21世纪高等教育规划教材

概率统计教程

邢家省　马健 ◎ 编著

Probability and Statistics

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪高等教育规划教材

概率统计教程

邢家省　马　健　编　著

机　械　工　业　出　版　社

本书是关于概率论与数理统计及随机过程初步的教材，主要内容包括随机事件的概率、随机变量及其分布、二维随机变量、随机变量函数的分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、统计总体与样本、参数估计、假设检验、随机过程的基本概念、平稳过程、马尔可夫链引论.

本书结构体系完整，逻辑严谨，设计简明，叙述清楚，既可作为理工科大学本科阶段32学时或48学时概率统计课程的教材，也可作为考研、考博复习的参考书，亦可作为青年教师的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

概率统计教程/邢家省，马健编著.—北京：机械工业出版社，2015.5
21世纪高等教育规划教材
ISBN 978-7-111-49698-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①邢…②马… Ⅲ.①概率统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第054232号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：张金奎 责任编辑：张金奎 陈崇昱 王 芳 汤 嘉
责任校对：陈 越 封面设计：张 静
责任印制：李 洋
三河市国英印务有限公司印刷
2015年5月第1版第1次印刷
169mm×239mm·20.75印张·404千字
0001—3000册
标准书号：ISBN 978-7-111-49698-4
定价：35.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

前　言

概率统计是大学理工科专业的一门重要公共基础课，也是理工科大学生必备的知识体系．这门课程的研究对象和理论、方法、知识等，对于相关专业课程的学习和开展科学研究都是必不可少的．

概率统计以自然界和社会中的不确定现象和各种随机现象为研究对象，为此而提出了对问题的阐述，产生了研究解决问题的思想方法、理论、工具和手段，得到了大量的结果，揭示了许多科学规律，构建了科学文化知识体系，从而指导人们的科学认识和实践．

概率统计作为学科的知识体系，已非常丰富和完善了，但在现代大学的教学改革实践中，概率统计课程的学时是有限的，减少课程的学时是必然趋势．这样就需要对原有的知识体系进行合理的取舍，一部分内容可以删减，而有些内容需要增强．

为了在教学中贯彻少而精和学以致用的原则，各种教学改革应运而生，我们删除了一些较难且烦琐的内容，在其他书中极易查到的阅读知识只少量提及，同时保留了核心主体知识．在十多年的教学改革实践中，我们获得了许多新的认识，认知了一批新的规律，写出了一些新的处理方法．

本书集中体现了我们教学改革的实践成果，我们本着为教师教学使用和让读者学好概率统计知识的目的编写了本书．可作为概率统计课程 32 学时或 48 学时的教材．

本书在编写过程中参考并引用了国内外众多同类图书中的资料，吸收了其中许多好的处理方法和一些知识内容，无法一一列举，在此向有关学者前辈一并致谢．

笔者受到郑志明教授和高宗升教授创新教学改革思想的指导，长期得到郑志明教授和高宗升教授的帮助和支持，在此表示衷心感谢．

在多年的教学实践中，从张福渊老师、付丽华老师的教学经验中学到了很多东西．多次讲授过概率统计课程的王进良、冯仁忠、冯伟、刘明菊、赵俊龙、刘超、夏勇、刘红英、钱临宁、杨义川、韦卫、贺慧霞等老师积累了丰富的教学经验，并将其提供给了我们，在此向他们一并致谢．

本书第 1 章至第 6 章由邢家省编写，第 7 章至第 12 章由马健编写，全书由邢家省进行统编定稿．

由于常用的随机变量的分布函数值表可以从众多的概率统计教材和网站上查找到，因此本书不再编入．读者若需要查找常用分布函数值表，完全可以通过公用知识渠道获得．

由于编者学识所限，书中存在的不妥和错误之处，敬请读者发现并给予指正，并请反馈至邮箱：xjsh@buaa. edu. cn ，我们将不胜感激．

编著者

于 北京航空航天大学数学与系统科学学院
数学、信息与行为教育部重点实验室

目　录

第 1 章　随机事件的概率

1.1　随机事件与样本空间

1. 随机试验与随机事件

(1) 试验

为了叙述方便，我们把各种各样的科学试验或对某一事物的某种特性的观察统称为试验．这里的定义是广泛的，此处试验不仅是具体的实验观察，还包括各种思维想象．

(2) 确定性试验或必然试验

自然现象与社会现象是多种多样的，从结果能否预测的角度来分，可以分为确定性现象、随机现象和其他现象．

如果在一定的条件下一个试验中的某种现象是否发生是事先能断言的，则称为确定性试验．例如，在地球上“抛出一重物必然下落”，在没抛之前就能断言；“同性电荷必互斥，异性电荷必吸引”；“水在一个标准大气压下加热到 100℃就沸腾”，这些现象都是确定性试验．

