

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

全国考研数学第一权威

2016

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题 权威解析

数学一

主 编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥

(按姓氏笔划排序)

佳搭配:《复习全书》+《660题》+《历年真题》

哪里不会扫哪里

精选真题视频讲解
APP扫书中二维码
详见封二使用说明

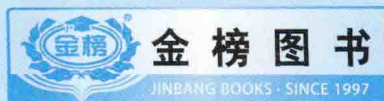
权威名师与命题专家联手打造 考试知识复习与能力培养并重
多角度讲解试题开拓解题思路 分析解答透彻易懂更有针对性
详尽地归纳总结典型解题方法 综合提高运用知识的分析能力

双色印刷

绝佳的阅读体验

国家行政学院出版社





2016

李永乐·王式安唯一考

全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题 权威解析

数学一

主 编 © 李永乐 王式安 季文铎

编委 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥
(按姓氏笔划排序)

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析. 数学一/李永乐, 王式安, 季文铎

主编. —3版. —北京: 国家行政学院出版社, 2015. 1

ISBN 978-7-5150-1305-3

I. ①数… II. ①李… ②王… ③季… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 275073 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识, 凡有防伪标识的
为正版图书, 请读者注意识别。

书 名: 数学历年真题权威解析(数学一)

主 编: 李永乐 王式安 季文铎

责任编辑: 姚敏华

装帧设计: 金榜图文设计室

出版发行: 国家行政学院出版社

(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)

电 话: (010)68920640 68929037

编 辑 部: (010)68928761 68929009

印 刷: 大厂回族自治县彩虹印刷有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 24.25

字 数: 560 千字

版 次: 2015 年 1 月第 3 版

印 次: 2015 年 1 月第 1 次印刷

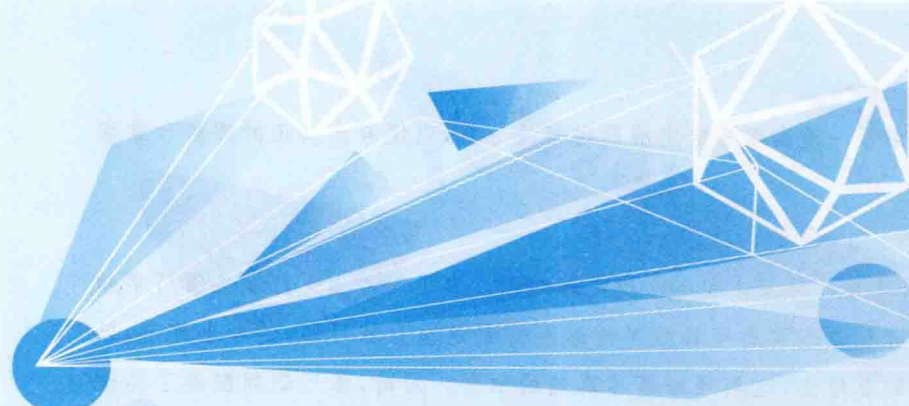
书 号: ISBN 978-7-5150-1305-3

定 价: 48.00 元

图书如有印装质量问题, 请联系调换 电话: (010) 51906740 版权所有 侵权必究

金榜图书联系电话: (010)51906740 金榜图书天猫店网址: <http://sdjlts.tmall.com/>

金榜图书微博: <http://weibo.com/51906740?from=profile&wvr=6>



前言



从真题中你能够了解一个真实的考研数学,寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律,全面提高解题能力,进而更好地驾驭考试,本书编写团队依据 15 年的命题与阅卷经验,并结合十多年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

近年来,研究生入学考试数学各学科知识点没有太大变化,而且各学科考查的重难点比较稳定,都是往年考试反复考查的内容,依据往年考题把握了这些重难点,我们就等于成功了一半。练真题,反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题,如何与没有考过的知识点结合起来考查,进而复习没有考过的知识点,这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了,也因此,真题能够最有效的暴露我们的不足和复习误区,提供更有效的复习思路和策略,甚至可以说,真题就是最好的“辅导老师”,它告诉我们考试会考什么,怎么考,反过来又指导我们思考如何应对,也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学,经过命题人的反复推敲,是市面上的练习题所无法比拟的,市面上的练习题,难易适中,命制科学,贴近考试要求的很少,做真题,反复揣摩,这能节省我们宝贵的复习时间,达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题,在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析,目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度,方便复习备考。第二篇是历年的试题。第三篇将真题按考点所属内容分类并进行解析,各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律,分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯

