# 线性代数

## 学习指导

胡建华 程林凤 魏琦瑛 编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

# 线性代数学习指导

胡建华　程林凤　魏琦瑛　编

中国矿业大学出版社

## 内 容 提 要

本书是学习《线性代数》的辅导书，与本书作者编写的《线性代数》(高等教育出版社，2013)配套使用。全书共分六章，内容包括线性方程组、矩阵、行列式及其应用、向量空间、特征值与特征向量、实对称矩阵与实二次型，同时每章配有主要知识归纳、典型例题、习题解答，章末还有综合例题分析及总习题解答。书后附有四套模拟试题及详细的答案，以供读者自学、提高之用。

本书可作为高等学校非数学类各专业本科生同步学习、复习应试和备考研究生的参考用书，也可供教师、科技工作者参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数学习指导 / 胡建华，程林凤，魏琦瑛编.
徐州：中国矿业大学出版社，2014.8
ISBN 978-7-5646-2454-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①胡…②程…③魏… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ①.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 193510 号

**书　　名** 线性代数学习指导
**编　　者** 胡建华　程林凤　魏琦瑛
**责任编辑** 何晓明　杨传良
**出版发行** 中国矿业大学出版社有限责任公司
(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
**营销热线** (0516)83885307　83884995
**出版服务** (0516)83885767　83884920
**网　　址** http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
**印　　刷** 江苏淮阴新华印刷厂
**开　　本** 787×960　1/16　**印张** 16.25　**字数** 309 千字
**版次印次** 2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷
**定　　价** 24.00 元

# 前　言

本书是学习《线性代数》的辅导书，与本书作者编写的《线性代数》（高等教育出版社，2013）配套使用。全书共分六章：线性方程组、矩阵、行列式及其应用、向量空间、特征值与特征向量、实对称矩阵与实二次型。

本书的主要架构如下：

一、每节分为三部分。第一部分是主要知识归纳，把本节主要知识简明扼要地进行归纳总结；第二部分是典型例题，选择一定数量的典型例题进行分析解答；第三部分是部分习题解答，选择教材上有一定难度的习题给出详细解答。

二、每章最后是本章小结，其中又分为三部分。第一部分是对本章内容的补充说明，这部分内容是对教材内容的补充和扩展；第二部分是综合例题分析，选择大量的综合例题给予分析解答；第三部分是对总习题解答，这部分对总习题全部进行了详细解答。

三、本书最后给出了四套模拟试题并附有详细的分析解答，以供读者自学、提高之用。

由于编者水平所限，书中难免有缺点、错误，欢迎读者及同行批评指正。

**编　者**

2014 年 8 月

# 目　录

# 第一章　线性方程组

## 本 章 导 读

线性方程组的求解方法以及有无解的判别理论是线性代数的核心内容之一. 本章对线性方程组主要解决以下两个问题：

(1) 解的存在性，即如何判别线性方程组有无解. 若有解，其解是否唯一.

(2) 如何求通解，即若有解，如何求出全部解.

解决以上两个问题所采用的方法都是初等行变换法，其中心思想是把复杂的方程组化为与之等价的简单方程组来判别或求解.

### 本章的理论体系

(1) 等价方程组同时有解或同时无解. 当有解时，它们的解集是相同的，此时又称它们是同解方程.

(2) 任一矩阵都可通过初等行变换化为阶梯形矩阵，进而再化为最简阶梯形矩阵.

(3) 线性方程组解的情况只有三种：① 无解；② 有唯一解；③ 有无穷多解.

这里需要指出的是，本章所讨论的线性方程组都是“具体的”线性方程组(即其系数与右端项由数字或参数具体给出)，至于“抽象的”线性方程组(其形式为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$)的求解问题以及有无解的判别要涉及矩阵的秩等知识，将在第四章中讨论.

### 本章的学习重点与基本要求

(1) 理解等价方程组同时有解或同时无解. 当有解时，它们的解集是相同的.

(2) 熟练掌握用初等行变换将矩阵化为阶梯形矩阵和行最简阶梯形矩阵.

(3) 熟练掌握用初等行变换法来判别线性方程组有无解以及求出通解.

# §1.1 线性方程组

## 一、主要知识归纳

(1) 含有 $m$ 个方程 $n$ 个未知量的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

其中,系数 $a_{ij}$ 及常数项 $b_i$ 为实数. 若线性方程组中常数项全为 0,即 $b_i=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$,则称方程组(1.1)为**齐次线性方程组**;否则,称为**非齐次线性方程组**.