(3) 随机试验

如果一个试验在一定的条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，那么，称它为随机试验，简称为试验．以后我们所说的试验，都是指随机试验．用字母 E 或 E_1，E_2，…表示一个试验．

所谓随机试验是指具有如下特征的试验：

1) 在相同的条件下可以重复进行；

2) 每次试验的结果不止一个，但能事先明确所有可能的试验结果范围；

3) 每次试验之前不能准确预言哪个试验结果会出现．

例如，投掷一颗匀称的骰子，观察其出现的点数；观察早上 7：00 在食堂吃饭的人数；在一个年级中任选一个同学，测试他的身高；观察晚上某时段内在教学楼内上自习的人数，等等，它们都具有 1)～3) 这三个特征，都是随机试验，并分别用 E_1，E_2，E_3，E_4 表示．

随机现象是大量客观存在的，只要我们留心观察并思考身边的世界，就会发现很多．认识与发现随机现象，在日常思维决策中也是很重要的．

(4) 随机事件

在对随机试验的观察中，将试验的结果称为事件．

在试验中可能发生，也可能不发生的结果，称为随机事件，简称事件．通常用字母 A，B，C，…或 A_1，A_2，A_3，…，B_1，B_2，B_3，…，C_1，C_2，C_3，…表示随机事件．

如在试验 E_1 中，$A=$“出现偶数点”和 $B=$“出现的点数大于 4”等都是随机事件；试验 E_2 中，$C=$“有 500 人在吃早饭”和 $D=$“吃早饭的人数不超过 300 人”等也是随机事件；在试验 E_3 中，$A_1=$“身高超过 1.75m”和 $A_2=$“身高在 1.7m～1.8m 之间”等亦是随机事件．

(5) 基本事件

随机试验的每一个可能的结果都是一个随机事件，且是最简单的随机事件，我们把这种事件称为基本事件．

常用小写字母 e，ω 或 e_1，e_2，…，ω_1，ω_2，…表示基本事件．

例如，在试验 E_1 中，$e_i=$“出现 i 点”，$i=1$，2，…，6，则 e_i 是基本事件；$A=\{e_2,\ e_4,\ e_6\}$，$B=\{e_5,\ e_6\}$ 是随机事件，但不是基本事件．

由此可见一般规律性，即随机事件是由若干基本事件组成的．随机事件发生当且仅当组成的基本事件有一个发生．

(6) 必然事件和不可能事件

在试验中必然会发生的事件称为必然事件，记为 S 或 Ω. 一定条件下必然不发生的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$.

如在试验 E_1 中，“出现的点数大于 0”是必然事件；“出现的点数小于 1”是不可能事件．

必然事件和不可能事件实际上并不是随机事件，但为了讨论方便，也把它们当做一种特殊的随机事件．

2. 样本空间

定义 1 试验 E 的全部基本事件组成的集合，称为试验 E 的样本空间或基本事件空间，记为 S 或 Ω. 就是说，试验 E 的基本事件是 E 的样本空间中的元素．基本事件又称为样本点．

如前面的试验 E_1，E_2，E_3 的样本空间分别为

$$S_1=\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_6\},\ S_2=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\},\ S_3=\{h\mid 1.5\text{m}<h<2\text{m}\}.$$

又如“投掷一枚硬币”，这个试验的样本空间 $S=\{$反面向上，正面向上$\}$．若以 0，1 分别表示“反面向上”和“正面向上”这两个基本事件，则样本空间

可简单地表示为 $S=\{0, 1\}$.

