应用技术型大学数学课程系列教材

概率统计与数学模型

主　编　李秋敏
副主编　张利凤　薛　凤

科学出版社

概率统计与数学模型

应用技术型大学数学课程系列教材

概率统计与数学模型

主　编　李秋敏
副主编　张利凤　薛　凤

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括概率论和数理统计两大部分，第 1 至第 5 章介绍概率论的基本知识，包括随机事件与概率、随机变量及分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等；第 6 至第 9 章介绍数理统计的基本知识，包括数理统计、参数估计、假设检验、回归分析等.

本书在概率统计的基础上加入了数学模型，重点强调基础知识如何应用于工程实际，选取了大量的理工类、经管类数学模型实例.

本书可作为高等学校理工类、经管类专业概率论与数理统计课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计与数学模型/李秋敏主编. —北京：科学出版社，2014.8
应用技术型大学数学课程系列教材
ISBN 978-7-03-041505-9

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①概率统计-高等学校-教材 ②数学模型-高等学校-教材　Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 173970 号

责任编辑：昌　盛　周金权 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：阎　磊 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014 年 8 月第　一　版　开本：B5 (720×1000)
2014 年 8 月第一次印刷　印张：12 3/4
字数：257 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“应用技术型大学数学课程系列教材”编委会

前　　言

为了培养应用型科技人才,我们在大学数学的教学中以工程教育为背景,坚持将数学建模、数学实验的思想与方法融入数学主干课程教学,收到了好的效果.通过教学实践我们认为将原来的高等数学、线性代数、概率论与数理统计课程改为微积分与数学模型、线性代数与数学模型、概率统计与数学模型课程,对转变师生的教育理念,引领学生热爱数学学习、重视数学应用很有帮助,对理工类应用型本科学生工程数学素养的培养很有必要.

“将数学建模思想全面融入理工类数学系列教材的研究”是电子科技大学成都学院“以CDIO工程教育为导向的人才培养体系建设”项目中的课题.也是四川省2013～2016年高等教育人才培养质量和教改建设项目.

本套系列教材主要以应用型科技人才培养为导向,以理工类专业需要为宗旨,在系统阐述微积分、线性代数、概率统计课程的基本概念、基本定理、基本方法的同时融入了很多经典的数学模型.重点强调数学思想与数学方法的学习,强调怎样将数学应用于工程实际.

《概率统计与数学模型》主要介绍随机事件、随机变量及其分布、期望方差、大数定律与中心极限定理、数理统计、参数估计、假设检验和回归分析等.

本书的编写具有如下特点:

1.在保证基础知识体系完整的前提下,力求通俗易懂,删除了繁杂的理论性证明过程;教材体系和章节的安排上,严格遵循循序渐进、由浅入深的教学规律;在对内容深度的把握上,考虑应用型科技人才的培养目标和学生的接受能力,做到深浅适中、难易适度;

2.在重要概念和公式的引入上尽量根据数学发展的脉络还原最质朴的案例,教材中引入的很多案例都是数学建模活动中或学生讨论课上最感兴趣的问题,其内容丰富、生动有趣、视野开阔、宏微兼具.这对于提高学生分析问题和解决问题的能力很有帮助;

3.按章配备了难度适中的习题,并附有答案或提示.

全书讲授与讨论需64学时,根据不同层次的需要,课时和内容可酌情取舍.

本书由李秋敏主编,第1、4、5、8、9章由李秋敏编写,第2、3章由薛凤编写,第6、7章由张利凤编写,全书由李秋敏负责统稿.

在本书的编写过程中，我们参阅了大量的教材和文献资料，在此向这些教材的作者表示感谢.

由于编者水平有限，书中难免有缺点和不当之处，恳请同行专家和读者批评指正.

