



数学理论与应用系列

离散数学 (第二版)

■ 胡新启 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



数学理论与应用系列

离散数学

(第二版)

■ 胡新启 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/胡新启编著. —2版. —武汉: 武汉大学出版社, 2014. 9
(数学理论与应用系列)

ISBN 978-7-307-14444-6

I. 离… II. 胡… III. 离散数学 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 224320 号

责任编辑:顾素萍

责任校对:汪欣怡

版式设计:马佳

出版发行: **武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷: 湖北民政印刷厂

开本: 720 × 1000 1/16 印张: 21.5 字数: 358 千字 插页: 1

版次: 2007 年 11 月第 1 版 2014 年 9 月第 2 版

2014 年 9 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-14444-6 定价: 39.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。



前 言

离散数学是高等院校应用数学专业及相关专业重要的专业基础课。一方面，它为相关专业课如数据结构、编译系统、操作系统、数据库、信息管理系统等提供必要的数学基础；另一方面，通过离散数学的学习，可以培养学生的逻辑思维能力与抽象思维能力。

离散数学涉及的内容非常广泛，不同的作者往往有不同的选材内容。本书主要介绍集合论、代数系统、图论、数理逻辑等四部分内容，这和大多数离散数学教材差不多。本书的主要特点有：

- (1) 内容组织上层次分明，结构清晰；
- (2) 叙述严谨，重点突出，深入浅出，便于自学；
- (3) 对部分定理只给出了直观解释，没有给出证明，主要是为了重点突出，避免舍本逐末；
- (4) 书中各章配有大量的例题与习题，希望培养与提高学生运用基础理论来分析问题、解决问题的能力。

本书是编者在长期从事离散数学教学工作的基础上，分析比较了国内外同类型教材编写而成的。编者对这些教材的作者们表示衷心感谢！本书作为教材，主要适用于应用数学专业的本科生，同时也适用于计算机科学与工程及其他专业和层次的学生。

离散数学教学大多安排 72 学时，也有 54 学时或 108 学时的，可根据教学学时的多少，选讲其中部分内容。少数内容可供学有余力的同学们自学。

尽管编者竭尽全力，但由于水平有限，书中难免仍有不妥甚至错误之处，恳请广大读者和同行提出宝贵意见。

编 者

2014 年 6 月



目 录

第 1 章 集合	1
1.1 集合的基本概念	1
1.2 子集与集合的相等	3
1.3 集合的运算及其性质	5
1.4 幂集	11
1.5 序偶与笛卡儿积	13
1.6 集合的覆盖与划分	15
1.7 基本计数原理	15
1.7.1 鸽巢原理 (抽屉原理)	15
1.7.2 容斥原理	16
1.8 本章小结	19
习题 1	19
第 2 章 关系	23
2.1 关系的定义及表示	23
2.1.1 关系的定义	23
2.1.2 关系的表示	25
2.2 关系的运算	27
2.2.1 关系的基本运算	27
2.2.2 逆关系	29
2.2.3 复合关系	30
2.3 关系的基本类型	33
2.4 关系的闭包	39
2.5 等价关系与集合的划分	45
2.6 相容关系与集合的覆盖	48
2.7 偏序关系	49



2.8 本章小结	54
习题 2	55
第 3 章 函数	62
3.1 函数的基本性质	62
3.1.1 函数的基本概念	62
3.1.2 函数的基本性质	64
3.1.3 几个常用的函数	68
3.2 函数的复合、反函数	69
3.2.1 函数的复合	69
3.2.2 反函数	71
3.3 本章小结	73
习题 3	73
第 4 章 代数系统	77
4.1 代数运算与代数系统	77
4.1.1 代数运算	77
4.1.2 代数系统	84
4.1.3 同态与同构	86
4.2 同余关系与商代数	88
4.3 半群和生成元	90
4.4 群	92
4.4.1 群及其性质	92
4.4.2 元素的周期、循环群	97
4.4.3 子群的定义与判定	100
4.4.4 群的同态	102
4.4.5 陪集、正规子群、基本同态	105
4.5 环和域	110
4.5.1 环	110
4.5.2 子环与理想	113
4.5.3 环同态与环同构	114
4.5.4 域	117
4.6 本章小结	118