实际中，只有两种可能结果的试验是很多的．如检查一件产品是正品或是次品；射击目标是击中或是不中；人的身体健康与否，等．这些试验的样本空间都可以用 $S=\{0, 1\}$ 来表示．

引入样本空间的概念之后，随机事件便是样本空间的子集．特别地，不可能事件$\varnothing$表示空集，而必然事件 S 表示样本空间．

这样，我们就可以引用集合论的有关知识来讨论事件间的关系和运算．

3. 随机事件的关系和运算

设 E 的样本空间为 S，而 A，B，C，$A_i(i=1, 2, \cdots)$ 为 E 的事件，它们是 S 的子集．

1）若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等或称 A 与 B 等价，记为 $A=B$.

例如，掷骰子的试验中，令 $A=\{$出现 2 点$\}$，$B=\{$出现点数小于 4$\}$，$C=\{$出现点数不大于 3$\}$，则有 $A\subset B$，$B=C$.

特别地，对任意事件 A 有$\varnothing\subset A\subset S$.（$A\subset B\Leftrightarrow$事件 B 不发生必然导致事件 A 不发生．）

2）事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 之和，记为 $A+B$ 或 $A\cup B$. 例如，试验 E_1 中，令 $A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{4, 5, 6\}$，则 $A+B=\{2, 4, 5, 6\}$.

显然，若 $B\subset A$，则 $A+B=A$. 对任意事件 A 有 $A+A=A$，$\varnothing+A=A$，$A+S=S$.

3）事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 之积，记为 AB 或 $A\cap B$. 如试验 E_1 中，$A=\{2, 3, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，则 $AB=\{3, 5\}$.

特别地，若 $B\subset A$，则 $AB=B$. 对任意事件 A 有 $AA=A$，$AS=A$，$\varnothing A=\varnothing$.

4）若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容或称事件 A 与事件 B 互斥．如试验 E_1 中，$A=\{2, 4\}$，$B=\{5, 6\}$，则 $AB=\varnothing$. 显然不可能事件$\varnothing$与任何事件 A 互不相容．

5）如果事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$中的任意两个事件都互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$，$\forall i\neq j$，则称事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$互不相容．

6）若 $AB=\varnothing$且 $A+B=S$，则称事件 A 与事件 B 互逆，或称事件 A 与事件 B 对立．即事件 A 是事件 B 的逆事件（对立事件），记为 $A=\overline{B}$；即事件 B 是事件 A 的逆事件（对立事件），记为 $B=\overline{A}$. 如在试验 E_1 中，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{4, 5, 6\}$，则事件 A 与事件 B 互逆．显然 $\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\varnothing}=S$，$\overline{S}=\varnothing$.

7）事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 之差，记为 $A-B$. 如在试验 E_1 中，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3, 5\}$，则 $A-B=\{1\}$.

特别地，$A-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$，$S-A=\overline{A}$. 不难验证，对任意事件 A 和事件 B，$A-B=A-AB=A\overline{B}$成立．

8）事件的和与积的概念可以推广到有限多个的情况．即 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n$ 表示事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生的事件．或可列无穷多个事件，即 $A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$ 表示事件 A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生的事件．$B=\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1A_2\cdots A_n\cdots$ 表示事件 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生的事件．

事件间的关系和运算可以用几何图形直观地表示（见图 1.1a～d).

