人邮考试

RENYOU KAOSHI

2015考研数学命题人高分策略

终极冲刺试卷

数学一（押题版）

全国考研数学命题研究中心 编著

命题阅卷专家 联袂倾力打造

■ 命题专家联袂打造

一线专家教授倾力合作，作者阵容强大，内容权威

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家以及一线辅导名师共同编写而成

■ 押题试卷终极冲刺

把握最新考试大纲，标准预测、权威预测

本书精心编写了10套冲刺试卷，深入剖析命题思路，全面展现题型变化，系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点

■ 命题秘笈倾囊相授

赠送原命题组组长20年命题秘笈，全面把握命题脉搏

本书赠送原命题组组长命题秘笈，20年命题精华，呕心力作，倾囊相授。让考生全面把握命题重点、难点，掌握命题趋势和出题动态，把握命题方向，从容应考

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

2015考研数学命题人高分策略：终极冲刺试卷

数学一（押题版）

全国考研数学命题研究中心 编著

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

2015考研数学命题人高分策略．终极冲刺试卷．数学一：押题版 / 全国考研数学命题研究中心编著．-- 北京：人民邮电出版社，2014.8
ISBN 978-7-115-36117-2

Ⅰ．①2… Ⅱ．①全… Ⅲ．①高等数学－研究生入学考试－习题集 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第129823号

内容提要

本书按照最新考试大纲，精心编写了10套冲刺试卷，深入剖析命题思路，全面展现题型变化，系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点。每套冲刺试卷都有考点提示和详细的试题解析，详解命题规律，诠释高频考点，帮助考生有针对性的进行复习。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家，以及一线教师共同编写而成，考生不仅可以用本书进行考前模拟实战演练，而且可以藉此检验自己的复习效果，及时查漏补缺。

本书所提供的10套冲刺试卷，预测了2015年考试的方向。考生可以利用本书中的模拟试卷进行考前模拟实战训练，从容备考，轻取高分。

◆ 编　　著　全国考研数学命题研究中心
责任编辑　李士振
责任印制　周昇亮
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
印张：7　2014 年 8 月第 1 版
字数：184 千字　2014 年 8 月北京第 1 次印刷

定价：21.80 元

读者服务热线：(010)81055296　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号

考研辅导丛书专家委员会

前　言

德国大数学家高斯曾说过："数学是科学的皇后。"毫无疑问，数学是对人类思维能力要求最高的学科，它不仅范围广，内容多，而且深刻体现出了人类的聪明才智所能达到的最高境界。全国硕士研究生入学考试数学一科是考查考生的数学功底、思维能力，并不是要求考生进行高深的数学基础理论研究，但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力，包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验。既然如此，要考好数学，思维能力就必须有质的飞跃。无论如何，考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲。自从考研招生实行全国统考以来，数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的"数学考试大纲"所规定的考试内容和考试要求来进行的。大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述，是广大考生备考的指导性文件和根本依据。考生必须从中全面领会考试精神，尤其是明确考试范围，以便有的放矢。大纲所要求的知识点或考点，考生一定要熟记在心，不要求的内容，应该跳过，不要浪费精力。同时要注意，不光应分析研究本年最新的大纲，还要研究去年乃至上一年的大纲，从比较中发现其变化。

为了帮助广大参加硕士研究生入学数学考试的考生备考，本书按照最新考试大纲，精心编写了这本《2015 考研数学命题人高分策略：终极冲刺试卷 数学一（押题版）》。

本书特点如下：

一、原命题组成员联袂，一线教授和专家亲自执笔，内容权威

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。本书深入剖析命题思路，全面展现题型变化，系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点。其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。每套冲刺试卷都有考点提示和详细的试题解析，详解命题规律，诠释高频考点，帮助考生有针对性的进行复习。

二、多角度、全方位综合分析冲刺试卷的重点和难点，把握命题动态

本书对每道试题不仅给出了详解，还对重要的、易丢分的题目做了评注；不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体题目，分析考生常犯的错误，让考生引以为戒。

