



工业和信息化部“十二五”规划教材
“十二五”国家重点图书出版规划项目

结构动力学

Dynamics of Structures

(第3版)

● 于开平 邹经湘 编著

 哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



工业和信息化部“十二五”规划教材
“十二五”国家重点图书出版规划项目

结构动力学

Dynamics of Structures

(第3版)

● 于开平 邹经湘 编著

内 容 简 介

本书主要讲述结构动力学领域的主要内容及最新科学技术成果,涵盖了线性假设下的结构动力学正反两方面的主要问题,包括单自由度、多自由度及连续体系统的确定性振动及随机振动分析的解析方法,结构动特性及动响应计算的数值方法,复杂结构动力学子结构方法,模态参数识别、动态荷载识别及有限元模型修正方法,振动测试技术、振动控制等,还简介了非线性振动。部分主要内容配有对应的辅助教学程序,以利于学生自学和实际应用。

本书可作为高等学校力学类、航空航天、机械和动力、土木建筑、船舶海洋工程专业本科生和研究生的教材,也可供有关工程技术人员参考。

Abstract

This book introduces the basic methods of mechanical vibrations and dynamics of structures as well as their latest scientific and technological achievements. The book covers both direct and inverse problems in structural dynamics based on a linear assumption, including analytic methods for deterministic and random vibration analysis of single-degree of freedom system, multi-degrees of freedom system, and continuous elastic body; numerical methods for dynamic characteristics and dynamic responses; substructure method for complex structural dynamics; identification of modal parameters and dynamic loads; model updating; vibration measurement techniques and vibration control, and it also brief introduces nonlinear vibration. Computer assisted instructional programs related to some parts of the core content are provided in order to help facilitate self-directed learning and practical application.

This book can be used as a textbook for undergraduates and postgraduates majoring in mechanics, aerospace engineering, mechanical engineering, power engineering, civil engineering, naval architecture and ocean engineering. It also can be used as a reference book for engineers and technicians.

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学/于开平,邹经湘编著.—3版.—哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2015.2
ISBN 978-7-5603-5059-2

I. ①结… II. ①于…②邹… III. ①结构动力学—
高等学校—教材 IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 285778 号

策划编辑 杜 燕
责任编辑 张 瑞
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 23.25 字数 530 千字
版 次 1996 年 3 月第 1 版 2015 年 2 月第 3 版
2015 年 2 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5059-2
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

第 3 版前言

本书第 2 版被列为“十一五”国家重点图书规划“航天工程丛书”系列之一,出版后一直被高等院校相关专业采用作为本科和研究生教材。通过多年的教学实践,以及读者提出的宝贵意见,我们发现第 2 版教材中与传统结构振动和振动理论教材内容相仿的前 4 章,有一些必要的内容需要补充。此外,在突出振动理论工程应用、数值计算等方面原教材也有充实的必要和空间,因此,编者对前 5 章和第 8 章做了较大修订,修订后被工业与信息化部列为“十二五”规划教材。通过本次修订,教材在振动理论的系统性、数值计算方法、随机振动理论与应用等方面都更加完善,内容更全面,更容易理解,学习手段更加丰富。

第 3 版主要由于开平教授修订,修订的内容主要有:

第 1 章单自由度,增加了等效刚度、等效质量、常力作用以及通过无阻尼简谐激振解释共振现象等内容,重点加强了阻尼部分的介绍,频响函数及其与脉冲响应函数关系相关内容也有所加强。补充重点内容的计算机辅助教学程序代码作为本章附录。

第 2 章整合了原书第 2、3 两章,统一按多自由度描述,理论统一、简洁。重点突出了模态分解和叠加内容,增加了多自由度系统频响函数及脉冲响应函数矩阵的介绍,给出了模态加速度法的证明,尤其重要的是增加了多自由度系统阻尼及其构造部分内容的介绍。刚体模态内容也有一定程度的加强。

第 3 章主要是原书第 4 章内容,补充了杆、梁的各种边界条件,轴向力对固有频率影响的求解过程,增加了剪切变形和转动惯量影响内容。

第 4 章以原书第 4 章近似方法内容为基础,增加了假设模态法、集中质量、有限元等离散化方法内容。

第 5 章补充了部分必要的矩阵特征值、特征向量基础知识,增加了广义逆幂迭代方法,以及各种特征值问题的常用求解方法特点介绍,增加了动响应数值求解的广义 $-\alpha$ 方法,补充了雅克比迭代、纽马克方等算法程序作为本章附录。

第 8 章重点加强了随机过程知识,加强了随机过程的空间描述,以便同以前学过的关于随机变量的概率统计知识有机结合,补充了随机过程运算内容。增加了多自由度系统随机响应计算的模态叠加法、虚拟激励法。将原书快速傅里叶变换算法部分整合到第 10 章。增加了必要的复杂积分计算公式作为本章附录。

改正了原书的一些印刷错误,删减了少部分重复的例题和章节,修正了部分表述。

本次修订,编者参考了很多前辈、同行的著作内容,虽都在本书“参考文献”中有所体现,但远不足以表达编者的敬仰和尊重,在此表示深深的谢意!对使用本书作为教材的同行、提出宝贵意见的读者以及在本书编辑过程中给予大力协助的编辑朋友也都一并表示感谢!