习题 4	119
第 5 章 格与布尔代数	125
5.1 格的定义	125
5.2 子格与格同态	131
5.3 特殊格	134
5.4 布尔代数	137
5.5 有限布尔代数的表示定理	140
5.6 本章小结	144
习题 5	144
第 6 章 图论	148
6.1 图的基本概念	148
6.1.1 基本术语	148
6.1.2 节点的度	150
6.1.3 子图	153
6.1.4 图的同构	153
6.1.5 通路与回路	155
6.2 连通性	157
6.2.1 无向图的连通性	157
6.2.2 有向图的连通性	161
6.3 图的矩阵表示	163
6.3.1 无向图的关联矩阵和邻接矩阵	163
6.3.2 有向图的关联矩阵和邻接矩阵	165
6.4 最短路径问题	167
6.5 欧拉图与哈密尔顿图	172
6.5.1 欧拉图	172
6.5.2 哈密尔顿图	176
6.6 平面图	182
6.7 图的着色	187
6.8 本章小结	191
习题 6	192



第 7 章 树	203
7.1 无向树	203
7.2 生成树	207
7.3 根树	210
7.4 赋权树	215
7.5 应用举例	218
7.5.1 二叉树	218
7.5.2 前缀码	219
7.5.3 波兰表示法	221
7.6 本章小结	223
习题 7	223
第 8 章 命题逻辑	227
8.1 命题及其符号化	227
8.1.1 命题与命题变元	227
8.1.2 命题联结词	230
8.2 命题公式	235
8.2.1 命题公式及其真值	235
8.2.2 命题公式的等值式	240
8.2.3 命题公式的逻辑蕴含式	245
8.2.4 全功能联结词集合	247
8.3 范式及其应用	248
8.3.1 析取范式与合取范式	248
8.3.2 主范式	250
8.3.3 范式的应用	255
8.4 命题演算的推理理论	256
8.5 本章小结	260
习题 8	261
第 9 章 谓词逻辑	266
9.1 谓词逻辑命题的符号化	266
9.1.1 个体与谓词	266
9.1.2 量词	268

9.2 谓词公式及其真值	271
9.2.1 谓词公式	271
9.2.2 谓词公式的真值	273
9.2.3 谓词公式的等值式	276
9.3 谓词公式的前束范式	281
9.4 重言蕴含式与推理规则	285
9.4.1 重言蕴含式	285
9.4.2 推理规则	287
9.5 本章小结	290
习题 9	290
习题答案	295
附 录	313
参考文献	333



第 1 章 集 合

集合是数学中的基本概念，集合论观点目前已渗透到现代数学的各个领域。本章主要介绍集合论的基础知识，包含集合的定义与表示，集合的运算及相关性质，集合的幂集，笛卡儿积，集合的覆盖与划分以及有限集合的计数等。

1.1 集合的基本概念

集合是数学中没有给出精确定义的基本的最原始的数学概念，只能给出它的描述，这正如平面几何里的“点”、“线”、“面”作为最原始的概念不加定义一样。

一般来说，将具有共同性质的一些对象汇集成的一个整体称为一个集合。如自然数集、实数集、全部英文字母形成的集合、C 语言的全体基本字符形成的集合等。通常用大写英文字母表示集合，如 A, B, X 等。组成一个集合的不再细分的个体（或对象），称为元素，常用小写英文字母表示，如 a, b, x 等。若 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于集合 A ，记为 $a \in A$ ；用 $x \notin X$ 表示元素 x 不在集合 X 中。当 $a_1 \in A, a_2 \in A, \dots, a_n \in A$ 时，常简写为 $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ 。元素与集合之间是属于或者不属于的关系，两者必有且只有一个成立。

“集合”、“元素”和“属于”是关于集合的三个基本概念，它们是未加形式定义的原始概念，仅作了上面的直观描述。集合论中的其他概念，均可由此三个概念出发，给出严格的定义。

常用的表示集合的方法有列举法和描述法两种。

列举法（或枚举法）是列出集合中的所有元素（元素较少时），或列出足够多的元素（元素较多或无穷时）以反映集合中元素的特征，其间用逗号相隔，放在花括号内，如 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{a, b, \text{春}, \text{夏}, \text{秋}, \text{冬}\}$ ，



$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbf{I}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, $\mathbf{P}_m = \{1, 2, \dots, m\}$. 有限集都可用列举法表示.