电子科技大学成都学院
数学建模与工程教育研究项目组
2014 年 5 月于成都

目　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随机现象与随机试验

1.1.1　随机现象

在自然界和人类社会生活中，存在各种各样的现象. 有一些是在一定条件下必然会发生的现象. 例如，标准大气压下，水加热到 100℃时必然会沸腾，在 0℃时必然会结冰；同性的电荷必然互相排斥，异性的电荷必然互相吸引；在没有外力作用的条件下，做匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动等，这些现象称为**确定性现象**.

另一些是事前不能预测其结果的现象. 例如，抛一枚均匀硬币，可能出现正面，也可能出现反面；某厂生产的同一类灯泡的寿命会有所差异；某地区每年的降雨量不尽相同，等等. 这些现象称为**非确定性现象**，又称为**随机现象**.

随机现象的结果事前不能预测，但在相同条件下，大量重复试验和观测时，会发现它们呈现某种规律性. 例如，抛一枚均匀硬币，大量重复试验后会发现出现正面和出现反面的次数大约是 1:1，某厂生产的同一类灯泡的寿命总是分布在某个数值附近. 大量同类随机现象的这种规律性称为随机现象的**统计规律性**. 概率论与数理统计正是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科.

1.1.2　随机试验

在概率论中，为叙述方便，对随机现象进行的观察或科学试验统称为试验. 用字母 E 表示.

例 1.1.1　观察下列几个试验.

$E\,1$：投掷一枚均匀骰子，观察出现的点数(即朝上那一面的点数).

$E\,2$：在一批产品中，任取一件，检测它是正品，还是次品.

$E\,3$：投掷一枚质地均匀的硬币两次，观察它出现正面和反面的次数.

$E\,4$：记录某网站一天的点击量.

$E\,5$：从一批灯泡中，任取一只，测试其寿命.

以上试验的结果都是可以观测的，并且具有下列三个共同特点.

(1)试验可以在相同的条件下重复进行，即**可重复性**.

(2)试验的结果不唯一，但在试验前就知道所有可能出现的结果，即结果的**明确性**.

(3)在一次试验中,某种结果出现与否是不确定的,在试验之前不能准确地预测该次试验将会出现哪一种结果,即结果的**随机性**.

所有具有以上三个特点的试验称为**随机试验**,简称为**试验**,并通过随机试验来研究随机现象.

1.2 随机事件

1.2.1 样本空间

对随机试验,人们感兴趣的是试验的结果,将试验 E 的每一种可能结果称为**基本事件**,或称为**样本点**,记为 ω. 所有样本点组成的集合称为试验 E 的**样本空间**,记为 Ω .

例如,在抛掷一枚均匀硬币的试验中,有两个可能结果,即出现正面或出现反面,分别用“正面”和“反面”表示,因此这个随机试验有两个样本点,样本空间 $\Omega=\{$正面,反面$\}$.

例 1.2.1 写出以下随机试验的样本空间.

$E\,1$:投掷一枚均匀骰子,出现的点数可能是 1,2,3,4,5,6 中的任何一种,因此样本空间记为: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$E\,2$:在一批产品中,任取一件,其结果可能是正品,也可能是次品,因此样本空间记为: $\Omega=\{$正品,次品$\}$.

$E\,3$:投掷一枚均匀硬币两次,它可能出现的结果为:两次都为正面;第一次出现正面且第二次出现反面;第一次出现反面且第二次出现正面;两次都为反面. 因此样本空间记为:

$\Omega=\{$(正面、正面),(正面,反面),(反面,正面),(反面,反面)$\}$,

以上三个样本空间中的样本点为有限个.

$E\,4$:网站一天的点击量一定是非负整数,因此,样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

这个样本空间有无穷多个样本点,但这些样本点可以与整数集一一对应,称其样本点数为可列无穷多个.

$E\,5$:从一批灯泡中,任取一只,灯泡的寿命 t 为非负实数,样本空间记为: $\Omega=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

这个样本空间包含有无穷多个样本点,它们充满一个区间,称其样本点数是不可列的.

1.2.2 随机事件

随机试验中,有可能发生也可能不发生的结果称为**随机事件**,简称为**事件**,常

用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 若 A 表示投掷一枚均匀硬币出现正面这一事件,则记 $A=\{$正面$\}$,单个样本点组成的集合$\{\omega\}$称为**基本事件**,多个样本点组成的集合$\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$称为**复合事件**.

