

高等医学院校规划教材

医用高等数学 学习指导

主编 周敏 梅挺 罗敏

高等教育出版社

高等医学院校规划教材

医用高等数学学习指导

Yiyong Gaodeng Shuxue Xuexi Zhidao

主 编 周 敏 梅 挺 罗 敏

副主编 王 霞 贾其锋 张 明 罗玉军 李敏军

编 者 康晓宇 李仕琼 曾爱国 王 勇 罗 兰

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与高等教育出版社出版的,梅挺、罗玉军、刘帮涛主编的《医用高等数学》配套的学习指导书。本书按教材章次对应编写,共7章:函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程、线性代数初步。每章由基本内容及要求、典型例题、练习及习题解答三部分组成。基本内容及要求部分简要地叙述了该章的基本内容,并有针对性地提出要求;典型例题部分,针对第一部分提出的基本要求补充了一些例题,并进行必要的分析;第三部分对《医用高等数学》教材的所有练习和习题做了详细的解答。

本书突出了教材内容的针对性和实用性,注重学生基本技能、创新能力和综合应用能力的培养,体现了高等医学院校大学数学基础教育的特点和要求。本书在选材和编排上着眼于基础训练的强化,突出解题的思路和方法指导,并对解题的步骤和思路进行适当的归纳,以提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书内容丰富,图文并茂,语言流畅,通俗易懂,可作为高等医学院校非数学类专业本科教材辅导书使用,也可作为高职高专院校的教材辅导书使用。

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学学习指导 / 周敏, 梅挺, 罗敏主编

—北京: 高等教育出版社, 2014. 9

ISBN 978 - 7 - 04 - 040974 - 1

I. ①医… II. ①周… ②梅… ③罗… III. ①医用数学—医学院校—教学参考资料 IV. ①R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 195147 号

策划编辑	李茜	责任编辑	李茜	特约编辑	王琪	封面设计	张志奇
版式设计	余杨	插图绘制	杜晓丹	责任校对	胡美萍	责任印制	毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400 - 810 - 0598
社址	北京市西城区德外大街 4 号	网址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landracom.com.cn
开本	787mm × 960mm 1/16		http://www.landracom.com.cn
印张	19.5	版次	2014 年 9 月第 1 版
字数	340 千字	印次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010 - 58581118	定价	28.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 40974-00

前 言

本书是根据高等医学院校对大学数学基础知识教育的具体要求,遵循“拓宽基础,强化能力,立足应用”与“必需,够用为度”原则组织编写的。本书语言精练、内容深入浅出、实例丰富,具有“系统、实用、通俗”的特点。

本书是与高等教育出版社出版的,梅挺、罗玉军、刘帮涛主编的《医用高等数学》配套的学习指导书。本书由长期在教学第一线从事大学数学教学工作的教师编写。他们结合多年的数学教学经验,源于数学教学特点和工作实际,在写作过程中,以初学者的身份和心理量身编写和安排了本书内容。

主要内容

本书按《医用高等数学》教材章次对应编写,共7章:函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、常微分方程、线性代数初步。每章由基本内容及要求、典型例题、练习及习题解答三部分组成。基本内容及要求部分简要地叙述了该章的基本内容,并有针对性地提出要求;典型例题部分,针对第一部分提出的基本要求补充了一些例题,并进行必要的分析;第三部分对《医用高等数学》教材的所有练习和习题做了详细的解答。

特点和目的

本书的主要特点是针对性强,主要解决学生在学习过程中遇到的实际困难。根据编者多年的教学实践经验,总结多数学生在学习大学数学过程中经常感到困惑和容易出错的环节,本书通过提出要求和增加典型例题的方式予以提示和强调。

编写本书的主要目的有两方面:一是方便教师授课,教材中的例题数量偏少,难度偏低,典型例题部分做了相应的补充,教师可以根据需要选取讲解;二是方便学生自学。目前很多学校的大学数学课程大都存在时间紧、任务重的情况,这样大学数学的教学将主要依靠学生的自学,本书是学生自学时必要且有益的参考书和指导书,它有助于学生更全面、深刻地理解大学数学的基本概念、基本理论和基本方法,也有助于他们掌握解题方法,提高解题能力。