描述法是将集合中元素应当满足的条件描述出来, 如:

$$B = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}\}, \quad C = \{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } -1 < x < 1\}$$

等. 一般来说, 设集合 $A = \{x \mid P(x)\}$, 是指 A 中元素 x 均具有性质 $P(x)$, 而凡具有性质 $P(x)$ 的元素 x 均在集合 A 中.

上述两种表示法中, 列举法适用于元素不太多或元素的规律比较明显、简单的情况, 而描述法则刻画了集合中元素的共同特征.

对于某些有规律的无限集, 例如: 其元素与自然数可建立一一对应的关系的集合, 也可使用列举法表示, 如 $C = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$. 这种表示一定得让人能看出其元素间的规律.

虽然此处给出了集合的两种表示方法, 但这一说明并不是十分准确的, 并且我们也并不十分在意到底用的是何种表示方法, 例如也可通过集合的运算, 如 $X = A \cup (B - C)$, 来表示集合 X , 或其他方式, 如递归定义, 来表示集合等.

集合由它的元素所确定, 集合也简称集. 集合中的元素具有如下性质:

- 确定性. 对一个具体的集合来说, 其元素是确定的. 对集合 A , 任一元素 a 或者属于 A 或者不属于 A , 两者必居其一.
- 无重复性. 集合中的元素彼此不同. 这与后面图论中涉及的多重集合不同, 那里因为特殊的原因允许有重复的元素. 例如: 我们认为 $\{a, a, b\} = \{a, b\}$.
- 无序性. 集合中的元素无顺序. 如: $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$.
- 抽象性. 集合中的元素是抽象的, 甚至可以是集合. 如: $A = \{1, \alpha, \{1\}\}$, 这里 $\{1\}$ 是一个集合, 同时又是 A 中的一个元素.

例 1.1 设 $A = \{a, \{a, b\}, \{1, 2\}\}$. 可以看出, $a \in A$, 但 $b \notin A$; $1 \in \{1, 2\}$, 但 $1 \notin A$. 集合 A 中仅含有 3 个元素, 即 $a, \{a, b\}, \{1, 2\}$.

经常用到的几个集合有:

\mathbf{N} ——自然数集 (包含整数 0);

\mathbf{Z} ——整数集;

\mathbf{Q} ——有理数集;

\mathbf{R} ——实数集;

C——复数集.

空集和全集是两个特殊的集合,在集合论中的地位很重要.不含任何元素的集合称为**空集**,用 \emptyset 或 $\{\}$ 表示.在所讨论的问题中,所涉及的全体对象构成的集合称为**全集**(也称为论域),通常用 U 或 E 表示.全集随着研讨问题的不同而不同.不同问题可以取不同的全集,甚至对同一问题也可以取不同的全集,例如平面几何问题,可以把整个平面作为全集,也可以将整个三维空间作为全集.

集合中元素的个数可以是有限的,也可以是无限制的,前者所对应的集合称为**有限集**,后者所对应的集合称为**无限集**.若 A 是有限集,用 $|A|$ 表示 A 中元素的数目,并称之为集合的**基数**, $|A|$ 也可记为 $\text{card}(A)$ 或 $\kappa(A)$.显然有 $|\emptyset|=0$.我们将含有 n 个元素的集合简称为 **n 元集**.

1.2 子集与集合的相等

包含与相等是集合间的两种基本关系,也是集合论中的两个基本概念.

