MATHEMATICS 国外经典数学教材译丛

PEARSON

微积分

下册

CALCULUS

威廉·布里格斯（William Briggs）
莱尔·科克伦（Lyle Cochran）／著
伯纳德·吉勒特（Bernard Gillett）

PEARSON

中国人民大学出版社

国外经典数学教材译丛

微积分

下册

CALCULUS

威廉·布里格斯（William Briggs）
莱尔·科克伦（Lyle Cochran）／著
伯纳德·吉勒特（Bernard Gillett）
阳庆节　黄志勇　周泽民　陈　慈／译

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/(美)布里格斯, (美)科克伦, (美)吉勒特著; 阳庆节等译. —北京: 中国人民大学出版社, 2014.9

(国外经典数学教材译丛)

ISBN 978-7-300-18875-1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①布… ②科… ③吉… ④阳… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 215955 号

国外经典数学教材译丛

微积分(下册)

[美] 威廉·布里格斯　莱尔·科克伦　伯纳德·吉勒特 著

阳庆节　黄志勇　周泽民　陈　慈 译

Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　话	010-62511242（总编室）		010-62511770（质管部）
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　址	http: //www.crup.com.cn		
	http: //www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	涿州市星河印刷有限公司		
规　格	215mm × 275mm　16 开本	版　次	2014 年 10 月第 1 版
印　张	34.5　插页 1	印　次	2014 年 10 月第 1 次印刷
字　数	918 000	定　价	76.00 元

前　　言

这本教材为大学微积分课程而写. 其主要对象是主修数学、工程和自然科学的大学本科学生. 编写依据是多年来我们在许多不同学校教授微积分的经验, 我们在教授微积分的过程中使用了所知的最好的教学训练方法.

纵贯全书, 我们用简单、扼要而且新鲜的叙述阐明了微积分思想的来源和动机. 本书的评阅者和试用者都告诉我们, 本书内容与他们讲授的课程是一致的. 我们通过具体的例子、应用及类推, 而不是抽象的论述来引入主题. 借助于学生的直觉和几何天性, 我们使微积分看起来是自然的并且是可信的. 一旦建立了直观基础, 紧接着就是推广和抽象化. 我们在教材中给出了非正式的证明, 但不太显而易见的证明则放在每节的结尾处或附录 B 中.

本书教学特色

习题

每一节后面的习题是本教材最主要的特色之一. 全部习题都按难易程度分级, 题目类型丰富多彩, 其中许多是独创的. 此外, 每个习题都有标题并仔细划分到各个组.

- 每节后面的习题都由 "复习题" 开始, 以检验学生对这一节的基本思想和概念是否理解.
- "基本技能" 中的问题是建立自信的练习, 为接下来更具挑战性的习题打下坚实的基础. 教材中讲述的每个例题都通过题解后面指出的 "相关习题" 与 "基本技能" 中的一批习题相联系.
- "深入探究" 习题拓展了 "基本技能" 习题, 来挑战学生的创新思维和推广新技巧的能力.
- "应用" 习题把前面的习题所发展出来的技能与实际问题和建模问题联系起来, 可以说明微积分的强大威力和作用.
- "附加练习" 一般是最困难、最具挑战性的问题; 包括教材中所引用的结果的证明.

在每一章最后有一组综合性的复习题.

图

考虑到绘图软件的强大功能及许多学生容易理解直观图像, 我们在本教材中用大量篇幅详细地讨论图形. 我们尽可能使用注释让图与基本思想交流, 注释可以使学生回想起教师在黑板上所说的话. 读者将很快发现图是促进学习的新方法.

迅速核查与边注

正文中的 "迅速核查" 问题作为点缀用来鼓励学生边读边写, 它们就像教师在课堂上提出的一些问题. "迅速核查" 问题的答案放在每节的结尾处. 边注则对正文给予提示, 帮助理解和澄清学术要点.