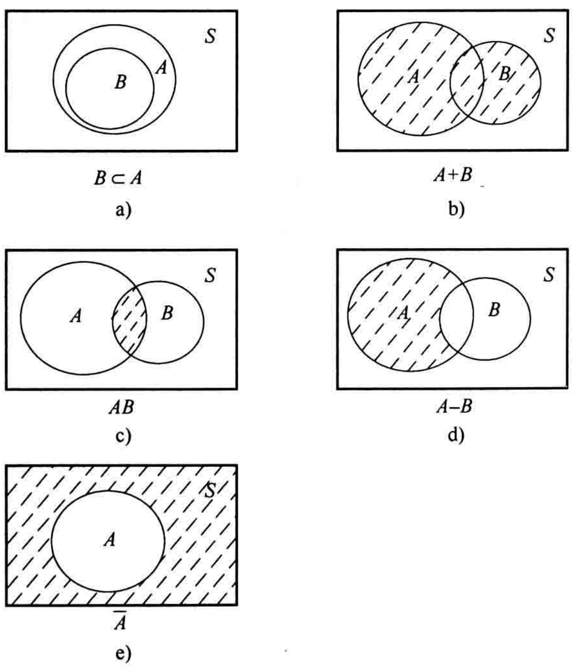

图　1.1

9）由于事件是样本空间的子集，不难验证事件之间的运算满足下列规则：

（ⅰ）交换律　$A+B=B+A$，$AB=BA$；

（ⅱ）结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；

（ⅲ）分配律　$(A+B)C=AC+BC$，$(AB)+C=(A+C)(B+C)$；

（ⅳ）德摩根（De Morgan）公式，对有限个或可列无穷多个事件 A_i，恒有

$$\overline{\sum_i A_i}=\prod_i \overline{A_i},\overline{\prod_i A_i}=\sum_i \overline{A_i},$$

特别地，$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

例 1　事件 A 和事件 B 中恰有一个发生，这个事件可表示为

$$A+B-AB=(A-B)+(B-A).$$

例 2　试将事件 $A+B+C$ 表示为互不相容的事件之和．

解　利用 $A-B=A-AB=A\overline{B}$，$A+B=A+(B-A)=A+(B-AB)=A+B\overline{A}$ 或 $A+B=(A-AB)+AB+(B-AB)$，得到

$$\begin{aligned}A+B+C&=A+(B+C)=A+(B+C)\overline{A}\\&=A+(B+C\overline{B})\overline{A}=A+B\overline{A}+C\overline{B}\,\overline{A}.\end{aligned}$$

还有其他分解表示法，不唯一．

例 3　重复投掷一枚匀称的硬币三次，记录投掷结果．设 $A_i=$“第 i 次投掷出现正面”，$i=1$，2，3. 试用 A_1，A_2，A_3 描述样本空间 S 和下列各个事件：

（1）只第一次出现正面（B_1）；

（2）只出现一次正面（B_2）；

（3）至少出现一次正面（B_3）；

（4）出现正面不多于一次（B_4）．

解　易知样本空间 S 共有 8 个基本事件．即

$$S=\{A_1A_2A_3,\ A_1A_2\overline{A_3},\ A_1\overline{A_2}A_3,\ \overline{A_1}A_2A_3,\ A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3},\ \overline{A_1}A_2\overline{A_3},\ \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3,\ \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\}.$$

（1）“只第一次出现正面”是指第一次出现正面，而第二次和第三次均出现反面，所以，$B_1=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

（2）“只出现一次正面”是指或者仅第一次出现正面，或者仅第二次出现正面，或者仅第三次出现正面，所以，

$$B_2=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3;$$

（3）“至少出现一次正面”是指可能只出现一次正面，也可能出现两次正面，也可能三次都出现正面，所以，

$$B_3=A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3,$$

或表示为 $B_3=A_1+A_2+A_3=\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}}$；

（4）“出现正面不多于一次”是指或者仅出现一次正面，或者三次都出现反面，所以，

$$B_4=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}.$$

由于 B_4 的对立事件是“至少两次出现正面”．所以 B_4 又可表示为

$$B_4=\overline{A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3}.$$

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 对同一目标射击三次，记录射击结果；

(2) 投掷两颗匀称的骰子，记录点数之和；

(3) 射击一目标，直至击中目标为止，记录射击次数；

(4) 袋中装有 4 个白球、6 个黑球，逐个取出，直至白球全部取出为止，记录取球次数；

(5) 往数轴上任意投掷两个质点，观察它们之间的距离；

(6) 将一尺之棰截成三段，观察各段之长．

2. 设袋内有 10 个编号分别为 1～10 的球，从中任取一个，观察其号码，

(1) 写出这个试验的样本空间；

(2) 若 A 表示“取得的球的号码是奇数”，B 表示“取得的球的号码是偶数”，试表示 A 和 B.