定义 1.1 设有 A, B 两集合.若 B 中的每个元素都是 A 中的元素,则称 B 是 A 的**子集**,也称 B 包含于 A ,或 A 包含 B ,记为 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$.若 B 是 A 的子集,且 A 中至少有一个元素不属于 B ,则称 B 为 A 的**真子集**,记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$,也称 B 真包含于 A ,或 A 真包含 B .

例如: 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1\}$, 则有 $B \subset A$, $A \supseteq A$, $\mathbb{N} \supset B$.

通常用“ \Leftrightarrow ”表示“当且仅当”或“等价于”,则根据定义有

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B, \text{有 } x \in A;$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B, \text{有 } x \in A, \text{且 } \exists x_0 \in A, \text{使 } x_0 \notin B.$$

由此可得出: $B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x_0 \in B, x_0 \notin A$.

这里“ \forall ”表示对任意的,对每一个;“ \exists ”表示存在某个.以后不再说明.

由定义可知:对任意的集合 A ,有 $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$.特别地,有 $\emptyset \subseteq \emptyset$.称集合 A 的子集 \emptyset 和 A 为 A 的**平凡子集**;任何集合都是全集的子集.

事实上,假设存在集合 A ,使 $\emptyset \not\subseteq A$,则 $\exists x \in \emptyset, x \notin A$,这与空集 \emptyset 的定义矛盾.



由定义易得: 空集是唯一的.

注意符号 \in 和 \subseteq 意义的区别. \in 表示元素与集合之间的从属关系, 而 \subseteq 表示集合与集合之间的包含关系. 由于集合的抽象性, 集合中的元素可以是集合, 故可以发生如 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$ 的情形. $A \in B$ 表示集合 A 是集合 B 中的一个元素; $A \subseteq B$ 表示集合 A 中的每个元素都是集合 B 中的元素.

定义 1.2 若两集合 A 与 B 包含的元素相同, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 也可解释为: 若 A 是 B 的子集且 B 是 A 的子集, 则称 A 与 B 相等, 即

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A.$$

例如: $A = \{1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 则显然有 $A = B$.

说明 要证明两个集合相等, 只需证明两集合互为子集或互相包含即可. 这是证明集合相等的基本思路和依据. 从这个定义可以推证, 两集合相等当且仅当它们有完全相同的元素. 下一章“关系”中, 很多地方涉及证明两关系相等, 由于关系实际上是一种特殊的集合, 因此也可用集合相等的证明方法来证明.

若 A 与 B 不相等, 则 $B \not\subseteq A$ 和 $A \not\subseteq B$ 至少有一个发生.

注意 $\{a\} \neq \{\{a\}\}$, 因为 $\{a\}$ 与 $\{\{a\}\}$ 中元素不相同, 一个是 a , 另一个是 $\{a\}$. 又如 $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, 但 $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

例 1.2 列出下列集合的子集:

(1) $A = \{a, \{b\}, c\}$;

(2) $B = \{\emptyset\}$;

(3) $C = \emptyset$.

解 (1) 因为 \emptyset 是任何集合的子集, 所以 \emptyset 是集合 A 的子集; 由 A 的任何一个元素构成的集合, 都是 A 的子集, 所以 $\{a\}, \{\{b\}\}, \{c\}$ 是 A 的子集; 由 A 的任何两个元素构成的集合, 都是 A 的子集, 所以 $\{a, \{b\}\}, \{a, c\}, \{\{b\}, c\}$ 是 A 的子集; 由 A 的任何 3 个元素构成的集合, 都是 A 的子集, 所以 $\{a, \{b\}, c\} = A$ 是 A 的子集. 于是集合 A 的所有子集为 (共 8 个)

$\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{c\}, \{a, \{b\}\}, \{a, c\}, \{\{b\}, c\}, \{a, \{b\}, c\}$.

(2) 理由同(1), B 的子集有 $\emptyset, \{\emptyset\}$.

(3) \emptyset 是 C 的子集. 因为 C 中没有元素, 所以 C 没有其他子集, 故 C 的子集只有 \emptyset .



例 1.3 设集合 $A = \{2, a, \{3\}, 4\}$, $B = \{\{a\}, b, 1\}$, 判定下列命题是否正确, 并说明理由.