的错误,给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路的分析,以便考生真正的理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题,只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者精心选取历年真题其他卷别的试题作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,达到轻松解答真题的水平。同时,练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生遇到解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中,时刻想到将各个方面的知识融会贯通,做好知识的串联和总结,从而检验自己对问题的把握程度,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想分数。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com@清华李永乐考研数学辅导团队。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2015 年 1 月

金榜图书考研类图书书目

考研思想政治系列

书名	作者	出版时间
《研究生报考知识暨考研政治入门红宝书》	徐之明	2015 年 1 月
《思想政治理论超级红宝书》	徐之明	2015 年 1 月
《思想政治理论红宝书超级 900 题》	徐之明	2015 年 3 月
《思想政治理论近年真题心解》	徐之明	2015 年 3 月
《思想政治理论红宝书逻辑图解》	徐之明	2015 年 3 月
《形势与政策暨考纲新增知识点》	徐之明	2015 年 10 月
《思想政治红宝书背诵精华掌中宝》	徐之明	2015 年 10 月
《思想政治分析题专项突破一本通》	徐之明	2015 年 11 月
《思想政治理论金榜题名 4 套卷》	徐之明	2015 年 11 月
《思想政治理论命题核心点名师精析》	米 鹏	2015 年 1 月
《思想政治理论精雕细刻 1000 题》	米 鹏	2015 年 5 月
《思想政治理论大串讲》	米 鹏	2015 年 11 月
《思想政治理论最后 20 天必背 20 题》	米 鹏	2015 年 11 月

考研数学系列

书名	作者	出版时间
《数学复习全书》(基础篇)	李永乐 王式安	2015 年 9 月
《数学基础过关 660 题》	李永乐 王式安	2015 年 1 月
《数学复习全书》	李永乐 王式安	2015 年 1 月
《数学历年真题权威解析》	李永乐 王式安	2015 年 1 月
《数学历年真题权威解析》(试卷版)	李永乐 王式安	2015 年 3 月
《李永乐数学决胜冲刺 6+2》	李永乐 王式安	2015 年 7 月
《线性代数辅导讲义》	李永乐	2015 年 2 月
《概率论与数理统计辅导讲义》	王式安	2015 年 3 月
《高等数学辅导讲义》	武忠祥	2015 年 7 月
《数学公式的奥秘》	单立波	2015 年 3 月
《概率论与数理统计辅导讲义》	曹显兵	2015 年 2 月
《高等数学(微积分)辅导讲义》	曹显兵 刘喜波	2015 年 3 月
《大题满分技巧揭秘》	金榜考研数学命题研究组	2015 年 8 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
《石春祯考研英语阅读理解220篇》(基础篇)	石春祯	2015年1月
《石春祯考研英语阅读理解220篇》(提高篇)	石春祯	2015年7月
《考研英语词组734大冲关》	赵敏	2015年5月
《30天突破考研英语长难句》	赵敏	2015年5月
《60天突破考研英语阅读》	赵敏	2015年2月
《30天突破考研英语翻译》	赵敏	2015年2月
《考研英语决胜冲刺3套卷》(英语一、英语二)	赵敏	2014年10月
《考研英语写作冲刺30篇》	赵敏	2014年10月
《考研英语语法大揭秘》	王国清	2015年7月
《命题人历年考研英语真题解析及复习思路》 (实战篇·试卷版)(英语一)	金榜考研英语命题研究中心	2015年6月
《命题人历年考研英语真题解析及复习思路》 (实战篇·试卷版)(英语二)	金榜考研英语命题研究中心	2015年6月
《命题人新万能作文》(英语一)	金榜考研英语命题研究中心	2015年6月
《命题人新万能作文》(英语二)	金榜考研英语命题研究中心	2015年6月
《命题人考研英语词汇全集》	金榜考研英语命题研究中心	2014年12月
《命题人考研英语阅读11讲》	金榜考研英语命题研究中心	2014年12月

大学英语四、六级系列

书名	作者	出版时间
《命题人大学英语四级新题型预测试卷》(基础篇)	金榜大学英语四级命题研究中心	2015年1月
《命题人大学英语四级新题型预测试卷》(预测篇)	金榜大学英语四级命题研究中心	2015年2月
《命题人大学英语六级新题型预测试卷》(基础篇)	金榜大学英语六级命题研究中心	2015年2月
《命题人大学英语六级新题型预测试卷》(预测篇)	金榜大学英语六级命题研究中心	2015年2月
《命题人大学英语四级核心2000词》	金榜大学英语四级命题研究中心	2014年12月
《命题人大学英语六级核心3000词》	金榜大学英语六级命题研究中心	2014年12月