三、全面预测了 2015 年考研数学的命题方向、出题原则和规律

本书所提供的 10 套冲刺试卷，预测了 2015 年考试的方向。考生可以利用本书中的模拟试卷进行考前模拟实战训练。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家，以及一线教师共同编写而成，考生不仅可以用本书进行考前模拟实战演练，而且可以藉此检验自己的复习效果，及时查漏补缺。

最后祝愿各位考生都能圆名校之梦！

编者

2014 年 6 月于北京

目　录

终极冲刺试卷一

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是可导的奇函数,则下列函数中是奇函数的是(　　)。

(A) $\sin f'(x)$　(B) $\int_0^x f(t)\sin t\,dt$　(C) $\int_0^x f(\sin t)\,dt$　(D) $\int_0^x [\sin t+f(t)]\,dt$

2. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$,则$x=0$是$f(x)$的(　　)。

(A) 可去间断点　(B) 跳跃间断点　(C) 第二类间断点　(D) 连续点

3. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$存在二阶导数,且$f(x)=-f(-x)$,当$x<0$时有$f'(x)<0$,$f''(x)>0$,则当$x>0$时有(　　)。

(A) $f'(x)<0, f''(x)>0$　(B) $f'(x)>0, f''(x)<0$

(C) $f'(x)>0, f''(x)>0$　(D) $f'(x)<0, f''(x)<0$

4. 设函数$f(x)$连续,且$f'(0)<0$,则存在$\delta>0$,使得(　　)。

(A) 在$(0,\delta)$内$f(x)$单调增加　(B) 在$(-\delta,0)$内$f(x)$单调减少

(C) 对任意的$x\in(0,\delta)$,有$f(x)>f(0)$　(D) 对任意的$x\in(-\delta,0)$,有$f(x)>f(0)$

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的两个不同解,则方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解为(　　)。

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

6. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均是$n$阶可逆矩阵,则行列式$\left|-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}\right|$的值为(　　)。

(A) $(-2)^n|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}$　(B) $-2|\boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{B}|$

(C) $-2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{-1}|$　(D) $(-2)^{2n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}$

7. 设随机变量X服从正态分布$N(1,\sigma^2)$,其分布函数为$F(x)$,则对任意实数x,有(　　)。

(A) $F(x)+F(-x)=1$　(B) $F(1+x)+F(1-x)=1$

(C) $F(x+1)+F(x-1)=1$　(D) $F(1-x)+F(x-1)=1$

8. 在假设检验中,H_0为原假设,下列选项中犯第一类错误(弃真)的是(　　)。

(A) H_0为假,接受H_0　(B) H_0为真,拒绝H_0

(C) H_0为假,拒绝H_0　(D) H_0为真,接受H_0

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 已知函数$y=y(x)$由方程$e^y+6xy+x^2-1=0$确定,则$y''(0)=$ ________。

10. 方程 $yy''=1+y'^2$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的特解为________。

11. 设微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的通解为 $y=\frac{x}{\ln Cx}$，则 $\varphi(x)=$ ________。

12. 方程 $5x-2-\int_0^x\frac{dt}{1+t^8}=0$ 在区间 $(0,1)$ 内的实根个数为________。

13. 设 A 是三阶矩阵，有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$。$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，E 是三阶单位阵，则 $\left|\,|A|\begin{bmatrix}0 & A^*\\ -2E & A\end{bmatrix}\right|=$ ________。

14. 已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{3},(k=1,2,3)$，当 $X=k$ 时随机变量 Y 在 $(0,k)$ 上服从均匀分布，即 $P\{Y\leqslant y|X=k\}=\begin{cases}0 & y\leqslant 0\\ \frac{y}{k} & 0<y<k\\ 1 & k\leqslant y\end{cases}$，则 $P\{Y\leqslant 2.5\}=$ ______。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本题满分 10 分）

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。确定 a,b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$。

16.（本题满分 10 分）

（Ⅰ）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\,(x-1)^n$ 的收敛域及其在收敛域内的和函数；

（Ⅱ）将所求得的和函数展开成 $(x+1)$ 的幂级数。

17.（本题满分 10 分）

计算 $\iint_D|\sin(y-x)|\,dxdy$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2\pi$。