(2) 若存在 $n$ 元有序数组$(s_1,s_2,\cdots,s_n)$满足方程组(1.1),即用它替换方程组(1.1)中的未知量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$后每个方程都成立,则称方程组(1.1)**有解**,否则称方程组(1.1)**无解**. 称满足方程组(1.1)的数组$(s_1,s_2,\cdots,s_n)$为该方程组的一个**解**,方程组(1.1)的解的全体也称为该方程组的**通解**.

(3) 线性方程组的初等变换

① 交换两个方程的位置;

② 在某个方程的两边同乘上一个非零的数;

③ 把某个方程的倍数加到另一个方程上.

(4) 对一个方程组实施初等变换得到另一个方程组,则称这两个方程组为**等价方程组**.

(5) 等价的方程组同时有解或同时无解. 当有解时,它们的解集是相同的,此时又称它们是**同解方程组**.

(6) 线性方程组解的情况只有三种:① 无解;② 有唯一解;③ 有无穷多解.

## 二、典型例题

**例 1** 判别方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=1 \\ x_1-\ \ x_2-6x_3-\ \ x_4=0 \end{cases}$$

是否有解.

**解** 对方程组进行初等变换(每次都用①、②、③表示前面方程组的第 1、2、

3 个方程，下同）

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=0 \end{cases} \xrightarrow[③-①]{②-3\times①} \begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ -x_2-2x_3-2x_4=1 \\ -2x_2-4x_3-4x_4=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[③+②]{③\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ -x_2-2x_3-2x_4=1 \\ 0=1 \end{cases}$$

原方程组的等价方程组中出现了矛盾方程“0=1”，故原方程组无解.

**例 2**　解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 3x_1-x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=4 \end{cases}$$

**解**　对方程组进行初等变换

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ 3x_1-x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=4 \end{cases} \xrightarrow[③-2\times①]{②-3\times①} \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -7x_2-6x_3=-10 \\ -x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -x_2-x_3=-2 \\ -7x_2-6x_3=-10 \end{cases} \xrightarrow{-1\times②} \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ x_2+x_3=2 \\ -7x_2-6x_3=-10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{③+7\times②} \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ x_2+x_3=2 \\ x_3=4 \end{cases} \xrightarrow[②-1\times③]{①-1\times③} \begin{cases} x_1+2x_2=-1 \\ x_2=-2 \\ x_3=4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{①-2\times②} \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-2 \\ x_3=4 \end{cases}$$

因此，原方程组有唯一解：$x_1=3, x_2=-2, x_3=4$.

**例 3**　解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ x_1-2x_2+4x_3=-5 \\ 3x_1+8x_2-2x_3=13 \\ 4x_1-x_2+9x_3=-6 \end{cases}$$

**解**　对方程组进行初等变换

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+\ \ x_3=4\\ \ \ x_1-2x_2+4x_3=-5\\ 3x_1+8x_2-2x_3=13\\ 4x_1-\ \ x_2+9x_3=-6\end{cases}\xrightarrow{②\leftrightarrow①}\begin{cases}\ \ x_1-2x_2+4x_3=-5\\ 2x_1+3x_2+\ \ x_3=4\\ 3x_1+8x_2-2x_3=13\\ 4x_1-\ \ x_2+9x_3=-6\end{cases}$$

$$\xrightarrow[④-4\times①]{\substack{②-2\times①\\ ③-3\times①}}\begin{cases}x_1-\ \ 2x_2+\ \ 4x_3=-5\\ \qquad 7x_2-\ \ 7x_3=14\\ \quad 14x_2-14x_3=28\\ \qquad 7x_2-\ \ 7x_3=14\end{cases}\xrightarrow[②\times\frac{1}{7}]{\substack{③-2\times②\\ ④-②}}\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=-5\\ \qquad x_2-\ \ x_3=2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{①+2\times②}\begin{cases}x_1\qquad\quad+\ \ 2x_3=-1\\ \qquad x_2-\ \ \ x_3=2\end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases}x_1=-1-2x_3\\ x_2=2+x_3\end{cases}$$

令 $x_3=k$,则原方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-1-2k\\ x_2=2+k\\ x_3=k\end{cases}\qquad (k\in\mathbf{R})$$

## 三、部分习题解答

**3.** 判断三条直线 $x_1-4x_2=1$，$2x_1-x_2=-3$ 和 $-x_1-3x_2=4$ 是否有一个交点.

**解** 该问题可以转化为讨论方程组 $\begin{cases}\ \ x_1-4x_2=1\\ 2x_1-\ \ x_2=-3\\ -x_1-3x_2=4\end{cases}$ 是否有解的问题.

对方程组进行初等变换

$$\begin{cases}\ \ x_1-4x_2=1\\ 2x_1-\ \ x_2=-3\\ -x_1-3x_2=4\end{cases}\xrightarrow[③+①]{②-2\times①}\begin{cases}x_1-4x_2=1\\ \qquad 7x_2=-5\\ \quad -7x_2=5\end{cases}\xrightarrow{③+②}\begin{cases}x_1-4x_2=1\\ \qquad 7x_2=-5\end{cases}$$

再利用回代法,得到原方程组的解

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{13}{3}\\ x_2=-\dfrac{5}{7}\end{cases}$$

即三条直线有一个交点$\left(-\dfrac{13}{7},-\dfrac{5}{7}\right)$.

