合之间的从属关系, 而$\subseteq$表示集合与集合之间的包含关系. 由于集合的抽象性, 集合中的元素可以是集合, 故可以发生如$A\in B$且$A\subseteq B$的情形. $A\in B$表示集合A是集合B中的一个元素; $A\subseteq B$表示集合A中的每个元素都是集合B中的元素.

定义 1.2 若两集合A与B包含的元素相同, 则称A与B**相等**, 记为$A=B$. 也可解释为: 若A是B的子集且B是A的子集, 则称A与B**相等**, 即

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A.$$

例如: $A=\{1,2\}$, $B=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$, 则显然有$A=B$.

说明 要证明两个集合相等, 只需证明两集合互为子集或互相包含即可. 这是证明集合相等的基本思路和依据. 从这个定义可以推证, 两集合相等当且仅当它们有完全相同的元素. 下一章"关系"中, 很多地方涉及证明两关系相等, 由于关系实际上是一种特殊的集合, 因此也可用集合相等的证明方法来证明.

若A与B不相等, 则$B\not\subseteq A$和$A\not\subseteq B$至少有一个发生.

注意 $\{a\}\neq\{\{a\}\}$, 因为$\{a\}$与$\{\{a\}\}$中元素不相同, 一个是a, 另一个是$\{a\}$. 又如$\varnothing\neq\{\varnothing\}$, 但$\varnothing\in\{\varnothing\}$.

例 1.2 列出下列集合的子集:

(1) $A=\{a,\{b\},c\}$;

(2) $B=\{\varnothing\}$;

(3) $C=\varnothing$.

解 (1) 因为$\varnothing$是任何集合的子集, 所以$\varnothing$是集合A的子集; 由A的任何一个元素构成的集合, 都是A的子集, 所以$\{a\},\{\{b\}\},\{c\}$是A的子集; 由A的任何两个元素构成的集合, 都是A的子集, 所以$\{a,\{b\}\}$, $\{a,c\}$, $\{\{b\},c\}$是A的子集; 由A的任何 3 个元素构成的集合, 都是A的子集, 所以$\{a,\{b\},c\}=A$是A的子集. 于是集合A的所有子集为(共 8 个)

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{\{b\}\},\ \{c\},\ \{a,\{b\}\},\ \{a,c\},\ \{\{b\},c\},\ \{a,\{b\},c\}.$$

(2) 理由同(1), B的子集有$\varnothing$, $\{\varnothing\}$.

(3) $\varnothing$是C的子集. 因为C中没有元素, 所以C没有其他子集, 故C的子集只有$\varnothing$.

例 1.3 设集合 $A=\{2,a,\{3\},4\}$，$B=\{\{a\},b,1\}$，判定下列命题是否正确，并说明理由.

(1) $\{a\}\in A$； (2) $\{a\}\in B$；

(3) $\{\{a\},b,1\}\subset B$； (4) $\{3\}\subseteq A$；

(5) $\{\varnothing\}\subseteq B$； (6) $\varnothing\subseteq\{\{3\},4\}$.

解 (1) 错误. A 中无元素 $\{a\}$.

(2) 正确. 虽然 $\{a\}$ 是一个集合，但它又是 B 中的一个元素，应该用从属关系.

(3) 错误. 集合 $\{\{a\},b,1\}$ 与 B 是相同集合，但 $\{\{a\},b,1\}$ 不是 B 的真子集.

(4) 错误. A 中无元素 3，虽然 $\{3\}$ 是一个集合，但它只是 A 中的一个元素，不能用包含关系.

(5) 错误. 因为集合 B 中没有元素 $\varnothing$，所以 $\{\varnothing\}$ 不是 B 的子集.

(6) 正确. 因为 $\varnothing$ 是任意一个集合的子集.

说明 集合与集合之间是一种包含关系，用"$\subseteq$"或"$\supseteq$"表示，而元素与集合之间是一种从属关系，用"$\in$"表示，因此，将集合的元素看做子集，用包含关系表示，或者将集合的子集看做元素，用从属关系表示都是错误的.

1.3 集合的运算及其性质

给定集合 A 和 B，可以通过集合的并 $\cup$、交 $\cap$、相对补 $-$、绝对补 $^{-}$、对称差 $\oplus$ 等运算产生新的集合，这也是表示集合的一种方法.

定义1.3 任意两集合 A 与 B 的**并**是一个集合，它由所有至少属于 A 或 B 之一的元素所构成，记为 $A\cup B$.

任意两集合 A 与 B 的**交**是一个集合，它由所有属于 A 且属于 B 的元素所构成，记为 $A\cap B$.

任意两集合 A 与 B 的**差**是一个集合，它由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成，记为 $A-B$（或 $A\setminus B$），也称为 **B 相对 A 的补集**.

任意两集合 A 与 B 的**对称差**（也称为**环和**）是一个集合，它由所有属于 A 不属于 B 和属于 B 不属于 A 的元素所构成，记为 $A\oplus B$（有教材记为 $A\Delta B$）.

集合 A 的**补集**是一个集合，它由所有不属于 A 的元素所构成，记为 $\overline{A}$（或 $\sim A, A^c, A'$ 等），也称为 A 的**绝对补集**.

对任意两集合 A 与 B，若 $A\cap B=\varnothing$，即 A 与 B 没有公共的元素，则称 A 与 B 是**不相交**的.