尽管编者力求进步和提高,但一定还有不完善之处,欢迎读者批评指正!

编 者

2015 年 1 月

2009 年第 2 版前言

本书自 1996 年出版以来,被评为黑龙江省重点图书,总共发行了 5000 余册,不仅作为哈尔滨工业大学本科生和研究生的教材,还被哈尔滨工程大学、西北工业大学等多个院校采用作为教学参考书和教科书,还被改为繁体字版在境外流行,得到各方面的广泛应用,并提出不少宝贵的意见,在此表示诚挚的感谢!

由于十多年来,结构动力学在理论和方法方面又有了一定的发展,为适应新形势的需要,作者决定对原书作出必要的修订。本版主要由邹经湘教授、于开平教授主编修订。修订的内容主要有:1)改正了原书一些排版和文字上的错误;2)对绪论和第七章(非线性振动)进行了重写;3)增加了第十一章(振动控制);4)第三章、第四章、第五章及第十章各加了一节。本书经修订后列入“十一五”国家重点图书出版规划。

随着科学技术的飞速发展,结构动力学内容也在不断更新,在航空航天、土木建筑、机械制造和交通运输等工程领域得到越来越广泛的应用。因此本书不仅可以作为高等院校本科生和研究生的教科书,也可以作为工程技术人员的参考书。

多年来,很多读者对本书提出了不少宝贵的意见和建议,作者在此表示真诚的感谢,很多意见都在第二版中有所反映,希望新版能得到广大读者的欢迎。

编 者

2009 年 2 月

1996 年第 1 版前言

结构动力学是研究结构在动荷载作用下动力学行为的科学,是 20 世纪中叶才发展起来的学科。结构动力学与机械振动学是紧密相关的学科,它是结构动力优化设计的基础。

现代工程结构,无论是航空、航天或动力工程都向大型、高速、大功率、轻结构、高精度的方向发展。这样,结构的动力学问题越来越多、越来越严重。例如现代的飞机事故中,由于力学原因引起的事故中有 90% 以上是振动疲劳引起的;机床的加工精度问题主要是机床振动引起的;导弹的命中精度也与发射装置的振动及弹体的振动有关。因此,工程师在设计产品时,必须考虑产品在工作中会发生的各种动力学问题或振动问题,称为动态设计或振动设计。例如设计汽轮发电机组时,首先要计算轴系的临界转速,叶片的固有频率等;在火箭设计时,必须计算弹体的固有频率和振型,同时还做很多动力学试验。结构动力学的最新发展,使结构设计从静态设计走向动态设计,从频率设计走向响应设计,从解耦分析走向耦合分析(如固体、液体耦合,结构系统与控制系统耦合,刚体运动与弹性体运动耦合等)。因此,现代设计是一个结构设计与分析迭代过程,即设计—分析—再设计—再分析,直至得到一个满意的设计过程。这样复杂的过程必须依赖计算机才能完成,称之为计算机辅助设计(CAD)。现代的大型 CAD 软件(如 I-DEAS)都集成了绘图、有限元分析、结构运动分析等模块。

传统的结构动力学只叙述结构动力学中的正问题,即已知结构参数和外荷载求结构的响应。随着学科的发展,结构动力学的反问题(参数辨识与荷载识别)变得越来越重要了。因此本书增加了参数辨识与荷载识别及振动测试等内容,结构动力学随着科学的发展发生了新的变化。

本书由邹经湘主编,其中绪论、第 1 章、第 8 章、第 9 章由邹经湘执笔,第 2 章、第 3 章、第 5 章由王本利执笔,第 4 章由孔宪仁执笔,第 6 章、第 7 章由王世忠执笔,第 10 章、第 11 章由屠良尧执笔。书中部分插图由邓樱绘制。