**4.** 当 $h,k$ 取何值时下列线性方程组有解？

$$\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2=h \\ -6x_1+3x_2=k \end{cases}$$

**解** 对方程组进行初等变换

$$\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2=h \\ -6x_1+3x_2=k \end{cases} \xrightarrow{②+3\times①} \begin{cases} 2x_1-x_2=h \\ \qquad 0=3h+k \end{cases}$$，则 $k+3h=0$ 时，方程组有解.

**6.** 将军点兵：已知某将军所统之兵在 500～1 000 之间，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问兵几何？

**解** 依题意可得：$3x+2=5y+3=7z+2$，其中 $x,y,z$ 是正整数.

解上面的方程组得

$$\begin{cases} x=\dfrac{5y+1}{3} \\ z=\dfrac{5y+1}{7} \end{cases}$$

设 $5y+1=21k$，其中 $k$ 是正整数，并且 $23<k<47$. 则 $k$ 可取 26，31，36，41，46，因此士兵人数为：$5y+3=21k+2$，分别是：548，653，758，863，968.

## §1.2 矩阵及其初等变换

### 一、主要知识归纳

1. 矩阵

一个 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m$ 行 $n$ 列的**矩阵**，简称为 $\boldsymbol{m\times n}$ **矩阵**，简记为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 称为**行矩阵**或 $\boldsymbol{n}$ **维行向量**；只有一列的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ 称为**列矩阵**或 $\boldsymbol{m}$ **维列向量**.

当 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为零时，称 $\boldsymbol{A}$ 为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}$.

2. 矩阵的初等行变换

下列变换称为矩阵的**初等行变换**：

(1) 对调行变换：对调矩阵的某两行(对调第 $i$ 行与第 $j$ 行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$)；

(2) 倍乘行变换：以数 $k(k\neq 0)$乘某行中的所有元素(第 $i$ 行乘非零数 $k$，记作 $kr_i$)；

(3) 倍加行变换：以数 $k$ 乘某行的每个元素加到另一行的对应元素上去(用数 $k$ 乘第 $j$ 行加到第 $i$ 行上去，记作 $r_i+kr_j$).

3. (行)阶梯形矩阵、(行)最简阶梯形矩阵

称形如下面的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&0&6\\0&0&0&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&4&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

为**(行)阶梯形矩阵**. 其特点是：非零行都在上方且每个非零行的第一个非零元素的左方、下方、左下方的元素全为零.

称形如下面的阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&5&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

为**(行)最简阶梯形矩阵**. 其特点是：阶梯形矩阵非零行第一个非零元素为 1，且这个 1 所在列的其他元素全为零.

对任一矩阵，总可以使用初等行变换化为阶梯形矩阵，进而再化为最简阶梯形矩阵.

## 二、典型例题

**例 1** 将矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}$$

用初等行变换化成行最简阶梯形矩阵.

**解**　对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&0&0&-1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\times r_3]{\substack{r_1+r_3\\r_4-4r_3}}\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

## 三、部分习题解答

**4**. 利用初等行变换将下列矩阵化为阶梯形矩阵，进而化为行最简阶梯形矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}1&-4&9&0\\0&1&-1&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}$;(2) $\begin{pmatrix}2&1&4&1\\1&0&1&-1\\3&1&5&2\end{pmatrix}$;(3) $\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&1&3&5\\4&2&4&6\\2&1&2&3\end{pmatrix}$

**解**　(1)

$$\begin{pmatrix}1&-4&9&0\\0&1&-1&3\\0&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&-4&9&0\\0&1&-1&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1-9r_3\\r_2+r_3}}\begin{pmatrix}1&-4&0&0\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+4r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&12\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix}2&1&4&1\\1&0&1&-1\\3&1&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\2&1&4&1\\3&1&5&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\0&1&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&1&3&5\\4&2&4&6\\2&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-4r_1}}\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&-1&-1&1\\0&-2&-4&-2\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{-\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&-1&-1&1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&1&1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&1&0&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

**5.** 设含未知量 $x_1,x_2,x_3$ 的非齐次线性方程组(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$,经过初等行变换化为以下形式:

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&0&0&-6\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix},\tilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-2\\0&0&0&3\end{pmatrix},\tilde{\boldsymbol{C}}=\begin{pmatrix}1&0&0&-6\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

试确定方程组(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)是否有解,有解时求出其解.