适用对象

本书语言通俗易懂,内容丰富翔实,适合作为高等医学院校非数学类专业本科教材辅导书使用,同时也可作为高职高专院校的教材辅导书使用。

编写人员

本书由周敏、梅挺、罗敏担任主编,王霞、贾其锋、张明、罗玉军、李敏军担任副主编,由周敏、梅挺、罗敏、王霞、贾其锋、张明、罗玉军、李敏军、康晓宇、李仕琼、曾爱国、王勇、罗兰等编写。全书由周敏、梅挺负责统稿工作,由贾其锋、张明、王霞负责审校工作。

由于编者水平有限及时间仓促,书中错误和不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编者

2014年5月

目 录

第 1 章	函数与极限	1
1.1	基本内容及要求	1
1.1.1	基本内容	1
1.1.2	要求	1
1.2	典型例题	2
1.3	练习及习题解答	7
	练习 1-1	7
	练习 1-2	10
	练习 1-3	14
	习题一	16
第 2 章	导数与微分	26
2.1	基本内容及要求	26
2.1.1	基本内容	26
2.1.2	要求	26
2.2	典型例题	27
2.3	练习及习题解答	30
	练习 2-1	30
	练习 2-2	35
	练习 2-3	42
	练习 2-4	47
	练习 2-5	51
	习题二	61
第 3 章	不定积分	73
3.1	基本内容及要求	73
3.1.1	基本内容	73
3.1.2	要求	73
3.2	典型例题	74

3.3	练习及习题解答	78
	练习 3-1	78
	练习 3-2	81
	练习 3-3	93
	练习 3-4	100
	习题三	103
第 4 章	定积分及其应用	115
4.1	基本内容及要求	115
	4.1.1 基本内容	115
	4.1.2 要求	115
4.2	典型例题	116
4.3	练习及习题解答	119
	练习 4-1	119
	练习 4-2	123
	练习 4-3	126
	练习 4-4	136
	练习 4-5	140
	练习 4-6	146
	习题四	151
第 5 章	多元函数微积分	159
5.1	基本内容及要求	159
	5.1.1 基本内容	159
	5.1.2 要求	160
5.2	典型例题	160
5.3	练习及习题解答	166
	练习 5-1	166
	练习 5-2	167
	练习 5-3	171
	练习 5-4	177
	练习 5-5	182
	练习 5-6	185
	习题五	190
第 6 章	常微分方程	206
6.1	基本内容及要求	206

6.1.1	基本内容	206
6.1.2	要求	206
6.2	典型例题	207
6.3	练习及习题解答	212
	练习 6-1	212
	练习 6-2	213
	练习 6-3	219
	练习 6-4	222
	习题六	226
第 7 章	线性代数初步	239
7.1	基本内容及要求	239
	7.1.1 基本内容	239
	7.1.2 要求	239
7.2	典型例题	240
7.3	练习及习题解答	254
	练习 7-1	254
	练习 7-2	262
	练习 7-3	269
	练习 7-4	276
	习题七	283
	参考文献	300

函数与极限

1.1 基本内容及要求

1.1.1 基本内容

1. 函数:函数的概念、几种性质,基本初等函数及其性质,复合函数的概念、合成与分解,初等函数,分段函数.

2. 极限:函数极限的概念、性质、运算,两个重要极限公式,无穷小与无穷大.

3. 函数的连续性:函数连续的概念,间断点的概念和分类,闭区间上连续函数的性质及应用.

1.1.2 要求

1. 函数:理解函数的概念,熟悉六种基本初等函数的性质和图像,会求常见函数的定义域;掌握复合函数的概念、复合函数的分解与合成;熟悉初等函数和分段函数的概念.

2. 极限:理解函数极限的概念,熟悉极限的四则运算,掌握两个重要极限,

会熟练求常见函数的极限;理解无穷小、无穷大的概念.掌握无穷小的性质,能对无穷小进行比较.

3. 函数的连续性:熟悉函数连续和间断的概念,能对常见函数间断点进行确定和分类;能利用介值定理证明简单命题.