本书在编写过程中得到黄文虎院士的热心指导。

编者

1995 年 12 月

目 录

绪论	1
第 1 章 单自由度系统	5
1.1 引言	5
1.2 单自由度系统的振动微分方程(运动方程)	5
1.3 无阻尼自由振动	6
1.4 有阻尼自由振动	10
1.5 简谐激振	12
1.6 周期激振	21
1.7 单位脉冲激振和单位阶跃激振	23
1.8 任意激振	27
1.9 阻尼	28
习题	30
附录 重点内容辅助教学程序	32
第 2 章 多自由度系统	36
2.1 多自由度系统建模	36
2.2 多自由度系统无阻尼自由振动	44
2.3 多自由度系统的受迫振动	58
2.4 刚体模态和重特征值系统分析	73
习题	78
第 3 章 连续体结构振动的精确解法	82
3.1 直杆的纵向振动	82
3.2 圆轴的扭转振动	88
3.3 梁的横向自由振动	90
3.4 板的横向自由振动	99
3.5 连续体主振型的正交性	103
3.6 连续体的受迫振动	105
3.7 旋转结构振动	107
习题	110
第 4 章 连续体结构振动的近似解法	112
4.1 基于假设振型的近似解法	112
4.2 连续体结构动力学的离散化方法	120

习题	128
第 5 章 结构动力学中常用的数值方法	130
5.1 结构动特性数值解法	130
5.2 结构动力响应的数值解法	142
5.3 结构动力响应数值算法性能分析	149
习题	157
附录 动特性和动响应计算辅助教学程序	158
第 6 章 动态子结构方法	171
6.1 引言	171
6.2 固定界面模态综合法	173
6.3 自由界面模态综合法	181
6.4 其他方法	188
第 7 章 非线性振动	198
7.1 引言	198
7.2 相平面法——定性方法	202
7.3 摄动法	207
7.4 等效线性化方法	211
7.5 谐波平衡法	213
7.6 多尺度方法	214
7.7 非线性系统的受迫振动	217
7.8 自激振动	220
7.9 混沌	222
7.10 非线性振动的数值方法	224
第 8 章 随机振动	226
8.1 引言	226
8.2 随机过程的幅域描述	228
8.3 随机过程的时域描述	234
8.4 随机过程的频域描述	239
8.5 随机过程的运算	245
8.6 单自由度系统的随机响应	248
8.7 多自由度系统的随机响应	253
8.8 随机响应分析的虚拟激励方法	260
8.9 连续系统的随机响应	264
习题	269
附录 1 例 8.8 单自由度系统响应自相关函数计算用积分	269
附录 2 计算频响函数类函数平方的积分	270
第 9 章 模态分析与参数辨识	271
9.1 引言	271

9.2	复模态理论	272
9.3	导纳圆辨识方法	276
9.4	非线性优化方法	279
9.5	Ibrahim 时域法(ITD 法)	281
9.6	随机减量法	284
9.7	最小二乘复指数法(Prony 法)	285
9.8	动态荷载识别	287
9.9	结构数学模型修改	290
9.10	结构动态特征灵敏度分析	292
第 10 章	振动测试技术	297
10.1	引言	297
10.2	传感器与前置放大器	299
10.3	单自由度系统动态特性参数的测试技术	306
10.4	激振方法与激振设备	311
10.5	数字信号分析仪的原理与使用	317
10.6	几个专题	329
10.7	模态分析与试验及其在典型航天器结构中的应用	330
第 11 章	振动控制	333
11.1	引言	333
11.2	隔振	335
11.3	动力吸振	342
11.4	黏弹性阻尼减振	347
11.5	振动主动控制	351
参考文献	357

绪 论

1. 结构动力学的研究内容

飞机、火箭、汽车、船舶、房屋建筑和各种机器在工作时,都要承受一定的荷载,如飞机在飞行时要承受重力、升力、推力和阻力。房屋建筑除承受本身的重力外,还要承受来自外界的风力和地震荷载等。上述物体用来承受荷载的部件或整体称为结构(structure),荷载可以分为静荷载和动荷载(dynamic load)。静荷载是不随时间变化的,如重力和定常温度场的温度荷载;动荷载是随时间变化的,如风力荷载和地震荷载等,飞行器承受的荷载如推进系统的推力和在大气中飞行的气动荷载等,一般都是动荷载。其他动荷载还有点火启动时和级间分离时以及对接时的冲击荷载等。动荷载会引起结构变形和振动,甚至结构破坏,一般称之为响应(response)。结构动力学就是研究结构在动荷载作用下产生响应的规律的科学,或者可以说是研究结构、动荷载和响应三者关系的科学。

现代结构动力学研究的内容可以分为以下几个问题:

- (1) 已知结构和荷载求结构响应,称响应预估(response prediction);
- (2) 已知荷载和响应求结构参数或数学模型,称参数辨识(parameter identification) 或系统辨识(system identification);
- (3) 已知结构和响应求荷载,称荷载辨识(load identification);
- (4) 根据结构响应随时改变结构参数,或增加主动输入(控制力),改变结构响应,称结构控制(structure control) 或振动控制(vibration control);
- (5) 根据一定的目标和约束条件,选择结构参数,使结构设计达到最优,称结构优化设计(optimal design of structure)。