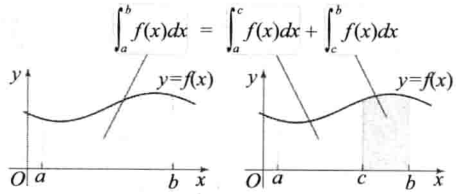

图 5.29

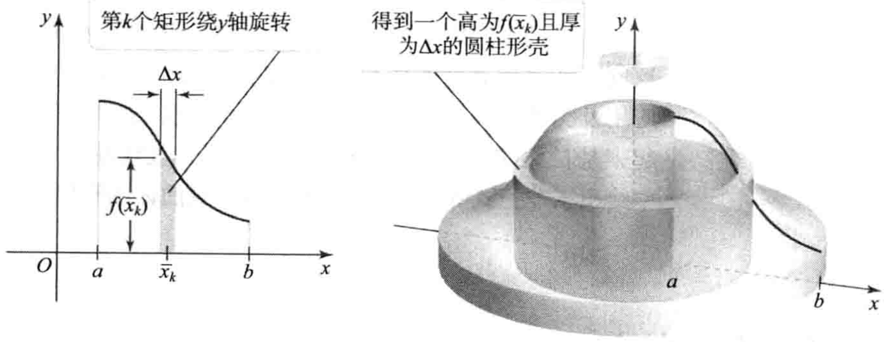

图 6.31

精彩内容

在写这本教材时, 我们发现微积分课程中的一些内容始终困扰着我们的学生. 因此, 我们对这些主题的标准介绍作了一些组织上的改变, 放慢讲述的进度, 以使学生对传统上比较困难的部分容易理解. 值得指出的两个变化概述如下.

在微积分中, 数列和级数极具挑战性, 而且经常是在学期末才学习这部分内容. 我们把这部分内容分为两章, 以更加从容的速度介绍这个主题, 在没有显著增加课时的情况下, 使学生更容易理解和掌握数列和级数.

有一条清晰且合乎逻辑的途径直接通向多元微积分, 但在许多教材中并没有显现出来. 我们小心地将多元函数与向量值函数分开, 目的是使学生意识到这两个概念是不同的. 当这两种思想在最后一章的向量微积分中会合时, 本书到达高潮.

保证正确率

我们在第一版所面临的巨大挑战之一是确保本书的正确率符合高标准, 这也是教师们所期望的. 200 多名数学家复查了原稿的准确性、难易程度及教学有效性. 此外, 在出版之前, 近 1 000 名同学参加了本书的课堂试用. 一个数学家团队在多轮编辑、校对及核对正确性的过程中, 仔细检查了每个例题、习题和图. 从开始到整个发展过程中, 我们的目标是精心地制作一本在数学上准确清晰并且在教学上合理可靠的教材.

致　学　生

我们提供一些建议, 以使读者从本书及微积分课程中得到最大的收获.

1. 多年教授微积分的经验告诉我们, 学习微积分的最大障碍不是微积分中的新概念, 这些概念通常都是容易理解的. 学生们遇到的更大的挑战是一些必备能力, 特别是代数和三角. 如果在第 2 章之前能够很好地理解代数和三角函数, 那么你在学习掌握微积分时将会减少许多困难. 利用第 1 章和附录 A 中的内容, 同时复习你的授课老师可能提供的材料, 可使你在开始学习微积分之前具有优秀的必备能力.

2. 一个古老的说法值得重复: 数学不是一个能吸引大量旁观者的运动. 没有人能够期望仅仅通过阅读本书和听课就可以学好微积分. 参与和投入是必须的. 在阅读本书时, 请准备好笔和纸. 边读边在页边空白处作笔记, 并回答 迅速核查的问题. 做习题来学习微积分将比其他任何方法都更加迅速有效.

3. 使用图形计算器和计算机软件是教授和学习微积分的一个主要争议点. 不同的教师对技术的强调是不同的, 所以重要的是了解教师对使用技术的要求, 并尽可能快地掌握这些所要求的技术. 要在使用技术和使用所谓分析, 或者说笔和纸的方法之间平衡. 技术应该用来拓展和检验分析能力, 但不能替代分析能力.

记住这些思想, 现在可以开始微积分的旅行了. 我们希望这会令你们激动兴奋, 就像每次教授微积分时我们都会感到激动兴奋一样.