1.2 典型例题

例 1 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 试求:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

解: 由已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 即 $0 \leq x \leq 1$, 则有

(1) 对于 $f(x^2)$, 有 $0 \leq x^2 \leq 1$, 即 $-1 \leq x \leq 0$ 和 $0 \leq x \leq 1$, 因此 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1, 1]$;

(2) 对于 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$), 应有 $0 \leq x+a \leq 1$ 且 $0 \leq x-a \leq 1$, 即 $-a \leq x \leq 1-a$, 且 $a \leq x \leq 1+a$. 函数 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域应是上述两者的公共部分, 考虑下述三种情况:

① 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 函数定义域为空集;

② 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数定义域为一个点, 即 $x = \frac{1}{2}$;

③ 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, 函数的定义域为 $[a, 1-a]$.

例 2 已知

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$$

求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

分析: 这是两个分段函数的复合, 解题的关键是应抓住中间变量的值域. 为便于学习, 我们引进 u 表示中间变量.

解: 在求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 时, 先由

$$u = g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1 \end{cases}$$

求出 u 的取值范围:

在 $|x| = 1$, 当 $x = -1$ 时, 有 $u = g(-1) = 2 - (-1)^2 = 1$, 当 $x = 1$ 时, 有 $u =$

$$g(1) = 2 - 1^2 = 1.$$

当 $|x| < 1$ 时, $u = g(x) = 2 - x^2 > 1$.

当 $|x| > 1$ 时, $u = g(x) = 2 > 1$,

综上所述, 仅当 $|x| = 1$ 时, 有 $u = g(x) = 1$, 而当 $|x| \neq 1$ 时, 皆有 $u = g(x) > 1$.

$$\text{另一方面, } f(u) = \begin{cases} 1, & |u| \leq 1, \\ 0, & |u| > 1; \end{cases}$$

$$\text{于是有 } f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |x| = 1, \\ 0, & |x| \neq 1; \end{cases}$$

同样, 对于 $g[f(x)]$, 当 $|x| \leq 1$ 时, $u = f(x) = 1, g(1) = 2 - u^2|_{u=1} = 1$;

当 $|x| > 1$ 时, $u = f(x) = 0, g(0) = 2$,

$$\text{所以 } g[f(x)] = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$$

例 3 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (a > 0);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2 - x + 1} = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \left[\frac{x-a}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + 1 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \left[\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + 1 \right] = \frac{1}{\sqrt{2a}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad &\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(x+8)(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(2^2-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{1-x}+3} = -2.
 \end{aligned}$$

小结:在求多项式商的极限时(当 $x \rightarrow x_0$),若分子分母的极限都是零,则不能直接用极限运算法则,可先将分子分母因式分解,消去公因子后,再求极限.

当分子或分母含有根式,且极限都是0时,可根据情况对其有理化或分解,消去因子后,求极限.

例4 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x - 1} = l$,求 a, l .

解:当 $x \rightarrow 1$ 时,分母极限为0,而 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x - 1} = l$,因此,当 $x \rightarrow 1$ 时分子的极限应为0,即

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - ax^2 - x + 4) = 0,$$

即 $4 - a = 0$,得 $a = 4$.

将 $a = 4$ 代入原极限中,得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 3x - 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x - 4) = -6.$$

因此 $l = -6$.

于是得 $a = 4, l = -6$.

例5 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} - 4x + 2}{3x - 4x\sqrt{x} + 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}).$$

$$\text{解: (1) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} - 4x + 2}{3x - 4x\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x\sqrt{x}}}{\frac{3}{\sqrt{x}} - 4 + \frac{1}{x\sqrt{x}}} = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1. \end{aligned}$$

小结:当分子分母的极限都是 ∞ 时,可将分子分母同除以分子分母的最高次项,然后求极限.

特别地,可利用($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m < n, \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

的结果求极限.

例 6 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 - bx + 1}) = 2$, 求 a, b 的值.

解: 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 - bx + 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x - \sqrt{ax^2 - bx + 1})(5x + \sqrt{ax^2 - bx + 1})}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(25 - a)x^2 + bx - 1}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + 1}} = 2, \end{aligned}$$

所以上式成立只能 $25 - a = 0$, 即 $a = 25$.