- (1) $\{a\} \in A$; (2) $\{a\} \in B$;
 (3) $\{\{a\}, b, 1\} \subset B$; (4) $\{3\} \subseteq A$;
 (5) $\{\emptyset\} \subseteq B$; (6) $\emptyset \subseteq \{\{3\}, 4\}$.

解 (1) 错误. A 中无元素 $\{a\}$.

(2) 正确. 虽然 $\{a\}$ 是一个集合, 但它又是 B 中的一个元素, 应该用从属关系.

(3) 错误. 集合 $\{\{a\}, b, 1\}$ 与 B 是相同集合, 但 $\{\{a\}, b, 1\}$ 不是 B 的真子集.

(4) 错误. A 中无元素 3, 虽然 $\{3\}$ 是一个集合, 但它只是 A 中的一个元素, 不能用包含关系.

(5) 错误. 因为集合 B 中没有元素 \emptyset , 所以 $\{\emptyset\}$ 不是 B 的子集.

(6) 正确. 因为 \emptyset 是任意一个集合的子集.

说明 集合与集合之间是一种包含关系, 用“ \subseteq ”或“ \supseteq ”表示, 而元素与集合之间是一种从属关系, 用“ \in ”表示, 因此, 将集合的元素看做子集, 用包含关系表示, 或者将集合的子集看做元素, 用从属关系表示都是错误的.

1.3 集合的运算及其性质

给定集合 A 和 B , 可以通过集合的并 \cup 、交 \cap 、相对补 $-$ 、绝对补 $\bar{}$ 、对称差 \oplus 等运算产生新的集合, 这也是表示集合的一种方法.

定义 1.3 任意两集合 A 与 B 的并是一个集合, 它由所有至少属于 A 或 B 之一的元素所构成, 记为 $A \cup B$.

任意两集合 A 与 B 的交是一个集合, 它由所有属于 A 且属于 B 的元素所构成, 记为 $A \cap B$.

任意两集合 A 与 B 的差是一个集合, 它由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成, 记为 $A - B$ (或 $A \setminus B$), 也称为 B 相对 A 的补集.

任意两集合 A 与 B 的对称差 (也称为环和) 是一个集合, 它由所有属于 A 不属于 B 和属于 B 不属于 A 的元素所构成, 记为 $A \oplus B$ (有教材记为 $A \Delta B$).



集合 A 的补集是一个集合, 它由所有不属于 A 的元素所构成, 记为 \bar{A} (或 $\sim A, A^c, A'$ 等), 也称为 A 的绝对补集.

对任意两集合 A 与 B , 若 $A \cap B = \emptyset$, 即 A 与 B 没有公共的元素, 则称 A 与 B 是不相交的.

由以上定义, 有

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}, \quad A \oplus B = (A - B) \cup (B - A),$$

$$\bar{A} = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}.$$

例 1.4 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d\}$, $A = \{1, 2, a, b, c\}$, $B = \{2, 3, b, d\}$, 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c, d\}, \quad A \cap B = \{2, b\},$$

$$A - B = \{1, a, c\}, \quad B - A = \{3, d\},$$

$$A \oplus B = \{1, 3, a, c, d\}, \quad \bar{A} = \{3, 4, d\}.$$

上面集合的并和交的定义可以推广到 n 个集合的并和交:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

上面定义中若 $n=1$, 约定 $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1$, $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1$.

并和交的运算还可推广到无穷集合的情形. 设 J 为一非空指标集, 则有

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x | \exists j_0 \in J, x \in A_{j_0}\},$$

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \{x | \forall j \in J, x \in A_j\}.$$

集合之间的相互关系和运算可以用文氏图 (Venn 图) 形象描述. 它的优点是形象直观、易于理解, 缺点是理论基础不够严谨, 因此只能用于说明, 不能用于证明.

在文氏图中, 用矩形代表全集 U , 矩形内部的点表示全集中的全体元素, 用 (椭) 圆或其他闭曲线代表 U 的子集, 其内部的点表示不同集合的元素, 并将运算结果得到的集合用阴影部分表示. 图 1-1 中各图分别表示 5 种基本运算, 阴影 (斜线) 部分表示经过相应运算得到的集合.