世界文学名著系列

书名	作者	出版时间
简·爱	夏洛蒂·勃朗特	2014年10月
傲慢与偏见	简·奥斯汀	2014年10月
小王子	圣埃克苏佩里	2014年10月
了不起的盖茨比	菲茨杰拉德	2014年10月
瓦尔登湖	亨利·戴维·梭罗	2014年10月
一九八四	乔治·奥威尔	2014年10月

考研专业课系列

	书名	主编	出版时间
西 医	《刘应科考研西医综合辅导讲义》(上、下)	刘应科	2015年1月
	《刘应科考研西医综合核心考点突破与速记》(口袋版)	刘应科	2015年3月
	《刘应科考研西医综合历年真题精析及复习思路》	刘应科	2015年4月
	《刘应科考研西医综合历年真题精析及复习思路》(试卷版)	刘应科	2015年4月
	《刘应科考研西医综合配套3000题》	刘应科	2015年8月
	《刘应科考研西医综合终极预测试卷》	刘应科	2014年11月
中 医	《刘应科考研中医综合辅导讲义》(上、下)	刘应科	2015年1月
	《刘应科考研中医综合核心考点突破与速记》(口袋版)	刘应科	2015年3月
	《刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路》	刘应科	2015年4月
	《刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路》(试卷版)	刘应科	2015年4月
	《刘应科考研中医综合配套3000题》	刘应科	2015年8月
	《刘应科考研中医综合终极预测试卷》	刘应科	2014年11月

国家执业医师资格考试系列

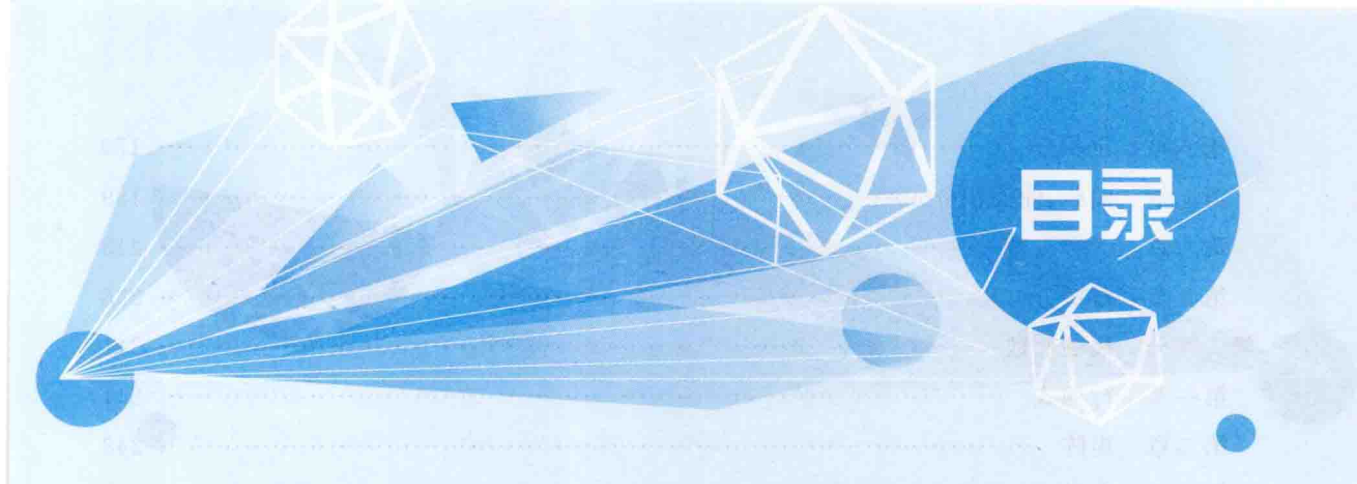
	书名	主编	出版时间
临 床	刘应科临床执业医师实践技能应试指南	刘应科	2014年12月
	刘应科临床执业医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2014年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2014年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2014年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2014年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2014年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2014年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试预测试卷	刘应科	2014年12月
中 医	刘应科中医执业医师实践技能应试指南	刘应科	2014年10月
	刘应科中医执业医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2014年10月
	刘应科中医执业医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2014年10月
	刘应科中医执业医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2014年11月
	刘应科中医执业医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2014年11月
	刘应科中医执业医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2014年10月
	刘应科中医执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2014年10月
	刘应科中医执业医师综合笔试预测试卷	刘应科	2014年10月
中 西 医 结 合	刘应科中西医结合执业医师实践技能应试指南	刘应科	2014年10月
	刘应科中西医结合执业医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2014年10月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2014年10月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2014年11月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2014年11月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2014年10月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2014年10月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试预测试卷	刘应科	2014年10月