将 $a = 25$ 代入原极限中, 得

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{25x^2 - bx + 1}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx - 1}{5x + \sqrt{25x^2 - bx + 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b - \frac{1}{x}}{5 + \sqrt{25 - \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{b}{10} = 2,
 \end{aligned}$$

即 $b = 20$.

故 $a = 25, b = 20$.

例7 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

解: (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+1}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)^{2(x+2)-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+2} \right)^{(x+2)} \right]^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x+2} \right)^3} \\
 &= e^2 \cdot 1 = e^2.
 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}} \right]^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x}} \right]^{-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - \sin^2 x)^{\frac{-1}{\sin^2 x}}} \\
 &= \frac{1}{e}.
 \end{aligned}$$

例8 研究 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & |x| > 1, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1 \end{cases}$ 的连续性.

解: 将 $f(x)$ 改写为

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < -1, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$$

在 $(-\infty, -1)$ 内, $f(x) = 1-x$ 为初等函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 内连续, 在 $(-1, 1)$ 内, $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ 为初等函数, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续; 在 $(1, +\infty)$ 内, $f(x) = x-1$, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内连续; 下面讨论 $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 两点处的连续性.

在点 $x=1$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0,$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = f(1)$, 故 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

在点 $x=-1$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-x) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{\pi x}{2} = 0,$$

由于 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, 故 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处不连续.

综上所述, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, +\infty)$ 上连续.

1.3 练习及习题解答



练习 1-1

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right);$$

解: 要使原函数有意义, 则只需

$$2-x^2 > 0, \quad \left| \frac{1}{2}x-1 \right| \leq 1$$

即可,即

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \quad 0 \leq x \leq 4,$$

所以原函数的定义域为 $[0, \sqrt{2})$.

$$(2) y = \frac{x}{\sin x};$$

解: 要使原函数有意义, 则只需

$$\sin x \neq 0$$

即可, 即

$$x \neq k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

所以原函数的定义域为 $(k\pi, (k+1)\pi) (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$.

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - 4};$$

解: 要使原函数有意义, 则只需

$$x \neq 0, \quad x^2 - 4 \geq 0$$

即可, 即

$$x \leq -2 \quad \text{或} \quad x \geq 2,$$

所以原函数的定义域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

$$(4) y = \frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}.$$

解: 要使原函数有意义, 则只需

$$\ln(2+x) \geq 0 \quad \text{且} \quad x(x-4) \neq 0$$

即可, 即

$$x \geq -1 \quad \text{且} \quad x \neq 0, x \neq 4,$$

所以原函数的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

$$(1) f(\sin x);$$

解: 要使 $f(\sin x)$ 有意义, 则必须满足下列条件:

$$0 \leq \sin x \leq 1,$$

即

$$2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

所以函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi, 2k\pi + \pi] (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$.

$$(2) f(\ln x + 1);$$

解: 要使 $f(\ln x + 1)$ 有意义, 则必须满足下列条件:

$$0 \leq \ln x + 1 \leq 1,$$

即

$$e^{-1} \leq x \leq 1,$$

所以函数 $f(\ln x + 1)$ 的定义域为 $[e^{-1}, 1]$.

$$(3) f(x^2);$$

解: 要使 $f(x^2)$ 有意义, 则必须满足下列条件:

$$0 \leq x^2 \leq 1,$$

即

$$-1 \leq x \leq 1,$$

所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

$$(4) f\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

解: 要使 $f\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(x - \frac{1}{3}\right)$ 有意义, 则必须满足下列条件:

$$\begin{cases} 0 \leq x + \frac{1}{3} \leq 1, \\ 0 \leq x - \frac{1}{3} \leq 1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}, \end{cases}$$

所以函数 $f\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(x - \frac{1}{3}\right)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

3. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的:

$$(1) y = \sin 2x;$$

解: $y = \sin 2x$ 由 $y = \sin u, u = 2x$ 复合而成.

$$(2) y = \sin^3 \frac{x}{2};$$

解: $y = \sin^3 \frac{x}{2}$ 由 $y = u^3, u = \sin v, v = \frac{x}{2}$ 复合而成.

$$(3) y = \tan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

解: $y = \tan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 由 $y = \tan u, u = \sqrt{v}, v = \frac{1+x}{1-x}$ 复合而成.

$$(4) y = e^{\arctan(2x+1)};$$