随机事件是样本空间的子集. 其中,在每次试验中,一定出现的事件称为**必然事件**,记为 Ω; 一定不可能出现的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$. 如测量某地区 6 岁男童身高的试验,身高小于 0 是不可能事件,身高大于 0 是必然事件.

例 1.2.2　投掷一枚质地均匀的骰子,若记事件 $A=\{$出现的点数为偶数$\}$, $B=\{$出现的点数小于 5$\}$, $C=\{$出现的点数为小于 5 的奇数$\}$, $D=\{$出现的点数大于 6$\}$,则 A,B,C,D 都是随机事件,也可表示为: $A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{1,3\}$, D 为不可能事件,即 $D=\varnothing$. 记事件 $A_n=\{$出现 n 点$\}$, $n=1,2,3,4,5,6$. 显然, $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 都是基本事件, A,B,C 是复合事件.

1.2.3　事件的关系及运算

在一个样本空间中可以定义多个随机事件,事件与事件之间往往有一定的关系. 事件是样本点的集合,因此事件间的关系与运算可以按照集合与集合之间的关系与运算来处理.

下面假设试验 E 的样本空间为 Ω, $A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分别是 E 的事件.

1. 事件的包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 的发生,则称**事件 B 包含事件 A,事件 A 是事件 B 的子事件**,记为 $A\subset B$.

如例 1.2.2 中 $\{1,3\}\subset\{1,2,3,4\}$,即事件 $C\subset B$, 所以 C 是 B 的子事件,事件 B 包含事件 C.

如果事件 A 包含事件 B, 同时事件 B 也包含事件 A, 即 $B\subset A$ 且 $A\subset B$, 则称**事件 A 与事件 B 相等**,或称 A 与 B **等价**,记为 $A=B$.

对任一事件 A, 总有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 和事件

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件,称为**事件 A 与事件 B 的和事件**,记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{A\text{ 发生或 }B\text{ 发生}\}=\{A,B\text{ 中至少有一个发生}\}$$

事件 A,B 的和事件是由 A 与 B 的样本点合并而成的事件.

如例 1.2.2 中 $A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, 则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

类似地, n 个事件的和事件为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, 或记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.

3. 积事件

事件 A 与事件 B 同时发生的事件,称为**事件 A 与事件 B 的积事件**,记作 $A\cap B$ 或 AB . 即

$$A\cap B=\{A\text{ 发生且 }B\text{ 发生}\}=\{A,B\text{ 同时发生}\}.$$

事件 A,B 的积事件是由 A 与 B 的公共样本点所构成的事件.

如例 1.2.2 中 $A=\{2,4,6\}$,$B=\{1,2,3,4\}$, 则 $AB=\{2,4\}$.

类似地,n 个事件的积事件为 $A_1A_2\cdots A_n$, 或记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$.

4. 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件,称为**事件 A 关于事件 B 的差事件**,记作 $A-B$, 表示 A 发生而 B 不发生,即 $A-B=A\bar{B}$.

事件 A 关于 B 的差事件是由属于 A 且不属于 B 的样本点所构成的事件.

如例 1.2.2 中 $A=\{2,4,6\}$,$B=\{1,2,3,4\}$, 则 $A-B=\{6\}$,$B-A=\{1,3\}$.

5. 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$, 则称**事件 A 与事件 B 互不相容**,或称**事件 A 与事件 B 互斥**.

如例 1.2.2 中 $A=\{2,4,6\}$,$C=\{1,3\}$, 则 A,C 是互不相容的.

同一随机试验的基本事件都是互不相容的.

6. 对立事件

试验中" A 不发生"这一事件称为 A 的**对立事件**或 A 的**逆事件**,记为 $\bar{A}$.