以上5个问题中,第一个问题称为结构动力学的正问题,是最基本的。第二、三个问题称为反问题,是现代结构动力学中的新问题。第四、五个问题也可称为结构动力学的反问题,是根据现代工程的需要而发展起来的,特别对航空航天工程,是非常重要的。

本书重点讲述正问题,适当介绍反问题。

2. 振动的分类

结构的响应一般表现为结构的振动,即结构在平衡位置附近的往复运动或往复变形。对于弹性结构来说,在动荷载作用下,振动几乎是不可避免的运动形式。振动的分类方法很多,可以分为单自由度系统的振动、多自由度系统的振动和连续弹性体的振动;也可分为自由振动和受迫振动,还可分为线性振动和非线性振动等。但从运动学的观点来看,大致可以分为以下4类振动:

- (1) 周期振动(periodic vibration)。振动量是时间的周期函数,可写为 $x(t) = x(t + T)$,其中 T 为常数,称为周期。周期振动中的一种典型的振动为简谐振动(harmonic vibration),简称谐振动,可写为 $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t + \alpha)$ 。周期振动可以用谐波

分析的方法展开为一系列谐振动的叠加,其频谱为离散谱,而且都是基频的倍频关系。

(2) 非周期振动(nonperiodic vibration)。振动量是时间的非周期函数,其频谱一般为连续谱,也可以是离散谱,但不同频率间不是倍频关系,而是无理数关系。例如,衰减振动和非线性振动中的混沌运动都是非周期振动。

(3) 瞬态振动(instantaneous vibration)。系统受到冲击引起的振动,当存在阻尼时,瞬态振动一般发生在很短的时间内。例如,火箭点火、空间飞行器对接时都会发生瞬态振动。和瞬态振动相对应的是稳态振动(steady vibration)。

(4) 随机振动(random vibration)。受偶然因素影响的一种不确定的振动,因为它服从统计规律,所以要用概率统计的方法来研究它。飞行器在大气中飞行时,由于气动噪声引起的振动和在地面运输时由于地面不平引起的振动都是随机振动。

3. 工程中的结构动力学问题

随着科学技术的飞速发展,各种工程结构和供应产品向大型、高速、大功率、高性能、高精度和轻结构方向发展,使得动力学问题越来越突出,越来越严重。例如,飞机由于强度问题引起的事故中,90%以上是振动疲劳造成的。高速公路的出现,必须对汽车的振动和噪声作深入的研究,以提高汽车的可靠性,促进了碰撞动力学的发展。高层建筑和大跨度桥梁的出现,必须事先对它作出精确的结构动力学分析和地震评估,也促进了结构动力学的发展。高速喷气飞机和火箭的出现,促进了随机振动的研究;大型空间飞行器的出现,使得多柔性体动力学研究更加深入;大型火箭的导航陀螺位置的安排,必须考虑火箭的振动模态形状。现代大型空间站及其太阳电池帆板的结构尺寸可以达到百米级,它在微重力下的动力学行为无法在地面试验和观察,必须作精确的动力学仿真,从而促进了结构动力学的发展。

在现代机械和结构设计中,一般来说,静强度已不成什么问题,但传统的经验设计、类比设计和静态设计方法已不能满足工程要求,必须进行结构动力学分析和动态设计,同时,结构动力学也是结构振动控制、结构动态优化设计、结构可靠性设计、结构健康监测和结构计算机辅助设计等学科的基础。

4. 结构动力学的研究方法

结构动力学的研究方法和一般工程技术科学的研究方法有很多相似之处,当然也有它自己的特点,大致可以分为以下3类方法,即分析方法、数值方法和试验方法。

(1) 分析方法。结构动力学的分析方法发展比较早,它和机械振动学、振动理论的发展是相关的。分析方法的首要任务是建模(modeling),即建立系统的力学模型(物理模型)和数学模型。建模的过程是对问题去粗取精、去伪存真的过程,模型反映问题的本质,是一种抽象。结构动力学的力学模型可分为离散模型(集中参数模型)和连续模型两大类,本书的单自由度系统和多自由度系统都是离散模型,而连续弹性体系统为连续模型。工程中的结构都是连续系统,但为了研究问题的方便和便于计算机处理,我们都把它处理为离散系统来研究,其中使用最多的方法就是有限元方法。结构动力学中的离散系统的数学模型多为常微分方程或常微分方程组,而连续弹性系统的数学模型常用偏微分方程。为了计算机处理的方便,我们又可将时间变量离散化,以上的数学模型都可以用代数方程来表示。

