SHUXUE FENXI JIANMING JIAOCHENG

数学分析简明教程

（下册）

主　编　汪义瑞　石卫国
副主编　邵春芳　王秋芬

西南交通大学出版社

安康学院教材建设基金资助

数学分析简明教程

（下册）

主　编　汪义瑞　石卫国
副主编　邵春芳　王秋芬

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（C I P）数据

数学分析简明教程：全 2 册 / 汪义瑞，石卫国主编.
—成都：西南交通大学出版社，2014.10
ISBN 978-7-5643-3303-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①汪… ②石… Ⅲ. ①数学分析－教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 192013 号

数学分析简明教程
（上、下册）
主编 汪义瑞 石卫国

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网 址	http: //www.xnjdcbs.com
印 刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	210 mm × 285 mm
总 印 张	22.75
总 字 数	687 千字
版 次	2014 年 10 月第 1 版
印 次	2014 年 10 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-3303-4
套 价	48.00 元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题 本社负责退换

目 录

第十章　数项级数

十章至十二章我们将研究级数理论，本章先讨论数项级数，因为它是级数理论的基础.

第一节　级数的敛散性

一、数项级数的概念

在实际中，我们常常会遇到无限多个实数相加的情形，例如，在第二章提到《庄子·天下篇》“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的例子中，我们将每天截下的那部分“加”起来：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

这就是“无限个数”相加的一个例子. 问题在于这种所谓“和式”有无限多个加数，它在什么情形下才有“和”？如果“和”存在，该怎么求“和”？因而有必要建立一套“无限多个加数相加”的理论.

定义 1.1　给定一个数列 $\{u_n\}$，对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称为**数项级数**或**无穷级数**（也简称级数），其中 u_n 称为数项级数（1）的通项.

数项级数（1）也常写作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 或简单写作 $\sum u_n$.

上述级数（1）的定义只是一个形式上的定义，为了建立无穷级数中无穷多个数相加的概念，我们从有限项的和出发，观察它们的变化趋势，并以极限为工具来定义无穷多个数的和.

数项级数（1）的前 n 项和记为

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n, \tag{2}$$

称它为数项级数（1）的第 n 个部分和，也简称部分和.

定义 1.2　若数项级数（1）的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛于 s，即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

则称数项级数（1）收敛，称 s 为数项级数（1）的和，记作

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \text{ 或 } s=\sum u_n .$$

若 $\{s_n\}$ 是发散数列，则称数项级数（1）发散.

例如，本节开头所给出的级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 的部分和数列为 $\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1,$$

故数项级数 $\sum\frac{1}{2^n}$ 收敛，且其和为 1（庄子的认识是有局限性的）.

例 1 讨论数项级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

的敛散性.

解 我们来求第 n 个部分和

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right) \end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$，故级数收敛，且其和为 $\frac{1}{5}$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+4)}=\frac{1}{5}$.

例 2 讨论级数

$$1-1+1-\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$$

的敛散性.

解 该级数的第 n 个部分和为

$$s_n=\begin{cases}1, & n=2k+1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots.$$

显然，数列 $\{s_n\}$ 是发散的，因此数项级数 $\sum(-1)^{n+1}$ 是发散的.

二、柯西收敛准则

由于级数（1）的收敛或发散（简称敛散性）由它的部分和数列 $\{s_n\}$ 来确定，从而也可把级数（1）作为数列 $\{s_n\}$ 的另一种表现形式. 反之，任给一个数列 $\{a_n\}$，如果把它看作某一数项级数的部分和数列，则这个数项级数就是

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+\cdots. \tag{3}$$

这时数列 $\{a_n\}$ 与级数（3）具有相同的敛散性，当 $\{a_n\}$ 收敛时，其极限值就是级数（3）的和.

基于级数与数列的这种关系，根据数列极限的性质可推出下面的关于级数的一些定理.

定理 1.1（柯西收敛准则） 级数（1）收敛的充要条件是：任给正数 ε，总存在自然数 N，使得当 $m>N$ 和任意的自然数 p，都有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|<\varepsilon. \tag{4}$$

根据定理 1.1 的必要性，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则任意取 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，对任意 $n>N$，取 $p=1$，有 $|u_{n+1}|<\varepsilon$，立即可得：

推论 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

推论 1 的等价命题是，若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例如，级数

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots+\frac{n}{100n+1}+\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1}=\frac{1}{100}\neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}$ 发散.

例 3 讨论调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

的敛散性.

解 在这里虽有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

但是，若取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，无论自然数 N 怎么大，当 $m>N$，$p=m$ 时，有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+m}|=\left|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|\geqslant\left|\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|=\frac{1}{2}.$$

这与柯西准则的条件相抵触，故此，调和级数是发散的.

本例提醒我们，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件，并非充分条件.

例 4 应用级数收敛的柯西准则证明 $\sum\frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

证明 由于

$$\begin{aligned}|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|&=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}\\&<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}\\&=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+p-1}-\frac{1}{m+p}\right)\\&=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m},\end{aligned}$$

因此，任取 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，使得当 $m>N$ 时，对任意 $p\in\mathbf{N}$，总有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

依据定理 1.1，级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛.

推论 2 若去掉、增加或改变级数的有限项，级数的敛散性不变.

例如，去掉 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的前面 100 项，所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100+n}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+n}+\cdots$$

仍是发散的.

三、收敛级数的基本性质

根据数列极限运算定理可得级数运算定理.

定理 1.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和是 s，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛，其和是 cs. 其中 c 为常数（$c \neq 0$）.