3. 某人投篮两次，设事件 $A_1=$“第 1 次投中”，事件 $A_2=$“第 2 次投中”，试用 A_1 和 A_2 表示下列各事件：

(1)“两次都投中”； (2)“两次都未投中”；

(3)“恰有一次投中”； (4)“至少有一次投中”；

4. 设 A，B，C 为三个随机事件，试用 A，B，C 表示下列各事件：

(1) A，B，C 中恰好 A 发生； (2) A，B，C 恰有一个发生；

(3) A，B，C 恰有两个发生； (4) A，B，C 至少有一个发生；

(5) A，B，C 至少有两个发生； (6) A，B，C 不多于一个发生；

(7) A，B，C 不多于两个发生； (8) A，B，C 同时发生；

(9) A，B，C 都不发生．

5. 盒中装有 10 只晶体管．令 $A_i=$“10 只晶体管中恰有 i 只次品”$(i=0,1,2,3)$，$B=$“10 只晶体管中不多于 3 只次品”，$C=$“10 只晶体管中次品不少于 4 只”．问：事件 A_i、事件 B 和事件 C 之间哪些有包含关系？哪些互不相容？哪些互逆？

6. 化简下列各式：

(1) $(A+B)(A+\overline{B})$； (2) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

1.2 古典概率 几何概率 统计概率

所谓随机事件的概率，概括地说就是用来描述随机事件出现（或发生）的可

能性大小的数量指标．其实概率的术语在我们日常生活中经常出现．对未来的不确定事件，我们经常说有多大把握、有多大希望、机会有多大，等等．

概率论与数理统计是研究随机现象及其规律性的一门学科．到目前为止，尽管人们已发现了许多规律，但是数学上仍只能对简单的随机现象进行概率定义，而复杂的随机现象还有待于研究．

随机事件在一次试验中既可能发生，也可能不发生，这似乎没有什么规律．但是在相同的条件下，如果把一个试验重复做许多次，我们一定会发现，某些事件发生的次数多一些，而另一些事件发生的次数少一些，其表现出了一定的规律性．

例如，将一颗骰子重复投掷 100 次，毫无疑问，事件“出现奇数点”比事件“出现 1 点”发生的次数会多得多．那么，发生次数多的事件在每次试验中发生的可能性大一些，而发生次数少的事件在每次试验中发生的可能性小一些．

问题：如何度量事件发生的可能性大小?

对于事件 A，如果实数 $P(A)$ 满足：1）实数 $P(A)$ 的大小表示事件 A 发生的可能性大小；(2) 实数 $P(A)$ 是事件 A 所固有的，是不随人们主观意志而改变的一种度量．那么实数 $P(A)$ 称为事件 A 的概率．它是事件 A 发生的可能性的度量．

在本节中，我们首先介绍一类最简单的概率模型，然后逐步引出概率的一般定义．

1. 古典概型与概率的古典定义

定义 1（古典型随机试验）　如果试验 E 的样本空间 S 只包含有限个基本事件，设 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，并且每个基本事件发生的可能性相等，则称这种试验为古典型随机试验，简称古典概型．

下面我们来讨论古典概型中事件 A 的概率 $P(A)$．

考虑一个具体的例子：投掷一颗匀称的骰子，观察其出现的点数．易知，$S=\{e_1,e_2, \cdots, e_6\}$，其中 e_i 表示“出现 i 点”，$i=1, 2, \cdots, 6$. 由于骰子是匀称的，所以每个基本事件 e_i 发生的可能性相同，所以这是一个古典概型．

考虑事件 $A=\{e_2, e_4, e_6\}$．因为事件 A 包含的基本事件的个数等于基本事件总数的一半，并且每个基本事件发生的可能性都相等，因此，事件 A 发生的可能性，即概率为 $P(A)=\frac{1}{2}$是合理的．$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，它恰好是 A 包含的基本事件的个数除以基本事件总数所得的结果．

定义 2（古典概率）　设试验 E 的样本空间 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，并且每个基本事件发生的可能性相等，若 E 中事件 A 包含 k 个基本事件，则称

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所包含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}$$

为事件 A 的概率．即事件 A 的概率等于事件 A 所包含的基本事件的个数（它们的出现对 A 的出现有利，因此习惯上称为 A 的有利事件，或有利场合）与基本事件总数之比值．概率的这种定义称为概率的古典定义．这样定义的概率称为古典概率．

由概率的古典定义，容易证明古典概率具有下列性质：

1）对任意事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$ 成立；

2）$P(S)=1$；

3）若事件 A_1，A_2，…，A_m 互不相容，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)\ ;$$

4）$P(\overline{A})=1-P(A)$，$P(A)=1-P(\overline{A})$.