分析方法要求解数学方程,对一些简单问题可以得到问题的精确解,精确解可以方便地看到结果随参数变化的关系,可更直观地了解事物的本质。

(2) 数值方法。数值方法是随着计算机的发展而发展的,很多工程问题的数学模型,由于荷载变化的复杂性、结构的复杂性和边界条件的复杂性等,根本就得不到数学模型的精确解,因此必须寻求其数值解。

数值方法的计算模型可以从理论分析方法得到,也可以由各种近似方法得到,在工程中应用得最多的方法是有限元方法,已形成了很多商业软件。目前在结构动力学分析中使用最多的有 NASTRAN 和 ANSYS 等。

(3) 试验方法。试验方法是科学研究中最重要的方法,也是最直接的方法。在航空航天部门,结构动力学的试验是非常重要的,一般可以分为两大类试验:一类称为模态试验(modal test),模态试验又称为动力学特性试验,主要测试结构的固有频率(模态频率)和相应的振型(模态形状)以及阻尼等动力学特性。模态试验按激振的方式可分为正弦激振、脉冲激振和随机激振等,按激振器的多少,又可分为单点激振和多点激振两类;另一类称为环境试验,使用的设备主要是振动台,它可以利用振动台产生各种振动环境,使被试验的结构承受和在工作中相当的振动环境,以考核结构对动力学环境的承受能力。现在的振动台可分为单轴、三轴和多轴等类型,可以模拟各种振动环境。

结构动力学的建模方法很多,一般可分为正问题方法建模和反问题方法建模两类。正问题方法建模又称理论建模,建立的模型称分析模型(机理模型),因为正问题方法建模时,我们对系统(结构)有足够的了解,这样的系统称为白箱系统或透明箱系统(transparent box system)问题。建模的方法是首先将结构分为若干个简单的元件或元素(element),然后对每个元件和元素直接应用力学原理(如平衡方程、本构方程和哈密顿原理等)建立方程,再考虑几何约束条件综合建立系统的数学模型,这是传统的建模方法。如果所取的元素是一个无限小的单元,则所建立的是连续模型,如果所取的是一个元件或有限单元,则所建立的是离散模型。反问题建模方法适用于对系统不了解(称黑箱系统—black box system),或不完全了解(称灰箱系统—gray box system)的问题,它必须对系统进行动力学试验,然后利用系统的输入(动荷载)和输出(响应)的数据,根据一定的准则建立系统的数学模型。这种建模方法称系统辨识(system identification)或参数辨识(parameter identification),它也称为试验建模方法,所建立的模型称为统计模型。

现代结构动力学中,常将上述两种建模方法相结合建立系统的数学模型,如对一些大型复杂结构,可以先利用有限元方法建立系统的数学模型,然后再利用试验数据修改该数学模型,使得修改后的数学模型的输出数据与试验数据一致,这个过程称模型的修改或修正。一般来说,数学模型的规模越大,自由度越多,则模型的精度越高,但同时计算耗费越大,因此模型规模的选择要根据实际问题的需要来确定。例如图 0.1 阿波罗土星 5 号的各种计算模型,图 0.2 大型客车的车身和底盘的有限元模型。

振动控制是现代结构动力学的一个热门分支,有着广泛的应用前景。一般来说,振动控制可分为被动控制和主动控制两类,被动控制发展较早,主要是对结构增加阻尼或吸振器;主动控制是随着现代控制理论发展而发展起来的,主要是在结构的适当位置增加控制力(输入),以减低输入的能量,使结构的整体或局部的振动水平下降到要求范围以内。也可以通过随时改变结构的质量、刚度和阻尼等参数的方法,使系统振动得到控制,这种方法称为半主动控制。