威廉・布里格斯
莱尔・科克伦
伯纳德・吉勒特

目　　录

第9章　数列和无穷级数

本章概要 本章涵盖的主题是微积分的基础, 实际上也是数学的基础. 首要任务是澄清数列和无穷级数的区别. 一个数列是数 $a_1, a_2, \cdots$ 的有序列, 而无穷级数是数的和: $a_1 + a_2 + \cdots$. 收敛到极限的概念对数列和无穷级数都是重要的, 但在这两种情况下分析收敛性的方法是不同的. 我们用函数在无穷远处极限的相同方法确定数列的极限. 无穷级数的收敛则是另一回事, 我们在本章发掘所需要的方法. 我们从随处可见的几何级数开始研究无穷级数; 几何级数有非常重要的理论意义, 并用于解决许多实际问题 (汽车贷款何时还清? 如果一天服用三颗药丸, 血液内有多少抗生素?). 然后我们介绍确定正项级数是否收敛的几个判别法则. 最后, 我们讨论了每项依次改变符号的交错级数, 为下一章的幂级数作准备.

9.1　概　　述

按常规惯例, 本章中级数和无穷级数互换使用.

为理解数列和无穷级数, 必须了解它们的异同之处. 本节的目的是介绍用具体项表示的数列和级数, 并阐述它们的不同之处以及重要联系.

数列的例子

最后一个数后的点 $\cdots$ (称作省略号) 表明这个列表无限地延续.

考虑下面数的列表:

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \cdots\}$$

列表中的每个数由它前面一个数加 3 得到. 根据这个规则, 我们可以把这个列表无限地写下去.

这个列表是**数列**的一个例子, 其中的每个数称为数列的**项**. 我们用下面任何一种形式表示一个数列:

$$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \{a_n\}$$

a_n 中出现的下标 n 称作**指标**, 它表示数列中项的顺序. 第一个指标的选择是任意的, 但数列通常从 $n=0$ 或 $n=1$ 开始.

可以用两种方式定义数列 $\{1, 4, 7, 10, \cdots\}$. 首先, 我们有这样的规则: 数列的每一项都比前一项大 3; 即 $a_2 = a_1 + 3, a_3 = a_2 + 3, a_4 = a_3 + 3$ 等. 一般地, 我们发现

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

这种定义数列的方式称作**递推关系**(或**隐式公式**). 它指定数列的首项 (在这个例子中, $a_1 = 1$), 并提供了由前一项计算后一项的通用规则. 比如, 如果知道 a_{100}, 递推关系可用来求 a_{101}.

假设我们希望直接求 a_{147} 而不计算数列的前 146 项. 数列的前四项可以写成

$$a_1=1+(3\times 0),\quad a_2=1+(3\times 1),\quad a_3=1+(3\times 2),\quad a_4=1+(3\times 3).$$

观察其模式: 数列的第 n 项等于 1 加上 3 与 $n-1$ 的乘积, 或

迅速核查 1. 用递推关系求数列 $\{1,4,7,10,\cdots\}$ 的 a_{10}, 然后再用第 n 项的显式公式求 a_{10}. ◄

$$a_n=1+3(n-1)=3n-2,\quad n=1,2,3,\cdots$$

有了这个**显式公式**, 数列的第 n 项可以由 n 的值直接得到. 比如, 对 $n=147$,

$$a_{\underbrace{147}_{n}}=3\times\underbrace{147}_{n}-2=439.$$

当用显式公式 $a_n=f(n)$ 定义时, 数列显然是一个函数, 其定义域是正整数或非负整数的集合, 且实数 a_n 与定义域中的每一个整数对应.

> **定义　数列**
>
> 一个**数列** $\{a_n\}$ 是一个数的有序列表, 形如
>
> $$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$$
>
> 一个数列可由形如 $a_{n+1}=f(a_n),n=1,2,3,\cdots$ 的**递推关系**生成, 其中 a_1 给定. 一个数列也可以用形如 $a_n=f(n)$ 的第 n 项的**显式公式**定义.

例 1　显式公式 根据 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的显式公式写出每个数列的前四项. 作数列的图像.

a. $a_n=\dfrac{1}{2^n}$;　　**b.** $a_n=\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$.