国家执业助理医师资格考试系列

	书名	主编	出版时间
临床	刘应科临床执业助理医师实践技能应试指南	刘应科	2014 年 12 月
	刘应科临床执业助理医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2014 年 12 月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2014 年 12 月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试基础过关 3000 题	刘应科	2014 年 12 月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试强化特训 2000 题	刘应科	2014 年 12 月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2014 年 12 月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2014 年 12 月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试预测试卷	刘应科	2014 年 12 月
中医	刘应科中医执业助理医师实践技能应试指南	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中医执业助理医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试基础过关 3000 题	刘应科	2014 年 11 月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试强化特训 2000 题	刘应科	2014 年 11 月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试预测试卷	刘应科	2014 年 10 月
中西医结合	刘应科中西医结合执业助理医师实践技能应试指南	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中西医结合执业助理医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试基础过关 3000 题	刘应科	2014 年 11 月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试强化特训 2000 题	刘应科	2014 年 11 月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2014 年 10 月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试预测试卷	刘应科	2014 年 10 月

以上书目仅供参考,以实际出版物为准。

以上图书均属北京时代巨流文化有限公司!



目录

第一篇 最新真题

2015 年全国硕士研究生入学统一考试	1
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	5

第二篇 历年真题

2014 年全国硕士研究生入学统一考试试题	13
2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题	16
2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题	19
2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题	22
2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题	25
2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题	28
2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题	32
2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题	35
2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题	38
2005 年全国硕士研究生入学统一考试试题	41

第三篇 真题解析

第一部分 高等数学	44
第一章 函数 极限 连续	44
第二章 一元函数微分学	74
第三章 一元函数积分学	111
第四章 向量代数和空间解析几何	146
第五章 多元函数的微分学	149

第六章	重积分	170
第七章	曲线、曲面积分	189
第八章	无穷级数	213
第九章	常微分方程	233
第二部分	线性代数	241
第一章	行列式	241
第二章	矩阵	248
第三章	向量	265
第四章	线性方程组	277
第五章	特征值与特征向量	297
第六章	二次型	312
第三部分	概率论与数理统计	325
第一章	随机事件和概率	325
第二章	随机变量及其分布	329
第三章	多维随机变量及其分布	333
第四章	随机变量的数字特征	348
第五章	大数定律和中心极限定理	360
第六章	数理统计的基本概念	362
第七章	参数估计	367
第八章	假设检验	378



2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)

(科目代码:301)

考生注意事项

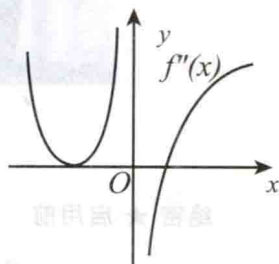
1. 答题前,考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号;在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号,并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上,非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸试题册上答题无效。
3. 填(书)写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写,字迹工整,笔迹清楚;涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束,将答题卡和试题册按规定交回。

[illegible]

一、选择题:1~8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,其2阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为

- (A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.



(2) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解,则

- (A) $a = -3, b = 2, c = -1$.
(B) $a = 3, b = 2, c = -1$.
(C) $a = -3, b = 2, c = 1$.
(D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

- (A) 收敛点,收敛点.
(B) 收敛点,发散点.
(C) 发散点,收敛点.
(D) 发散点,发散点.

(4) 设 D 是第一象限中的曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数

$f(x, y)$ 在 D 上连续,则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

- (A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.
(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.
(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$.
(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$.

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充

分必要条件为

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$.
(B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$.
(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$.
(D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = (e_1, e_2, e_3)$,

若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.
(B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.
(D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

- (A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$.
(B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.
(C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.
(D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

(8) 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $EX = 2, EY = 1, DX = 3$, 则 $E[X(X + Y - 2)] =$

- (A) -3.
(B) 3.
(C) -5.
(D) 5.

二、填空题:9~14小题,每小题4分,共24分.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$ _____.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx =$ _____.