本书前 4 章为结构动力学基础,其内容与一般机械动力学和振动理论相仿。第 5 章讲

结构动力学的数值方法,后六章讲结构动力学专题,如非线性振动、随机振动、振动控制等。

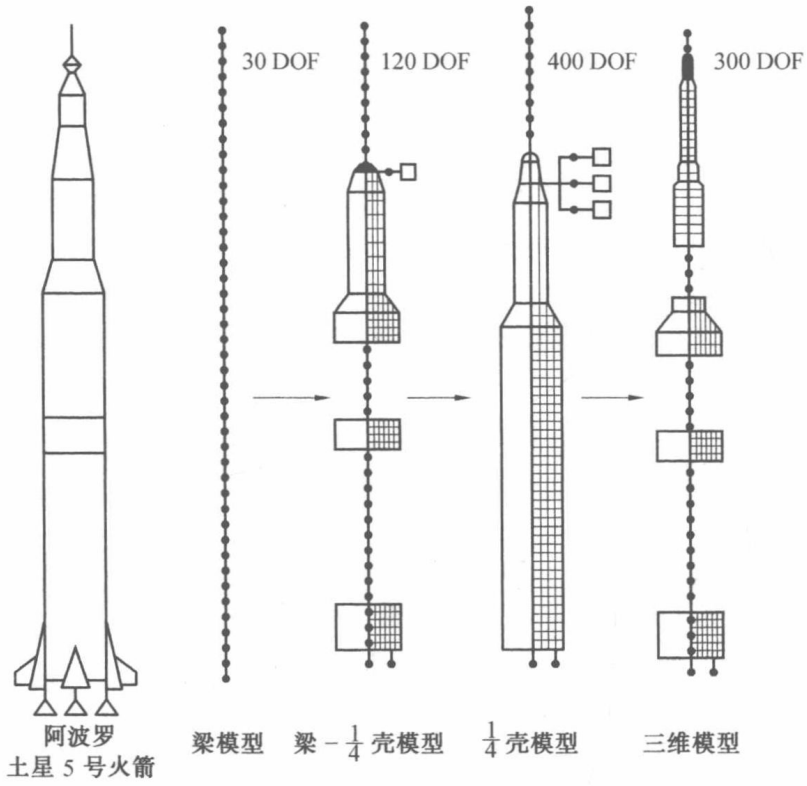


图 0.1 阿波罗土星 5 号的各种计算模型

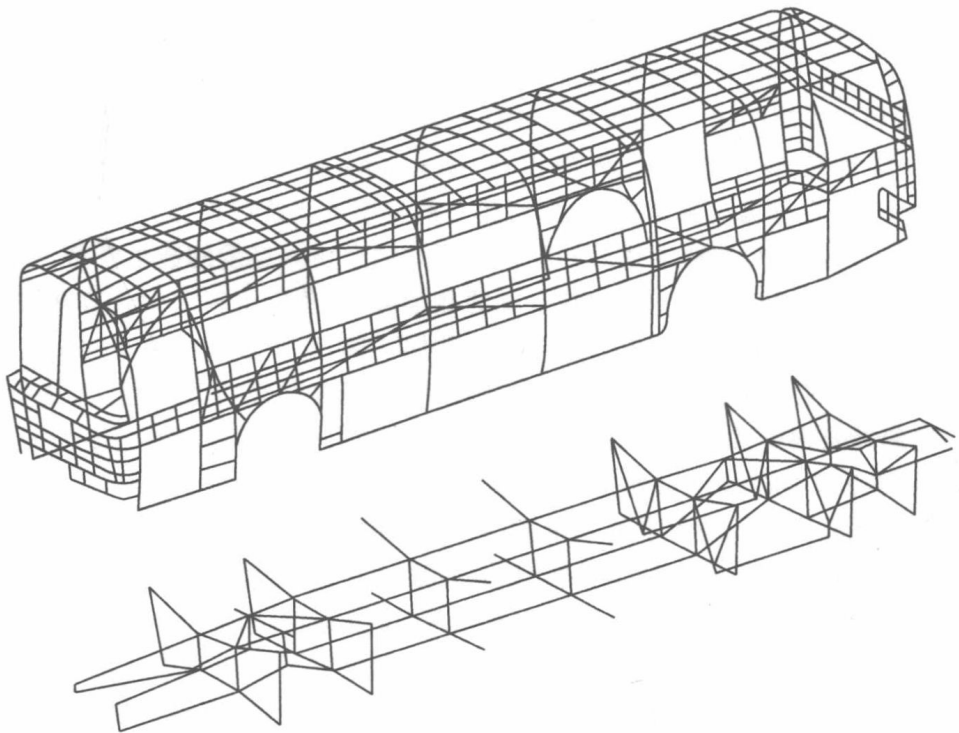


图 0.2 大型客车的车身和底盘的有限元模型

第 1 章 单自由度系统

1.1 引言

确定某个机械系统几何位置的独立参数的数目称为自由度。如果独立参数只有一个,称它为单自由度系统,图 1.1 是单自由度系统的 4 个例子。单自由度振动系统是最简单的振动系统,但它是研究更复杂的振动系统的基础。