证明　1）因为任一事件 A 所包含的基本事件数 k 恒满足 $0\leqslant k\leqslant n$，故

$$0\leqslant P(A)=\frac{k}{n}\leqslant 1;$$

2）由于必然事件 S 包含了全部 n 个基本事件，所以

$$P(S)=\frac{n}{n}=1;$$

3）设事件 A_i 含有 k_i（$0\leqslant k_i\leqslant n$）个基本事件，由定义得

$$P(A_i)=\frac{k_i}{n}\ ,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

由于事件 A_1，A_2，…，A_m 互不相容，故事件 $\sum\limits_{i=1}^{m}A_i$ 含有 $\sum\limits_{i=1}^{m}k_i$ 个不同的基本事件，因此 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{m}A_i\right)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}k_i}{n}=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{k_i}{n}=\sum\limits_{i=1}^{m}P(A_i)$，性质 3）称为概率的有限可加性；

4）因为 A 与 $\overline{A}$ 互不相容，且 $A+\overline{A}=S,1=P(S)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$，所以

$$P(\overline{A})=1-P(A),\ P(A)=1-P(\overline{A}).$$

几个记号的规定：

1）排列数记号　$\mathrm{A}_n^k=\mathrm{P}_n^k=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)$；

2）全排列数记号　$P_n=\mathrm{A}_n^n=n!\ =n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$；

3）组合数记号　$\mathrm{C}_n^k=\dfrac{\mathrm{A}_n^k}{\mathrm{A}_k^k}=\dfrac{\mathrm{A}_n^n}{\mathrm{A}_k^k\cdot\mathrm{A}_{n-k}^{n-k}}=\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!}$.

求解古典概型问题的关键是弄清楚样本空间中的基本事件的总数和对所求概率事件有利的基本事件个数．在弄清楚基本事件个数的时候，必须分清楚所研究

的问题是组合问题还是排列问题.

古典概率计算举例如下.

例 1　盒内装有 5 个红球，3 个白球. 从中任取两个，试求：(1) 取到两个红球的概率；(2) 取到两个相同颜色球的概率.

解　设 $A=$ "取到两个红球"，$B=$ "取到两个同颜色的球".

从 8 个球中任取两个，每种取法为一基本事件，所有不同取法的总数就是基本事件总数. 于是基本事件总数为 C_8^2. 由于两个红球只能在 5 个红球中任取，所以事件 A 包含的基本事件数为 C_5^2. 故由定义 2 得

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{\frac{5\times 4}{2!}}{\frac{8\times 7}{2!}}=\frac{5}{14}.$$

令 $C=$ "取到两个白球"，由于"取到两个同颜色球"意味着"取到两个红球"或者"取到两个白球". 因此，有 $B=A+C$，且 $AC=\varnothing$，又由于两个白球只能在 3 个白球中任取，所以，事件 C 所含基本事件数为 C_3^2. 故由概率的有限可加性及定义得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A+C)=P(A)+P(C)\\&=\frac{5}{14}+\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}+\frac{3}{28}=\frac{13}{28}.\end{aligned}$$

例 2　一批产品中有 M 件正品，N 件次品. 从中任取 n 件，求：恰好取到 k 件次品的概率.

解　设 $A_k=$ "抽取的 n 件产品中恰有 k 件次品"，从 $M+N$ 件产品中任意抽取 n 件，每一种抽取方法为一基本事件，全部不同的抽取方法的总数即为基本事件总数，所以基本事件总数为 C_{M+N}^n. 由于所抽取的 k 件次品必须在 N 件次品中任意抽取，而 $n-k$ 件正品只能从 M 件正品中任意抽取，所以，事件 A_k 含基本事件数为 $C_N^k\cdot C_M^{n-k}$. 故由概率的古典定义得

$$P(A_k)=\frac{C_N^k\cdot C_M^{n-k}}{C_{M+N}^n},\ k=0,1,2,\cdots,l,\ l=\min\{n,N\}.$$

例 3　设一袋中有 n 个白球和 m 个黑球，现在从中无放回地接连抽取 N 个球，求：第 i 次抽取时得黑球的概率 ($1\leqslant i\leqslant N\leqslant n+m$).