由以上定义，有

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\},\quad A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$
$$A-B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\notin B\},\quad A\oplus B=(A-B)\cup(B-A),$$
$$\overline{A}=\{x\,|\,x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

例 1.4 设全集 $U=\{1,2,3,4,a,b,c,d\}$，$A=\{1,2,a,b,c\}$，$B=\{2,3,b,d\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,a,b,c,d\},\quad A\cap B=\{2,b\},$$
$$A-B=\{1,a,c\},\quad B-A=\{3,d\},$$
$$A\oplus B=\{1,3,a,c,d\},\quad \overline{A}=\{3,4,d\}.$$

上面集合的并和交的定义可以推广到 n 个集合的并和交：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

上面定义中若 $n=1$，约定 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=A_1$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i=A_1$.

并和交的运算还可推广到无穷集合的情形. 设 J 为一非空指标集，则有

$$\bigcup_{j\in J} A_j=\{x\,|\,\exists j_0\in J,\ x\in A_{j_0}\},$$
$$\bigcap_{j\in J} A_j=\{x\,|\,\forall j\in J,\ x\in A_j\}.$$

集合之间的相互关系和运算可以用文氏图（Venn 图）形象描述. 它的优点是形象直观、易于理解，缺点是理论基础不够严谨，因此只能用于说明，不能用于证明.

在文氏图中，用矩形代表全集 U，矩形内部的点表示全集中的全体元素，用（椭）圆或其他闭曲线代表 U 的子集，其内部的点表示不同集合的元素，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示. 图 1-1 中各图分别表示 5 种基本运算，阴影（斜线）部分表示经过相应运算得到的集合.

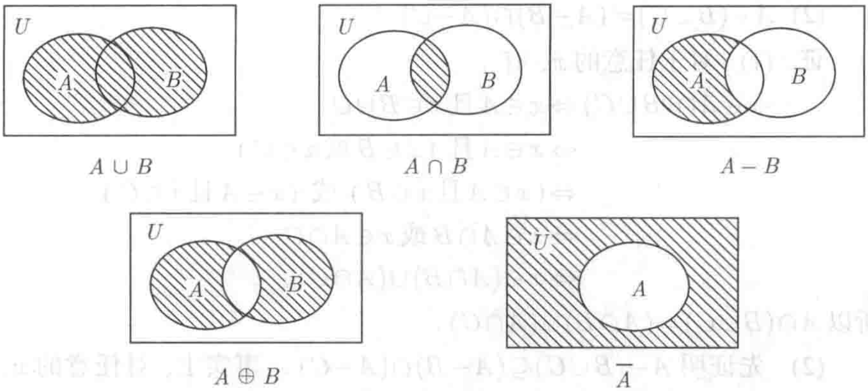

图 1–1

集合的运算具有下面一些基本性质:

定理 1.1 对于全集U的任意子集A,B,C，有表 1–1.

表 1–1

等幂律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
交换律	$A\cap B=B\cap A$	$A\cup B=B\cup A$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap U=A$
零律	$A\cup U=U$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
双补律	$A\cup\overline{A}=U$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
德・摩根律 (De Morgan)	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
对合律	$\overline{\overline{A}}=A$	

关于上面结论, 我们选分配律的第一个式子和德・摩根律的第三个式子来证明, 其他请读者自证.

例 1.5 证明:

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(2) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

证 (1) 对于任意的 x, 有

$$
\begin{aligned}
x\in A\cap(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in B\cup C\\
&\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } (x\in B \text{ 或 } x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A \text{ 且 } x\in B) \text{ 或 } (x\in A \text{ 且 } x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\cap B \text{ 或 } x\in A\cap C\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap B)\cup(A\cap C),
\end{aligned}
$$

所以 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(2) 先证明 $A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cap(A-C)$. 事实上, 对任意的 x, 若 $x\in A-(B\cup C)$, 则 $x\in A$ 但 $x\notin B\cup C$, 故 $x\in A$ 但 $x\notin B$, 并且 $x\in A$ 但 $x\notin C$, 所以 $x\in A-B$ 并且 $x\in A-C$, 于是有 $x\in(A-B)\cap(A-C)$. 因此,

$$A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cap(A-C).$$

再证明 $(A-B)\cap(A-C)\subseteq A-(B\cup C)$. 事实上, 对任意的 x, 若 $x\in(A-B)\cap(A-C)$, 则 $x\in A-B$ 并且 $x\in A-C$, 故 $x\in A$ 但 $x\notin B$, 并且 $x\in A$ 但 $x\notin C$, 所以 $x\in A$ 但 $x\notin B\cup C$, 于是有 $x\in A-(B\cup C)$. 因此,

$$(A-B)\cap(A-C)\subseteq A-(B\cup C).$$

综上所述, $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ 成立.

例 1.6 设 $A\cup C=B\cup C$, 且 $A\cap C=B\cap C$, 试证 $A=B$.

证 根据 $A\cup C=B\cup C$ 并且 $A\cap C=B\cap C$, 再由定理 1.1 中的集合恒等式, 有

$$
\begin{aligned}
A&=A\cup(A\cap C) && (\text{吸收律})\\
&=A\cup(B\cap C) && (A\cap C=B\cap C)\\
&=(A\cup B)\cap(A\cup C) && (\text{分配律})\\
&=(A\cup B)\cap(B\cup C) && (A\cup C=B\cup C)\\
&=(B\cup A)\cap(B\cup C) && (\text{交换律})\\
&=B\cup(A\cap C) && (\text{分配律})\\
&=B\cup(B\cap C) && (A\cap C=B\cap C)\\
&=B. && (\text{吸收律})
\end{aligned}
$$

例 1.7 化简 $((A\cup(B-C))\cap A)\cup(B-(B-A))$.

解 $((A\cup(B-C))\cap A)\cup(B-(B-A))$

$$
\begin{aligned}
&=A\cup(B-(B-A))=A\cup(A\cap B)\\
&=A.
\end{aligned}
$$