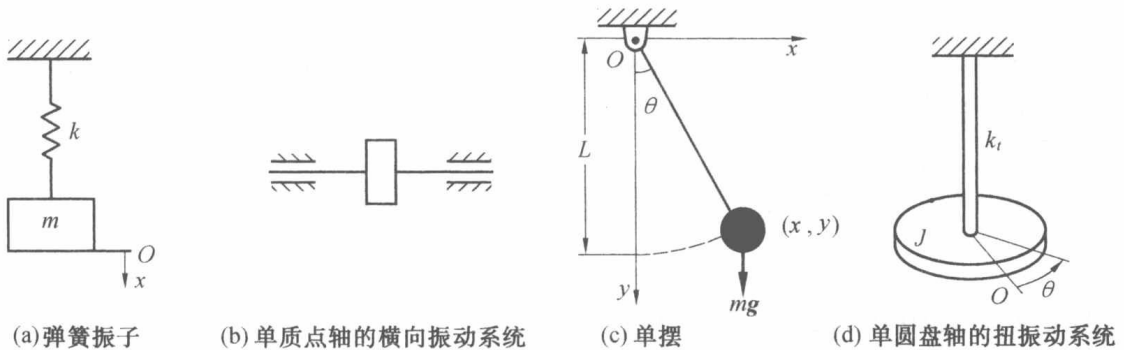


图 1.1 单自由度系统

需要用两个或两个以上独立参数确定系统的几何位置时,则称该系统为两个自由度系统或多自由度系统,或统称为多自由度系统。例如,多质点轴的横向振动系统,多圆盘轴的扭振系统等。对于连续弹性体,需要用无穷多个参数或一连续函数来确定系统位置,因此可看作是无穷多自由度系统。

1.2 单自由度系统的振动微分方程(运动方程)

图 1.2 所示弹簧振子是一典型的单自由度系统。设质点的质量为 m , 弹簧的刚度为 k , 阻尼器的阻尼系数为 c , 作用在质点上的激振力为 $f(t)$, 它是时间的函数。设在任一时刻 t , 质点离开平衡位置的位移为 x , 如果位移较小, 弹簧的弹性力与位移的关系可近似为 $-kx$, 称它为线性恢复力, 阻尼力为 $-c\dot{x}$, 称它为黏性阻尼力(viscous damping force)。根据牛顿(Newton)第二定律, 可建立振动微分方程

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + f(t)$$

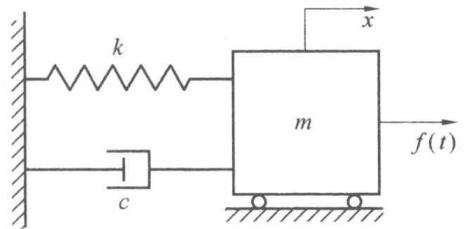


图 1.2 典型单自由度系统

或

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.1)$$

当系统同时受到一个常值力作用时,运动方程列写需要特别注意。如将图 1.2 系统竖起来,质点的运动就一直受到一个常值的重力作用。以将图 1.2 逆时针旋转 90° 后的系统为例,设静止时,弹簧受到质点重力作用引起的压缩量为 δ ,由于静止时没有相对运动,阻尼器不提供阻力,质点重力与弹簧弹性力处于静平衡状态,所以有 $k\delta = mg$ 。若将系统静平衡位置取为坐标原点,设在任一时刻 t ,质点离开平衡位置向上的位移为 x ,此时作用在质点上的弹性力应为 $-k(x - \delta)$,外力也增加了一重力项,此时重力方向与运动方向相反,这样根据牛顿第二定律,可得

$$m\ddot{x} = -k(x - \delta) - c\dot{x} + f(t) - mg \quad (1.2)$$

注意到静力平衡关系,则上式可简化成与方程(1.1)完全相同的形式。图 1.2 系统顺时针旋转 90° ,或者在水平状态下一直存在一个常力作用,这两种情况,如果同样将静平衡位置取为坐标原点,读者可自行验证,最后的运动方程也与方程(1.1)一样。

注意到方程(1.1)左端各力关于位移、速度和加速度等状态变量都是线性的,这是一个线性常微分方程,由线性微分方程所描述的振动称为线性振动。

1.3 无阻尼自由振动

1.3.1 无阻尼自由振动响应

如果没有激振力(动荷载)作用,振动系统在初始扰动后,仅靠恢复力维持的振动称为自由振动。如果阻尼力也可忽略不计,则称为无阻尼自由振动(undamped free vibration)。从方程(1.1)知,无阻尼自由振动的振动微分方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.3)$$

若引入 $\omega_n^2 = k/m$,则上述方程可写为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (1.4)$$

上式是单自由度系统无阻尼自由振动的标准微分方程,它是二阶齐次线性微分方程。其通解为

$$x = C_1 \sin(\omega_n t) + C_2 \cos(\omega_n t) \quad (1.5)$$

从上式可看到运动具有周期

$$T_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (1.6)$$

频率

$$f_n = \omega_n/2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} = 1/T_n \quad (1.7)$$