解

a. 将 $n=1,2,3,4,\cdots$ 代入显式公式 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$, 我们求得数列的项为

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},\cdots\right\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\right\}.$$

数列的图像就像仅定义在整数集上的函数图像. 在本例中, 我们描点 $(n,a_n),n=1,2,3,\cdots$, 得到由单个点组成的图像. 数列 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ 的图像表明数列的项在 n 增大时趋于 0(见图 9.1).

“开关” $(-1)^n$ 通常用来改变数列或级数项的符号.

b. 将 $n=1,2,3,4,\cdots$ 代入显式公式, 数列的项为

$$\left\{\frac{(-1)^1(1)}{1^2+1},\frac{(-1)^2 2}{2^2+1},\frac{(-1)^3 3}{3^2+1},\frac{(-1)^4 4}{4^2+1},\cdots\right\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{2}{5},-\frac{3}{10},\frac{4}{17},\cdots\right\}.$$

由图像 (见图 9.2) 我们看到数列的项一次变化符号, 且在 n 增大时似乎趋近于 0.

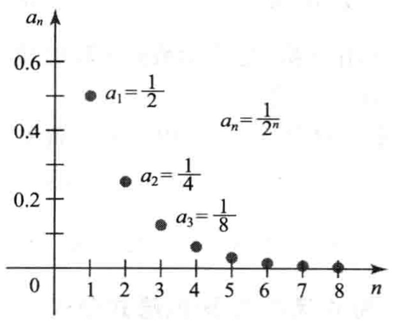

图 9.1

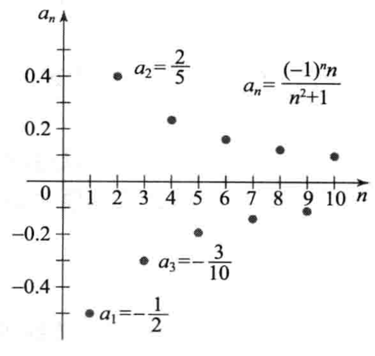

图 9.2

相关习题 9～12 ◄

例 2　递推关系 利用 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的递推关系写出每个数列的前四项.

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1; \quad a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = -1.$$

解　注意, 两个数列的递推关系是相同的, 仅仅是第一项不同. 这两个数列的前四项如下.

n	$a_1 = 1$ 的 a_n	$a_1 = -1$ 的 a_n
1	$a_1 = 1$ 给定	$a_1 = -1$ 给定
2	$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$	$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(-1) + 1 = -1$
3	$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$	$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(-1) + 1 = -1$
4	$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$	$a_4 = 2a_3 + 1 = 2(-1) + 1 = -1$

我们看到第一个数列的项递增无上界, 而第二个数列的所有项均为 -1. 显然, 数列的首项很大程度上影响数列的整体性状.

相关习题 13～16 ◀

迅速核查 2. 求数列 $\{1, 3, 7, 15, \cdots\}$ 的显式公式 (例 2). ◀

例 3　使用数列 考虑下面的数列.

a. $\{a_n\} = \{-2, 5, 12, 19, \cdots\}$;　　**b.** $\{b_n\} = \{3, 6, 12, 24, 48, \cdots\}$.

(i) 求数列接下来的两项.

(ii) 求数列的递推关系.

(iii) 求数列第 n 项的显式公式.

解

例 3 中, 我们选择起始指标为 $n = 0$. 其他选择是可能的.

a.　**(i)**　每一项由前一项加 7 得到. 接下来的两项是 $19 + 7 = 26$ 和 $26 + 7 = 33$.

(ii)　由于每一项比其前一项大 7, 递推关系为

$$a_{n+1} = a_n + 7, a_0 = -2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

(iii)　注意到 $a_0 = -2, a_1 = -2 + (1 \times 7), a_2 = -2 + (2 \times 7)$, 所以显式公式为

$$a_n = 7n - 2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

b.　**(i)**　每一项由前一项乘以 2 得到. 接下来的两项是 $48 \times 2 = 96$ 和 $96 \times 2 = 192$.