18.（本题满分 10 分）

判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$ 的敛散性，若收敛，求出和 S。

19.（本题满分 10 分）

计算 $\iint_{\Sigma}xyz\,dxdy$，其中 Σ 是 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧。

20.（本题满分 11 分）

设 n 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关，后 $n-1$ 个列向量线性无关，且 $\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(n-1)\alpha_{n-1}=0,b=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。

（Ⅰ）证明方程组 $AX=b$ 有无穷多个解；

（Ⅱ）求方程组 $AX=b$ 的通解。

21. (本题满分 11 分)

设二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$,求参数 a,b 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$。

22. (本题满分 11 分)

设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ 2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{a}x\right)-\dfrac{2\sqrt{2}}{a}x\varphi\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{a}\right)-1 & x>0\end{cases}$,其中 $a>0$,$\Phi(x)$,$\varphi(x)$ 分别是标准正态分布的分布函数与概率密度,令 $Y=\dfrac{1}{2}X^2$,求 Y 的密度函数。

23. (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,且 X 服从均值为 1、标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布,而 Y 服从标准正态分布。试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数。

终极冲刺试卷一参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】函数的奇偶性

【解题分析】选(B)。由题设知,$f(t)\sin t$ 为偶函数,故 $\int_0^x \sin t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ 为奇函数。

2.【考点提示】函数的间断点

【解题分析】因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=-1$,

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。应选(B)。

3.【考点提示】导数的应用

【解题分析】$f(x)$ 为奇函数,当 $x<0$ 时,$f(x)$ 的图形为递减的凹曲线;当 $x>0$ 时,$f(x)$ 的图形为递减的凸曲线,故选(D)。

4.【考点提示】利用导数的定义和极限的保号性

【解题分析】$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}<0$,

由极限的的保号性,$\exists\,\mathring{U}(0,\delta)$,在此邻域内,$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}<0$,

所以对任意的 $x\in(-\delta,0)$,有 $f(x)>f(0)$,选(D)。

5.【考点提示】非齐次线性方程组的解

【解题分析】因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关解,也是基础解系,而 $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解,根据非齐次线性方程组通解结构,选(D)。

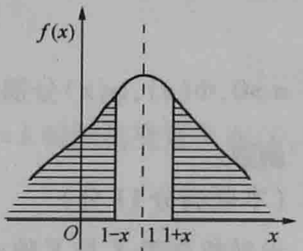
6.【考点提示】行列式的计算

【解题分析】$\left|-2\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} -2A^T & 0 \\ 0 & -2B^{-1} \end{bmatrix}\right| = |-2A^T||-2B^{-1}| = (-2)^{2n}$ $|A||B|^{-1}$,应选D。

7.【考点提示】考查随机变量的分布函数

【解题分析】由于 $X \sim N(1,\sigma^2)$,所以 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\Phi\left(\dfrac{x-1}{\sigma}\right)$。

由此可知相应的四个选项是



(A) $F(x)+F(-x)=\Phi\left(\dfrac{x-1}{\sigma}\right)+\Phi\left(\dfrac{-x-1}{\sigma}\right)\neq 1$,

(B) $F(1+x)+F(1-x)=\Phi\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)+\Phi\left(\dfrac{-x}{\sigma}\right)=1$,

(C) $F(x+1)+F(x-1)=\Phi\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)+\Phi\left(\dfrac{x-2}{\sigma}\right)\neq 1$,

(D) $F(1-x)+F(x-1)=\Phi\left(\dfrac{-x}{\sigma}\right)+\Phi\left(\dfrac{x-2}{\sigma}\right)\neq 1$,因为 $\forall x\in R$ 它们都要成立,因此选(B)。

8.【考点提示】假设检验

【解题分析】根据假设检验的基本概念,可知本题选(B)。

二、填空题

9.【考点提示】函数方程求二阶导数

【解题分析】方程两边对 x 两次求导得

$$e^y y'+6xy'+6y+2x=0 \quad ①$$

$$e^y y''+e^y y'^2+6xy''+12y'+2=0 \quad ②$$

以 $x=0$ 代入原方程得 $y(0)=0$,以 $x=0,y(0)=0$ 代入式①得 $y'(0)=0$,再以 $x=y(0)=y'(0)=0$ 代入式②得 $y''(0)=-2$。