**解** $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 对应的方程组为$\begin{cases}x_1=-6\\x_2=2\\x_3=0\end{cases}$,该方程组与方程组(Ⅰ)同解,因此方程组(Ⅰ)有唯一解

$$\begin{cases}x_1=-6\\x_2=2\\x_3=0\end{cases}$$

$\tilde{\boldsymbol{B}}$ 对应的方程组为$\begin{cases}x_1=4\\x_2=-2\\0=3\end{cases}$,其中出现了矛盾方程“$0=3$”,而该方程组与方程组(Ⅱ)同解,因此方程组(Ⅱ)无解;

$\tilde{\boldsymbol{C}}$ 对应的方程组为$\begin{cases}x_1=-6\\x_2=2\end{cases}$,而该方程组与方程组(Ⅲ)同解,因此方程组

(Ⅲ)的解为

$$\begin{cases} x_1=-6 \\ x_2=2 \\ x_3=k \end{cases} \quad (k\in\mathbf{R})$$

**6.** 若含未知量 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 的齐次线性方程组(Ⅰ)、(Ⅱ)对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$,经过初等行变换化为如下形式:

$$(1)\ \widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&7&3&4\\0&1&-1&3\\0&0&0&1\\0&0&1&-2\end{pmatrix};\quad (2)\ \widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-3&0\\0&0&1&-3\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$$

求原方程组的解.

**解** (1) $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是原齐次线性方程组同解方程组对应的矩阵,为了清楚地得到原方程组的解,我们可以将 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 继续进行初等行变换化为行最简阶梯形矩阵:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&7&3&4\\0&1&-1&3\\0&0&0&1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&7&3&4\\0&1&-1&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_4]{\substack{r_1-4r_4\\ r_2-3r_4}}\begin{pmatrix}1&7&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-3r_3}\begin{pmatrix}1&7&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-7r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\widetilde{\boldsymbol{C}}$$

$\widetilde{\boldsymbol{C}}$ 对应的齐次线性方程组仍然与原方程组同解,因此原方程组只有零解.

(2) 将 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 进行初等行变换化为行最简阶梯形矩阵:

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-3&0\\0&0&1&-3\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-3&0\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+3r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&-9\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-9\\0&1&0&-9\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则原方程组对应的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=9x_4\\x_2=9x_4\\x_3=3x_4\end{cases}$$

因此,方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=9k\\x_2=9k\\x_3=3k\\x_4=k\end{cases}\quad(k\in\mathbf{R})$$

# §1.3　线性方程组的矩阵解法

## 一、主要知识归纳

1. 系数矩阵与增广矩阵

称矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

为线性方程组(1.1) 的**系数矩阵**;称矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

为线性方程组(1.1)的**增广矩阵**.

2. 线性方程组解的存在性

(1) 非齐次线性方程组有解的充分必要条件是其增广矩阵的阶梯形矩阵中没有形如$(0,0,\cdots,0,b)$ $(b\neq0)$的行.

(2) 若非齐次线性方程组有解，则当其增广矩阵的阶梯形矩阵的非零行数

等于未知量个数时，该方程组有唯一解；当其增广矩阵的阶梯形矩阵的非零行数小于未知量个数时，该方程组有无穷多解.

(3) 齐次线性方程组至少有一个零解. 当其系数矩阵的阶梯形矩阵的非零行数等于未知量个数时，该方程组有唯一的零解；当其系数矩阵的阶梯形矩阵的非零行数小于未知量个数时，该方程组有非零解，也即有无穷多解.

(4) 若齐次线性方程组中未知量的个数大于方程的个数(即系数矩阵的列数大于行数)，则必有非零解.

## 二、典型例题

**例 1**　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 3x_1+5x_2+2x_3-2x_4=-10 \end{cases}$$

**解**　分三步进行：

第一步：对方程组的增广矩阵 $\tilde{A}$ 作初等行变换，化为阶梯形矩阵.

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 2 & -2 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -11 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3+4r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}r_3]{r_4-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 51 & 51 \end{pmatrix}$$

第二步：由阶梯形矩阵判断方程组解的情况. 上面阶梯形矩阵中没有出现形如$(0,0,0,0,b)$ $(b\neq 0)$的行. 故该方程组有解，且阶梯形矩阵的非零行数等于未知量个数，故有唯一解.

第三步：把阶梯形矩阵化为行最简形矩阵，写出同解方程组，求出方程组的解.

$$\tilde{A}\xrightarrow{\frac{1}{51}r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-3r_4]{\substack{r_3-9r_4 \\ r_2+4r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$