(ii)　由于各项是它前一项的 2 倍, 递推关系为

$$a_{n+1} = 2a_n,\ a_0 = 3, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

(iii)　为得到显式公式, 注意到 $a_0 = 3, a_1 = 3(2^1), a_2 = 3(2^2)$, 一般地,

$$a_n = 3(2^n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

相关习题 17～22 ◀

数列的极限

关于数列最重要的问题也许是这样的: 如果在数列中向外越走越远, $a_{100}, \cdots$, $a_{10,000}, \cdots$, $a_{100,000}, \cdots$, 数列的项有何性状? 它们是否趋于一个特定的数? 如果是,

这个数等于多少? 或者它们的绝对值无限增大? 或者它们按一定方式或没有固定方式摆动?

数列的长期性状用**极限**来描述. 数列极限将在下一节中严格定义. 现在, 我们用非正式的定义来讨论.

数列的极限

如果当 n 增大时, 数列 $\{a_n\}$ 的项趋近于唯一的数 L, 那么我们称 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 存在, 数列**收敛**于 L. 如果当 n 增大时, 数列 $\{a_n\}$ 的项不趋近于单一数, 那么数列没有极限, 称数列**发散**.

例 4　数列的极限 写出每个数列的前四项. 如果相信数列收敛, 猜测其极限. 如果数列看上去发散, 解释为什么.

a. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$;　(显式公式)

b. $\{\cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$;　(显式公式)

c. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $a_{n+1} = -2a_n, a_1 = 1$.　(递推关系)

解

a. 从 $n=1$ 开始, 数列的前四项是

$$\left\{\frac{(-1)^1}{1^2+1}, \frac{(-1)^2}{2^2+1}, \frac{(-1)^3}{3^2+1}, \frac{(-1)^4}{4^2+1}, \cdots\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \cdots\right\},$$

项的量值递减, 依次改变符号且趋于零. 极限看似是 0(见图 9.3).

b. 数列的前四项是

$$\{\cos\pi, \cos 2\pi, \cos 3\pi, \cos 4\pi, \cdots\} = \{-1, 1, -1, 1, \cdots\},$$

在此种情形下, 数列的项在 -1 和 1 之间摆动, 不可能趋于单一值. 因此, 数列发散 (见图 9.4).

c. 数列的前四项是

$$\{1, -2a_1, -2a_2, -2a_3, \cdots\} = \{1, -2, 4, -8, \cdots\},$$

因为各项的量值无限增大, 所以数列发散 (见图 9.5).

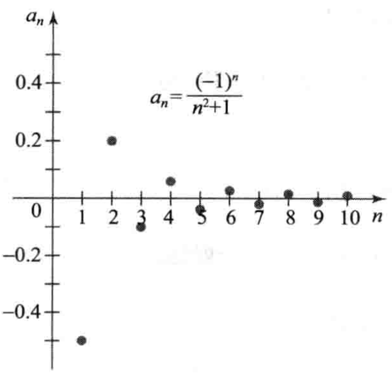

图 9.3

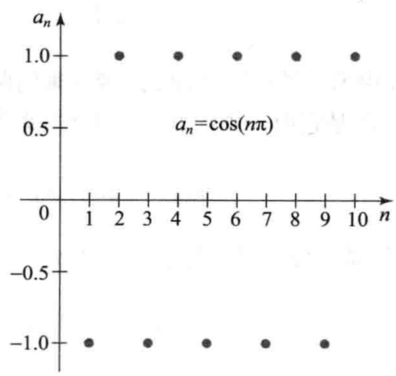

图 9.4

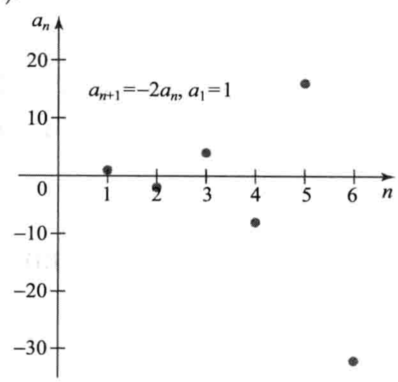

图 9.5

相关习题 23～30 ◄

例 5　数列的极限 列举下面数列的一些项并作图像, 猜测数列的极限.

$$a_n = \frac{4n^3}{n^3+1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.　(显式公式)$$

解　数列 $\{a_n\}$ 的前 14 项列表 9.1 中, 图像见图 9.6. 各项看去趋近于 4.