10.【考点提示】高阶微分方程的解

【解题分析】令 $y'=p$,则 $yp\dfrac{dp}{dy}=1+p^2$,即 $\dfrac{2pdp}{1+p^2}=\dfrac{2dy}{y}$,

解得 $\ln(1+p^2)=\ln y^2+\ln C_1$,则 $1+p^2=C_1y^2$,

由 $y(0)=1,y'(0)=0$ 得 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$,$\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|+C_2=\pm x$,

由 $y(0)=1$ 得 $C_2=0$,所以特解为 $\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x$。

11.【考点提示】微分方程的解

【解题分析】将 $y=\dfrac{x}{\ln Cx}$ 代入微分方程,得 $\varphi(\ln Cx)=-\dfrac{1}{\ln^2 Cx}$,故 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{x^2}$。

12.【考点提示】方程的零点

【解题分析】令 $f(x)=5x-2-\int_0^x\dfrac{dt}{1+t^8}$,$f(0)=-2<0$,$f(1)=3-\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^8}>0$,

由零点定理知,此方程在区间(0,1)内至少有一个实根,

又 $f'(x)=5-\dfrac{1}{1+x^8}>0$,$f(x)$ 单调增加,故此方程在区间(0,1)内有且仅有一个实根。

13.【考点提示】抽象行列式的计算

【解题分析】A 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，

故 $|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=-2$，$|A^*|=|A|^{3-1}=4$，

从而有 $\left|\,|A|\begin{bmatrix}0 & A^* \\ -2E & A\end{bmatrix}\right|=|A|^6(-1)^3\cdot(-2)^3|A^*|=2^{11}$。

14.【考点提示】全概率公式

【解题分析】由题设知 $\sum_{k=1}^{3}P\{X=k\}=1$，$P\{X=k\}=\frac{1}{3}$，根据全概率公式得

$$P\{Y\leqslant 2.5\}=\sum_{k=1}^{3}P\{Y\leqslant 2.5,X=k\}=\sum_{k=1}^{3}P\{X=k\}P\{Y\leqslant 2.5\mid X=k\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+1+\frac{2.5}{3}\right]=\frac{8.5}{9}=\frac{17}{18}$$

三、解答题

15.【考点提示】函数的偏导数

【解题分析】$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

将以上各式代入原等式，得

$$(3a^2+4a+1)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[6ab+4(a+b)+2]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(3b^2+4b+1)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$$

由题意，令 $\begin{cases}3a^2+4a+1=0,\\3b^2+4b+1=0,\end{cases}$ 且 $6ab+4(a+b)+2\neq 0$，故 $\begin{cases}a=-1,\\b=-\frac{1}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{1}{3}。\\b=-1。\end{cases}$

16.【考点提示】级数的收敛域及和函数

【解题分析】（Ⅰ）由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$，所以 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$。

当 $x=0$ 和 $x=2$ 时幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}n$，均发散，故原级数的收敛域为 $(0,2)$，

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}=(x-1)S_1(x)$，

则 $\int_1^x S_1(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{x-1}{1-(x-1)}=\frac{x-1}{2-x}$，

所以 $s_1(x)=\left(\frac{x-1}{2-x}\right)'=\frac{1}{(2-x)^2}$，则 $S(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2}$。

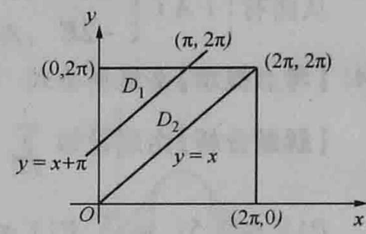
（Ⅱ）$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\left(\frac{1}{3-(x+1)}\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(x+1)/3}\right)'$

$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{3}\right)^{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}(x+1)^{n-1}$$

所以 $S(x) = (x-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}(x+1)^{n-1} = [(x+1)-2]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}(x+1)^{n-1}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}(x+1)^{n} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+1}}(x+1)^{n-1}$$