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^x + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 是等价无穷小, 求 a, b, k 值.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$ 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算曲线积分 $I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + (x^2 + y^2)dz$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 R^3 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基;

(II) 当 k 为何值时, 存在非 0 向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ .

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 EY .

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

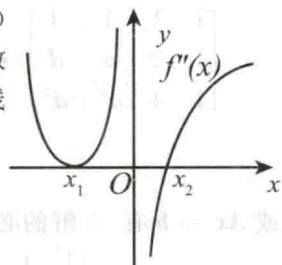
2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一) 参考答案

一、选择题

(1) 【答案】 C

由右图知 $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$, $f''(0)$ 不存在, 其余点上二阶导数 $f''(x)$ 存在且非零, 则曲线 $y = f(x)$ 最多三个拐点, 但在 $x = x_1$ 的两侧二阶导数不变号, 因此, 不是拐点, 而在 $x = 0$ 和 $x = x_2$ 的两侧二阶导数变号, 则曲线 $y = f(x)$ 有两个拐点, 故应选(C).



(2) 【答案】 A.

【解析】 把 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 代入微分方程,

待定系数即可求得 a, b, c .

由 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 得 $y' = e^{2x} + (x + \frac{2}{3})e^x$, $y'' = 2e^{2x} + (x + \frac{5}{3})e^x$,

把 y, y', y'' 代入方程 $y'' + ay' + by = ce^x$, 有

$$(2 + a + \frac{1}{2}b)e^{2x} + (1 + a + b)xe^x + (1 - b)e^x = ce^x,$$

$$\text{待定系数} \begin{cases} 2 + a + \frac{1}{2}b = 0 \\ 1 + a + b = 0 \\ \frac{5}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b = c \end{cases}, \text{得} \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}. \text{因此应选(A).}$$

【评注】 其实, 我们可看出齐次线性微分方程的特征根为 1 和 2, 非齐次线性微分方程的一个特解可为 $y = xe^x$, 进一步求得 a, b, c .

(3) 【答案】 B.

【解析】 用阿贝尔定理, 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛知, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 1$ 处条件收敛, 在 $x = -1$ 处发散, 其收敛区间 $(-1, 1)$,

进而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间为 $(0, 2)$, 逐项求导后幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$ 的收敛区间为 $(0, 2)$, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的收敛区间也为 $(0, 2)$.

则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的收敛点和发散点, 应选(B).

(4) 【答案】 B.

【解析】 画出积分区域, 用极坐标把二重积分化为二次积分.

曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 的极坐标方程分别为

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r = \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}},$$

直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 的极坐标方程分别为 $\theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{3}$.

所以 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sqrt{3}\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$. 应选(B).

【评注】 注意极坐标与直角坐标的转化 $dx dy = r dr d\theta$.

(5) **【答案】** D.

【解析】 $Ax = b$ 有 ∞ 解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 3 & a^2-1 & d^2-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & d^2-3d+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2-3a+2=0 \\ d^2-3d+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \Omega, d \in \Omega$$

或 $Ax = b$ 有 ∞ 解的必要条件 $|A| = 0$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2) = 0 \quad a = 1 \text{ 或 } 2.$$

再分情况判断 $Ax = b$ 是否有 ∞ 解, 亦有 D.

(6) **【答案】** A.

【解析】 f 在正交变换 $x = Py$ 下标准形 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 意味着 A 的特征值: $2, 1, -1$.

又 $P = (e_1, e_2, e_3)$ 说明 $2, 1, -1$ 的特征向量依次为 e_1, e_2, e_3 .

由 e_3 是 -1 的特征向量, 知 $-e_3$ 仍是 -1 的特征向量, 故 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ 时, 二次型标准形为: $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ 应选 A.

(7) **【答案】** C.

【解析】 由于 $AB \subset (A \cup B)$, 故 $P(AB) \leq P(A \cup B)$.

又根据加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

所以 $P(AB) \leq P(A) + P(B) - P(AB)$, 即 $2P(AB) \leq P(A) + P(B)$.

$$P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}.$$

答案应选(C).

(8) **【答案】** D.

【解析】 $E[X(X+Y-2)] = E[X^2 + XY - 2X] = E(X^2) + E(XY) - E(2X)$

$$= DX + (EX)^2 + EX \cdot EY - 2EX$$

$$= 3 + 4 + 2 - 4 = 5.$$

答案应选(D).

二、填空题

(9) **【答案】** $-\frac{1}{2}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$