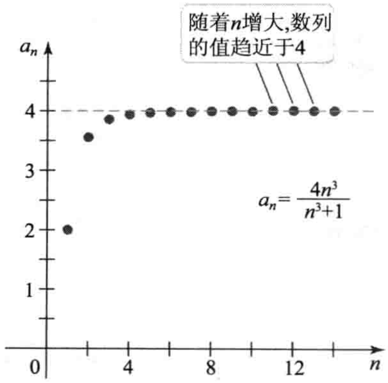

图 9.6

表 9.1

n	a_n	n	a_n
1	2.000	8	3.992
2	3.556	9	3.995
3	3.857	10	3.996
4	3.938	11	3.997
5	3.968	12	3.998
6	3.982	13	3.998
7	3.988	14	3.999

相关习题 31～44 ◄

例 6　弹跳的球 空中垂直上抛的篮球达到最高点后落到地板上. 假设篮球落到地板后再次弹起的高度是前一次的 0.8 倍. 设 h_n 是第 n 次弹起后的最高点, 初始高度为 $h_0 = 20$ ft.

a. 求数列 $\{h_n\}$ 的递推关系和显式公式.

b. 第 10 次弹起后的最高点等于多少? 第 20 次弹起后呢?

c. 猜测数列 $\{h_n\}$ 的极限.

解

a. 首先我们利用每次弹起高度是前一次弹起的 0.8 倍这个规律, 写出几次弹起的高度并作其图像 (见图 9.7). 比如, 我们有

$$\begin{aligned} h_0 &= 20 \text{ ft}, \\ h_1 &= 0.8h_0 = 16 \text{ ft}, \\ h_2 &= 0.8h_1 = 0.8^2 h_0 = 12.80 \text{ ft}, \\ h_3 &= 0.8h_2 = 0.8^3 h_0 = 10.24 \text{ ft}, \\ h_4 &= 0.8h_3 = 0.8^4 h_0 \approx 8.19 \text{ ft}. \end{aligned}$$

列表中的每个数是前一个数的 0.8 倍. 因此, 高度数列的递推关系为

$$h_{n+1} = 0.8h_n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, h_0 = 20 \text{ ft}.$$

为求第 n 项的显式公式, 注意到

$$h_1 = h_0 \cdot 0.8, \quad h_2 = h_0 \cdot 0.8^2, \quad h_3 = h_0 \cdot 0.8^3, \quad h_4 = h_0 \cdot 0.8^4.$$

一般地, 我们得

$$h_n = h_0 \cdot 0.8^n = 20 \cdot 0.8^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

这就是数列各项的显式公式.

b. 利用数列的显式公式, 我们得第 10 次弹起后的高度是

$$h_{10} = 20 \times 0.8^{10} \approx 2.15 \text{ft}.$$

第 20 次弹起后的高度是

$$h_{20} = 20 \times 0.8^{20} \approx 0.23 \text{ft}.$$

c. 数列的项 (见图 9.8) 看上去递减并趋于 0. 一个合理的猜测就是 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

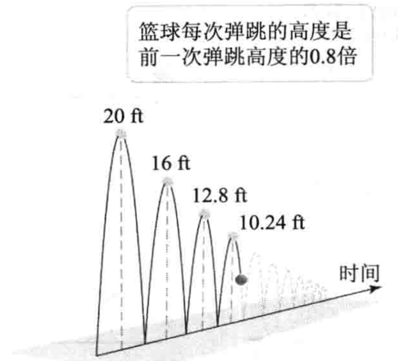

图 9.7

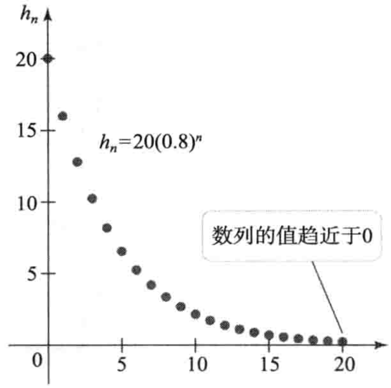

图 9.8

相关习题 45～48 ◄

无穷级数与部分和数列

一个无穷级数可以看成无穷多个数的和, 它的形式为

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

其中级数的项 $a_1, a_2, \cdots$ 是实数. 无穷级数与数列有很大不同. 首先我们解答这个问题: 如何求无穷多个数的和并得到一个有限的数? 下面的例子有启发性.