17.【考点提示】二重积分



【解题分析】令 $\sin(y-x)=0$，则 $y=x$ 或 $y-x=\pi$，

如图：$D=D_1+D_2$，且 $D_1\cap D_2=\Phi$，

$D_1=\{(x,\ y)\ |0\leqslant x\leqslant\pi,\ x+\pi\leqslant y\leqslant 2\pi\}$

$D_2=\{(x,\ y)\ |0\leqslant x\leqslant\pi,\ x\leqslant y\leqslant x+\pi\}+\{(x,\ y)\ |\pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\ x\leqslant y\leqslant 2\pi\}$

$$\iint_D|\sin(y-x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{x+\pi}^{2\pi}\sin(y-x)\mathrm{d}y + \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{x+\pi}\sin(y-x)\mathrm{d}y + \int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_x^{2\pi}\sin(y-x)\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{\pi}[-\cos(y-x)]\Big|_{x+\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}[-\cos(y-x)]\Big|_x^{x+\pi}\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}[-\cos(y-x)]\Big|_x^{2\pi}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi}(\cos x+1)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}2\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}(1-\cos x)\mathrm{d}x = 4\pi$$

18.【考点提示】判断级数的敛散性，并且求和函数

【解题分析】设 $\tan\alpha=n+1$，$\tan\beta=n$，则 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1}{n^2+n+1}$，

从而有 $\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}=\alpha-\beta=\arctan(n+1)-\arctan n$，

于是 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{1}{k^2+k+1}$

$= (\arctan 2-\arctan 1)+(\arctan 3-\arctan 2)+\cdots+(\arctan(n+1)-\arctan n)$

$= \arctan(n+1)-\arctan 1$

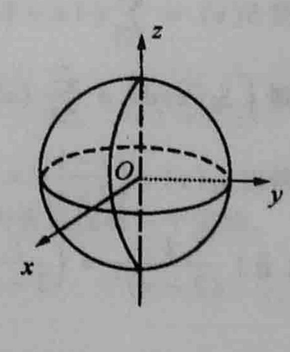
由 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\arctan(n+1)-\arctan 1]=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，

知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$ 收敛，且和为 $S=\dfrac{\pi}{4}$。

19.【考点提示】曲面积分

【解题分析】投影到 xy 平面，将积分曲面 Σ 分成上下两部分，分别记为 $\sum_1$ 与 $\sum_2$，

则 $\sum_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\sum_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$。



$\sum=\sum_1\cup\sum_2$。并且在 $\sum_1$ 上法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正方向的夹角为锐角；在 $\sum_2$ 上 法向量与 z 轴正方向的夹角为钝角。$\sum_1$，$\sum_2$ 在 xOy 平面上的投影域均为 D: $z=0$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^2+y^2\leqslant 1$，

所以 $\iint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r(r=\sin t)$$

$$=\sin^2\theta\left|_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t-\sin^5 t)\mathrm{d}t=\frac{2}{3\times 1}-\frac{4\times 2}{5\times 3\times 1}=\frac{2}{15}\right.$$

20. 【考点提示】非齐次线性方程组的解

【解题分析】(Ⅰ)证明：因为 $r(X\mid A)=n-1$，又 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，所以 $r(\overline{A})=n-1$，

即 $r(\overline{A})=r(X\mid A)=n-1<n$，所以方程组 $AX=b$ 有无穷多个解。

(Ⅱ)因为 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots(n-1)\boldsymbol{\alpha}_n-1=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(n-1)\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+0\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，

即齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,\cdots,n-1,0)^T$，

故方程组 $AX=b$ 的通解为 $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}=k(1,2,\cdots,n-1,0)^T+(1,1,\cdots,1)^T$（$k$ 为任意常数）。

21. 【考点提示】二次型及其标准型

【解题分析】二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_3+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 的矩阵形式为 $f=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$，

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&b\\1&2&1\\b&1&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$（因为正交矩阵的转置矩阵即为其逆矩阵），于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为1，1，4，

而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-(a+4)\lambda^2+(4a-b^2+2)\lambda+(-3a-2b+2b^2+2)$，

所以有 $\lambda^3-(a+4)\lambda^2+(4a-b^2+2)\lambda+(-3a-2b+2b^2+2)=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$，

解得 $a=2$，$b=1$，当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，

由 $\lambda_3=4$ 时，由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 两两正交，单位化为