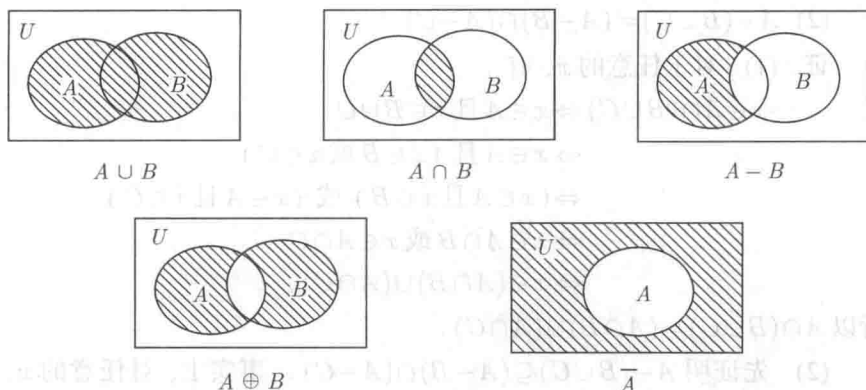


图 1-1

集合的运算具有下面一些基本性质:

定理 1.1 对于全集 U 的任意子集 A, B, C , 有表 1-1.

表 1-1

等幂律	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
结合律	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
交换律	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
分配律	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
同一律	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
零律	$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
双补律	$A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
德·摩根律 (De Morgan)	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
吸收律	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
对合律		$\overline{\bar{A}} = A$

关于上面结论, 我们选分配律的第一个式子和德·摩根律的第三个式子来证明, 其他请读者自证.

例 1.5 证明:

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;



$$(2) A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$

证 (1) 对于任意的 x , 有

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ 且 } x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ 且 } (x \in B \text{ 或 } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ 且 } x \in B) \text{ 或 } (x \in A \text{ 且 } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ 或 } x \in A \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

所以 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(2) 先证明 $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)$. 事实上, 对任意的 x , 若 $x \in A - (B \cup C)$, 则 $x \in A$ 但 $x \notin B \cup C$, 故 $x \in A$ 但 $x \notin B$, 并且 $x \in A$ 但 $x \notin C$, 所以 $x \in A - B$ 并且 $x \in A - C$, 于是有 $x \in (A - B) \cap (A - C)$. 因此,

$$A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C).$$

再证明 $(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C)$. 事实上, 对任意的 x , 若 $x \in (A - B) \cap (A - C)$, 则 $x \in A - B$ 并且 $x \in A - C$, 故 $x \in A$ 但 $x \notin B$, 并且 $x \in A$ 但 $x \notin C$, 所以 $x \in A$ 但 $x \notin B \cup C$, 于是有 $x \in A - (B \cup C)$. 因此,

$$(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C).$$

综上所述, $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ 成立.

例 1.6 设 $A \cup C = B \cup C$, 且 $A \cap C = B \cap C$, 试证 $A = B$.

证 根据 $A \cup C = B \cup C$ 并且 $A \cap C = B \cap C$, 再由定理 1.1 中的集合恒等式, 有

$$A = A \cup (A \cap C) \quad (\text{吸收律})$$

$$= A \cup (B \cap C) \quad (A \cap C = B \cap C)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{分配律})$$

$$= (A \cup B) \cap (B \cup C) \quad (A \cup C = B \cup C)$$

$$= (B \cup A) \cap (B \cup C) \quad (\text{交换律})$$

$$= B \cup (A \cap C) \quad (\text{分配律})$$

$$= B \cup (B \cap C) \quad (A \cap C = B \cap C)$$

$$= B. \quad (\text{吸收律})$$

例 1.7 化简 $((A \cup (B - C)) \cap A) \cup (B - (B - A))$.

解 $((A \cup (B - C)) \cap A) \cup (B - (B - A))$

$$= A \cup (B - (B - A)) = A \cup (A \cap B)$$

$$= A.$$