解　设 $A_i=$ "第 i 次抽取时得黑球"，显然

$$P(A_1)=\frac{m}{n+m}.$$

把 n 个白球和 m 个黑球看做是各不相同，样本空间中考虑前 N 次摸球. 那么，样本点总数就是从 $n+m$ 个球中任取 N 个球的排列数，即 A_{n+m}^N，而其中第 i 个位置上排黑球的排法是从 m 个黑球中任取一个，排在第 i 个位置上，再从余下

的 $n+m-1$ 个球中任取 $N-1$ 个排在其余 $N-1$ 个位置上，这种排法一共有 $C_m^1A_{n+m-1}^{N-1}$ 个，于是

$$P(A_i)=\frac{C_m^1A_{n+m-1}^{N-1}}{A_{n+m}^N}=\frac{m}{n+m},\ 1\leqslant i\leqslant N\leqslant n+m.$$

本题表明：摸得黑球的概率与摸球的先后顺序无关．这个结论与我们日常的生活经验是一致的．例如，体育比赛中进行抽签，对各队机会均等，其与抽签的先后顺序无关，所以，没有出现争先恐后的抽签现象．

例 4 将 5 本不同的数学书，3 本不同的物理书和 2 本不同的英语书随意地摆放在书架的同一层．试求：(1) 5 本数学书没有两本放在一起的概率；(2) 恰有 3 本数学书放在一起的概率．

解 设 $A=$“5 本数学书没有两本放在一起”，$B=$“恰有 3 本数学书放在一起”．

10 本书的每一种放法为一基本事件，由于 10 本书的所有不同放法共有 $P_{10}=A_{10}^{10}=10!$ 种，故基本事件总数为 $P_{10}=A_{10}^{10}=10!$．

(1) 要使 5 本数学书没有两本放在一起，可分两步来实现．首先将 5 本非数学书随意摆放在书架上，共有 $P_5=A_5^5=5!$ 种不同的放法．然后将 5 本数学书逐一放在相邻两本非数学书之间和两端的六个位置中的任意五个位置上，共有 A_6^5 种不同放法．故由乘法原理（后面章节详细介绍）知，5 本数学书没有两本放在一起的所有不同放法有 $P_5\cdot A_6^5$ 种．即事件 A 含有 $P_5\cdot A_6^5$ 个基本事件．由概率定义得

$$P(A)=\frac{P_5\cdot A_6^5}{P_{10}}=\frac{5\times4\times3\times2\times1\times6\times5\times4\times3\times2}{10\times9\times8\times7\times6!}=\frac{1}{42}.$$

(2)“恰有 3 本数学书放在一起”有两种不同的情况．其一，3 本数学书放在一起，另两本不放在一起；其二，3 本数学书放一起，另两本也放在一起．对于第一种情况，可以分两步来实现．首先将 5 本非数学书任意摆放在书架上，共有 P_5 种不同放法．然后，从 5 本数学书中任意选出 3 本，共有 C_5^3 种选法．再把这 3 本数学书固定一种排列方式并将它们当做一本书和余下的 2 本数学书逐一放在相邻的两本非数学书之间和两端的六个位置中的任意三个位置上，共有 A_6^3 种不同放法．因为放一起的 3 本数学书有 P_3 种不同的排列方式，所以由乘法原理和加法原理知，3 本数学书放一起，而另两本不放一起的放法共有 $(P_5C_5^3A_6^3)\cdot P_3$ 种．

类似地，三本数学书放一起，另两本也放一起的放法共有 $(P_5C_5^3A_6^2)\cdot P_3P_2$ 种．故由加法原理知，恰有 3 本数学书放一起的所有不同放法共有 $(P_5C_5^3A_6^3)\cdot P_3+(P_5C_5^3A_6^2)\cdot P_3P_2$ 种．即事件 B 含有 $P_5C_5^3(A_6^3+A_6^2P_2)P_3$ 个基本事件．再由古典概率定义得