$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$。

22. 【考点提示】随机变量函数的概率密度

【解题分析】当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$。

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{\frac{1}{2}X^2\leqslant y\right\}=P\{X\leqslant\sqrt{2y}\}=F_X(\sqrt{2y})$。

所求 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ 2\Phi\left(\frac{2}{a}\sqrt{y}\right)-\frac{4\sqrt{y}}{a}\varphi\left(\frac{2\sqrt{y}}{a}\right)-1, & y>0。\end{cases}$

将 $F_Y(y)$ 对 y 求导数，得到 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{8\sqrt{y}}{a^3}\varphi\left(\frac{2\sqrt{y}}{a}\right), & y>0。\end{cases}$

23. 【考点提示】随机变量密度函数

【解题分析】由于独立的正态变量 X 与 Y 的线性组合仍服从正态分布，且

$$EZ=2EX-EY+3=5，DZ=4DX+DY=9,$$

因此 Z 的概率密度函数为 $f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$。

终极冲刺试卷二

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是(　　)。

(A) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极小值　　(B) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极大值

(C) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值　　(D) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有(　　)。

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant 0$　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0\ (x\neq a)$　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant 0\ (x\neq a)$

3. 若函数 $f(x)$与 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有(　　)。

(A) $f(-x)>g(-x)$　　(B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　　(D) $\int_0^x f(t)\,dt<\int_0^x g(t)\,dt$

4. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 分别收敛于 a，b，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$(　　)。

(A) 不一定收敛　　(B) 必收敛，和为 $2a+b$

(C) 必收敛，和为 $a-2b$　　(D) 必收敛，和为 $a+2b$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论中不正确的是(　　)。

(A) $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$ 相似　　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

(C) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|$　　(D) $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$

6. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$R(\boldsymbol{A})=r$，$\boldsymbol{b}$ 为 m 维列向量，则有(　　)。

(A) 当 $r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

(B) 当 $r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(C) 当 $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(D) 当 $r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

7. 设随机变量 X 与 Y 分别服从 $N(-1,2)$和 $N(1,2)$，且 X 与 Y 不相关，k_1X+Y 与 $X+k_2Y$ 也不相关，则(　　)。

(A) $k_1+k_2=0$　　(B) $k_1=k_2=0$

(C) $k_1+k_2\neq 0$　　(D) $k_1+k_2\neq 0$

8. 设 X_1，X_2，…，X_n $(n\geqslant 2)$为来自总体 $N(0,1)$的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则(　　)。

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$ (D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. $\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$ 的实根个数是________。

10. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点$(1,\ -2,\ 2)$处的法线方程为________。

11. $\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^3}\right)\mathrm{d}v =$ ________，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$。

12. $\int_0^1 x\left(1-\dfrac{x^2}{1!}+\dfrac{x^4}{2!}-\dfrac{x^6}{3!}+\cdots\right)\mathrm{d}x =$ __________。

13. 设二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正负惯性指数都是1，则 $a=$________。

14. 已知随机变量 X，Y 相互独立，且 $D(X)=2D(Y)$，则$(2X+Y)$和$(2X-Y)$的相关系数为________。

三、解答题：15～23小题，共94分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （本题满分10分）

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$。

16. （本题满分10分）

设函数 $f(x)$ 在 $|x|\leqslant 1$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，试证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

17. （本题满分10分）

设 $Q(x,\ y)$ 在平面 xOy 上具有一阶连续的偏导数，且 $\int_L 2xy\mathrm{d}x + Q(x+y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，且对任意的 t 有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2x\mathrm{d}y\mathrm{d}x + Q(x,\ y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2x\mathrm{d}y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$，求 $Q(x,y)$。

18. （本题满分10分）

求函数 $f(x,\ y)=x^2+4y^2+9$ 在 $D=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 上的最大值与最小值。

19. （本题满分10分）

假设曲线 $l_1: y=1-x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴，y 轴所围成区域被曲线 $l_2: y=ax^2$ 分为面积相等的两部分，其中 a 是大于零的常数，试确定 a 的值。

20. （本题满分11分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$。

（Ⅰ）求 x 与 y 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$。