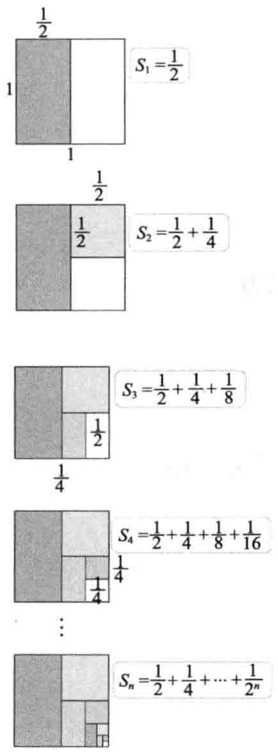

图 9.9

如图 9.9 所示, 考虑被重分的单位正方形 (边长为 1). 我们把此过程中第 n 个图形的染色区域面积记为 S_n. 第一个图形中染色区域的面积为

$$S_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

第二个图形中染色区域的面积等于 S_1 加较小的正方形的面积 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. 因此,

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

第三个图形中染色区域的面积等于 S_2 加较小的长方形的面积 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. 因此

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

以这种方式进行下去, 我们得到

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

如果这个过程无限地进行下去, 染色区域的面积 S_n 趋近于正方形的面积, 即 1. 因此认为

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots}_{\text{求和无限地进行}} = 1$$

是合理的. 这个例子说明有可能对无穷多个数求和并得到一个有限数, 在本例中和是 1. 在这个例子中生成的数列 $\{S_n\}$ 特别重要. 它称为部分和数列, 它的极限是无穷级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ 的值.

例 7　用级数 考虑无穷级数

$$0.9+0.09+0.009+0.000\,9+\cdots$$

其中和的每一项是前一项的 $\dfrac{1}{10}$.

a. 求级数前一、二、三、四、五项的和.

b. 应该赋予级数 $0.9+0.09+0.009+\cdots$ 什么值?

解

a. 令 S_n 表示已知级数的前 n 项和, 则

$$\begin{aligned}
S_1&=0.9,\\
S_2&=0.9+0.09=0.99,\\
S_3&=0.9+0.09+0.009=0.999,\\
S_4&=0.9+0.09+0.009+0.000\,9=0.999\,9,\\
S_5&=0.9+0.09+0.009+0.000\,9+0.000\,09=0.999\,99.
\end{aligned}$$

b. 注意, 和 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 构成一个数列, 也就是部分和数列. 随着求和项的增多, S_n 的值趋于 1. 因此, 对级数的值的一个合理猜测是 1:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{0.9}_{S_1=0.9}+0.09}_{S_2=0.99}+0.009}_{S_3=0.999}+0.000\,9+\cdots=1.$$

相关习题 49 ~ 52 ◄

迅速核查 3. 类似于例 7 的推理方法, $0.3+0.03+0.003+\cdots$ 的值是多少? ◄

回顾第 5 章引入的和号: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

例 7 中数列的第 n 项的一般式可以写成

$$S_n=\underbrace{0.9+0.09+0.009+\cdots+0.0\cdots9}_{n\text{ 项}}=\sum_{k=1}^{n}9\cdot0.1^k.$$

我们观察得到 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$. 为此, 我们记

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}9\cdot0.1^k}_{S_n}=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}9\cdot0.1^k}_{\text{新对象}}=1.$$

令 $n\to\infty$, 一个新的数学对象 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}9\cdot0.1^k$ 产生了. 它是一个无穷级数, 等于部分和数列的极限.

术语 “级数” 的使用有历史原因. 当看到级数时, 应该想到和.