一次试验中, A 发生则 $\bar{A}$ 必不发生,而 $\bar{A}$ 发生则 A 必不发生,因此 A 与 $\bar{A}$ 满足关系

$$A\cup\bar{A}=\Omega,\quad A\bar{A}=\varnothing.$$

如例 1.2.2 中 $A=\{2,4,6\}$,$B=\{1,2,3,4\}$, 则 $\bar{A}=\{1,3,5\}$,$\bar{B}=\{5,6\}$.

事件间的关系与运算可用维恩(Venn)图(图 1.1)直观地加以表示. 图中方框表示样本空间 Ω, 圆 A 和圆 B 分别表示事件 A 和事件 B .

事件的运算满足如下运算律:

(1)交换律

$$A\cup B=B\cup A;$$

(2)结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

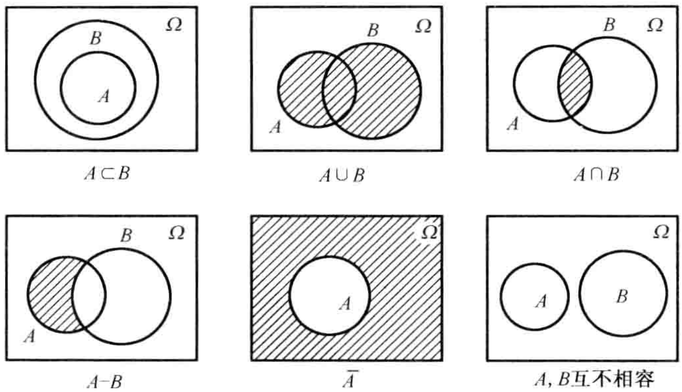

图 1.1

(3)分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

(4)对偶律(De Morgan 定理)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

对偶律还可以推广到多个事件的情况.一般地,对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n,$$
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n;$$

对偶律表明,“至少有一个事件发生”的对立事件是“所有事件都不发生”,“所有事件都发生”的对立事件是“至少有一个事件不发生”.

(5)吸收律

$$若 A \subset B, 则 A \cup B = B, AB = A.$$

例 1.2.3　某人连续三次购买体育彩票,每次一张.令 A, B, C 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖的事件,试用 A, B, C 及其运算表示下列事件:

(1)第三次未中奖;

(2)只有第三次中了奖;

(3)恰有一次中奖;

(4)至少有一次中奖;

(5)至少有两次中奖;

(6)至多中奖两次.

解　(1) $\bar{C}$;

(2) $\bar{A}\bar{B}C$;

(3) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(4) $A \cup B \cup C$ 或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$;

(5) $AB \cup AC \cup BC$ 或 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$;

(6) $\overline{ABC}$.

事件的关系及运算与集合的关系及运算是一致的,但在概率论中有特定的语言表示. 事件关系与集合关系比较见表 1.1.

表 1.1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间、必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	点(元素)
A	随机事件	Ω 的子集
$A \subset B$	A 发生导致 B 发生	A 为 B 的子集
$A = B$	两事件相等	两集合相等
$A \cup B$	两事件 A,B 至少发生一个	两集合 A,B 的并集
AB	两事件 A,B 同时发生	两集合 A,B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而 B 不发生	集合 A,B 的差集
$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	A 对 Ω 的补集
$AB = \varnothing$	两事件 A、B 互不相容	两集合 A,B 不相交

1.3 概率及其性质

1.3.1 概率

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生,但发生的可能性大小是客观存在的. 这个客观存在的量就是事件 A 的概率,记为 $P(A)$. 因此概率度量了随机事件发生的可能性大小. 在 N 次重复试验中,若概率 $P(A)$ 较大,则事件 A 发生的频率也较大,反之,若事件 A 在 N 次重复试验中出现的频率较大,则意味着事件 A 的概率 $P(A)$ 也较大. 概率与频率有许多相似的性质,为此,先考察频率的有关性质.

1.3.2 频率

定义 1.1 设在相同的条件下,重复进行了 n 次试验,若随机事件 A 在这 n 次试验中发生了 m 次,则比值

$$f_n(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**.