角频率

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (1.8)$$

由于 ω_n 只与系统本身的参数 m, k 有关,而与初始条件无关,故称为固有角频率,简称为固有频率或自然频率(natural frequency)。

通解(1.5)中的常数 C_1 和 C_2 可根据运动的初始条件求出,设 $t=0$ 时, $x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$,代

入式(1.5), 求出常数 C_1, C_2 后, 得

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + x_0 \cos(\omega_n t) \quad (1.9)$$

若令 $x_0 = A \sin \varphi, \dot{x}_0 / \omega_n = A \cos \varphi$, 则上述方程变为

$$x = A \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (1.10)$$

且有

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \tan \varphi = \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \quad (1.11)$$

从式(1.10)知, 无阻尼自由振动为简谐振动, 其振幅 A 和相位角 φ 都与初始条件有关, 而频率与初始条件无关。无阻尼自由振动的运动图线(时间历程曲线)如图 1.3 所示。

当系统作无阻尼自由振动时, 由于没有能量输入与输出, 系统的机械能守恒, 即动能与势能之和保持不变, 它们进行周期性的转换。

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi) \quad (1.12)$$

势能为

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi) \quad (1.13)$$

而最大动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \omega_n^2 A^2 \quad (1.14)$$

最大势能为

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k A^2 \quad (1.15)$$

根据机械能守恒定律, 有 $T_{\max} = U_{\max}$, 由此可得到与式(1.8)相同的频率公式 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 。

例 1.1 如图 1.4 所示, 一重 mg 的圆柱体, 其半径为 r , 在一半径为 R 的弧表面上作无滑动的滚动, 求在平衡位置(最低点)附近作微振动的固有频率。

解 如图 1.4 取广义坐标 θ , 计算圆柱体作平面运动的动能为

$$T = \frac{1}{2} m [(R-r)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \dot{\theta}^2$$

势能为

$$U = mg(R-r)(1 - \cos \theta)$$

代入拉格朗日(Lagrange)方程

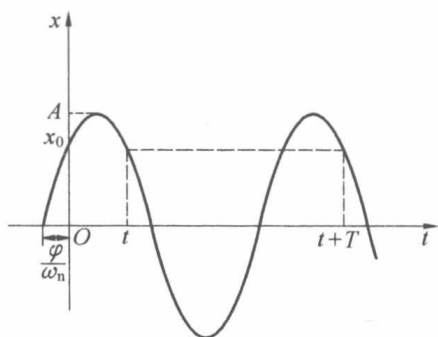


图 1.3 无阻尼自由振动曲线

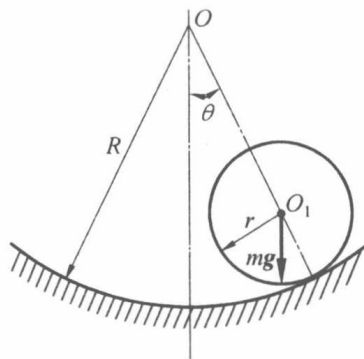


图 1.4 圆柱体在弧面上作无滑动滚动

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial \theta} = 0$$

得运动方程

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + mg(R-r)\sin\theta = 0$$

当 θ 很小时, 有 $\sin\theta \approx \theta$, 整理上式得

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0$$

因而有固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

本题也可以不求运动方程, 直接用能量法求解。前面动能和势能公式可整理为

$$T = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2$$

由无阻尼自由振动有 $\theta = A\sin(\omega_n t + \varphi)$, 则有

$$T_{\max} = \frac{3}{4}m(R-r)^2\omega_n^2 A^2$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}mg(R-r)A^2$$

由机械能守恒定律, 有 $T_{\max} = U_{\max}$, 解得系统固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

1.3.2 等效刚度及等效质量

1. 等效刚度问题

有时作用在结构上的弹性元件不止一个, 而且这些弹性元件的刚度还可能不同, 此时若建立单自由度系统模型, 在分析其振动规律时, 需计算等效刚度。假设有 n 个弹性元件, 它们之间的连接有并联(头连头、尾连尾, 见图 1.5(a)) 和串联(头尾相连, 见图 1.5(b)) 两种典型情况。

并联情况下, 每个元件与对象连接端的变形相同, 即

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_i = \cdots = x_n = x \quad (1.16)$$

则有

$$F = \sum F_i = \sum (k_i x_i) = x \sum k_i \quad (1.17)$$

$$F/x = \sum k_i = k_{\text{eq}} \quad (1.18)$$

其中, k_{eq} 就是并联情况下的等效刚度, 等于各个弹性元件刚度之和。

串联情况下每个元件受力相同, 即

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_i = \cdots = F_n = F \quad (1.19)$$

则有