> **定义　无穷级数**
>
> 给定数集 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, 和
>
> $$a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$
>
> 称为**无穷级数**. 它的**部分和数列** $\{S_n\}$ 的项为
>
> $$\begin{aligned}S_1&=a_1,\\ S_2&=a_1+a_2,\end{aligned}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 L, 则称无穷级数**收敛**于这个极限, 记为

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{S_n} = \lim_{n\to\infty} S_n = L.$$

如果部分和数列发散, 则无穷级数也**发散**.

迅速核查 4. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} k$ 收敛或发散? ◄

例 8 部分和数列 考虑无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

a. 求部分和数列的前四项.

b. 求 S_n 的表达式, 并猜测级数的值.

解

a. 部分和数列能够准确计算出来:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2},$$
$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$
$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4},$$
$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.$$

b. 根据部分和数列的变化规律, 合理的猜测是 $S_n = \dfrac{n}{n+1}, n = 1, 2, 3, \cdots$. 这样得到数列 $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \cdots\right\}$ (见图 9.10). 因为 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, 我们得出结论

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

相关习题 53～56 ◄

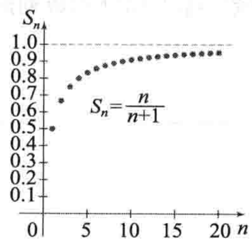

图 9.10

迅速核查 5. 求无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k$ 的部分和数列的前四项. 该级数收敛还是发散? ◄

总结

本节要记住三个主要概念.

- 数列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是数的有序列.

- 无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 是数的和.
- 部分和数列 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 用来计算级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

对于数列, 我们探询在列中向外越来越远的项的性状, 即 $\lim_{n\to\infty} a_n$. 对于无穷级数, 我们考察级数的部分和数列. 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限, 则无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛于该极限. 如果部分和数列没有极限, 则级数发散.

表 9.2 显示数列/级数与函数、和与积分之间的对应关系. 对于数列, 指标 n 起着自变量的作用且仅取整数值; 数列 $\{a_n\}$ 的项对应于因变量.

对数列 $\{a_n\}$ 而言, 累积的概念对应于求和, 而对函数来说, 累积对应于积分. 有限和与函数在有限区间上的积分类似. 无穷级数则类似于函数在无限区间上的积分.

表 9.2

	数列/级数	函数
因变量	n	x
自变量	a_n	$f(x)$
定义域	整数	实数
	e.g., $n=0,1,2,3,\cdots$	e.g., $\{x : x \geqslant 0\}$
累积	和	积分
有限区间上累积	$\sum_{k=0}^{n} a_k$	$\int_0^n f(x)dx$
无限区间上累积	$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$	$\int_0^{\infty} f(x)dx$

9.1 节 习题

复习题

1. 定义数列并举例.
2. 假设数列 $\{a_n\}$ 由显式公式 $a_n = \frac{1}{n}, n = 1,2,3,\cdots$ 定义, 写出数列的前五项.
3. 假设数列 $\{a_n\}$ 由递推关系 $a_{n+1} = na_n, n = 1,2,3,\cdots$ 定义, 其中 $a_1 = 1$, 写出数列的前五项.
4. 定义有限和并举例.
5. 定义无穷级数并举例.
6. 已知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k$, 计算部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ 的前四项.
7. 部分和数列的项由 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, n = 1,2,3,\cdots$ 定义, 计算该数列的前四项.
8. 考虑无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, 计算部分和数列的前四项.

基本技能

9～12. 显式公式 写出数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的前四项.

9. $a_n = 1/10^n$.
10. $a_n = n + 1/n$.
11. $a_n = 1 + \sin(\pi n/2)$.
12. $a_n = 2n^2 - 3n + 1$.

13～16. 递推关系 写出由下列递推关系定义的数列 $\{a_n\}$ 的前四项.

13. $a_{n+1} = 3a_n - 12; a_1 = 10$.
14. $a_{n+1} = a_n^2 - 1; a_1 = 1$.
15. $a_{n+1} = 3a_n^2 + n + 1; a_1 = 0$.
16. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}; a_1 = 1, a_0 = 1$.

17～22. 列举数列 已知数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的几项.

a. 求数列的下面两项.

b. 求生成该数列的递推关系 (提供指标的初始值及数列的第一项).