定理 1.3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和是 s，则不改变级数中各项的位置，照原顺序将某些项结合在一起，构成的新级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}}) + \cdots \tag{5}$$

也收敛，且其和为 s.

简单来说，定理 1.3 告诉我们，收敛级数可任意添括号. 请注意：若级数在添括号后收敛，原级数不一定收敛. 例如，例 2 所给的级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots,$$

若照下述方法添括号

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots,$$

显然，新级数收敛于 0，而原级数却是发散的.

和定理 1.3 等价的命题是，一级数添括号后发散，则原级数发散.

定理 1.4 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，其和分别是 A 与 B，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也收敛，其和为 $A \pm B$.

定理 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 均可利用级数收敛及其和的定义，联系极限相应的性质证出，有兴趣的读者可自行给出证明过程.

习题一

1. 讨论几何级数（也称等比级数）

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

2. 求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；（5）$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$；（6）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

3. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geqslant 0)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. 反之不然.

4. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$c \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也发散.

5. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

6. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 中，$\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$，则

（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

（2）当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

7. 应用第 5、6 题结果求下列级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

8. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n}{2^n}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$；　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

第二节　正项级数

一、正项级数收敛的一般判别原则

在级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

中，若 $u_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**正项级数**；若 $u_n\leqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**负项级数**. 正项级数、负项级数统称为**同号级数**.

将负项级数各项乘以 -1，负项级数就变为正项级数，且依定理 1.2，所得正项级数与原负项级数同敛散. 因而我们只讨论正项级数.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，则此级数部分和数列 $\{s_n\}$ 是单调增加数列，即

$$s_1\leqslant s_2\leqslant s_3\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant\cdots.$$

如果数列 $\{s_n\}$ 有界，根据数列极限的单调有界定理，数列 $\{s_n\}$ 必收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 于是，有

定理 2.1　正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收敛的充要条件是：部分和数列 $\{s_n\}$ 有上界，即存在 $M>0$，任取 $n\in\mathbf{N}$ 有 $s_n\leqslant M$.

例 1　证明：正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

是收敛的.

证明　已知

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}\leqslant\frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot\cdots\cdot 2}_{n-1个}}=\frac{1}{2^{n-1}},\ n=1,2,\cdots,$$

从而, 对任意的自然数 n, 有

$$s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即部分和数列 $\{s_n\}$ 有上界, 则正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

上例中, 对 s_n 放大时, 其实就是将 u_n 与级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的通项作比较, 受此启示, 我们有下面的正项级数判别法.

定理 2.2 (比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为两个正项级数, 若存在 $N\in\mathbf{N}$, 对任意 $n>N$ 都有

$$u_n\leqslant v_n,$$

那么, (i) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(ii) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

证明 (i) 依定理 1.1 的推论 2, 改变级数前面有限多项并不改变级数的敛散性. 因此, 不妨设对任意 $n\in\mathbf{N}$, 有

$$A_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=B_n.$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 依定理 2.1, $\{B_n\}$有上界, 从而数列$\{A_n\}$有上界. 再依定理 2.1, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(ii) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 依定理 2.1, 数列$\{A_n\}$无上界, 从而数列$\{B_n\}$无上界. 再依定理 2.1, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

例 2 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性, 其中 p 是任意实数. 此级数称为**广义调和级数**, 或称 **p–级数**.

解 p-级数的敛散性与数 p 有关, 分情况讨论如下:

(1) 当 $p=1$ 时, p-级数即为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 即 p-级数发散.

(2) 当 $p<1$ 时, 任取 $n\in\mathbf{N}$, 有

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}.$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 依定理 2.2, p-级数发散.

(3) 当 $p>1$, 即 $p-1>0$ 时, 对任意大于 1 的自然数 n, 总存在 $m\in\mathbf{N}$, 使 $n<2^{m+1}-1=:k$. 于是有

$$s_n<s_k=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2^m)^p}+\frac{1}{(2^m+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^p}\right]$$

$$<1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\cdots+\frac{2^m}{(2^m)^p}=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\cdots+\frac{1}{(2^{p-1})^m}=\frac{1-\frac{1}{(2^{p-1})^{m+1}}}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}.$$

这就是说，$\{s_n\}$有上界，此时 p-级数收敛.

综上所述，p-级数，当 $p\leqslant 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

例 3　判别下列级数的敛散性：（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$；（2）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$.

解　（1）$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，而 $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，依定理 2.2，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收敛.

（2）$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$，已知 p-级数 $\left(p=\frac{2}{3}<1\right)$ 发散，依定理 2.2，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ 发散.

推论　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是两个正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,$$

则（i）$0<l<+\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散；

（ii）$l=0$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

（iii）$l=+\infty$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

证明　因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则任取 $\varepsilon>0$，总存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon\quad\text{或}\quad(l-\varepsilon)v_n<u_n<(l+\varepsilon)v_n.\tag{1}$$

当 $0<l<+\infty$ 时，让 $\varepsilon<l$：考虑（1）式右半部分，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，依定理 2.2，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；考虑（1）式左半部分，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，便证得（i）.

当 $l=0$ 时，考虑（1）式右半部分，依定理 2.2，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，便证得（ii）.

若 $l=\infty$，即任取 $M>0$，存在相应的 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\frac{u_n}{v_n}>M\quad\text{或}\quad u_n>Mv_n\tag{2}$$

由（2）式，依定理 2.2，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，便证得（iii）.

例 4　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ 的敛散性.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{2^n}}=1,$$

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，依定理 2.2 推论，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ 收敛.

例 5 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}=\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}+\cdots$$

的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 依定理 2.2 推论, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

二、比式判别法与根式判别法

应用正项级数的比较判别法不仅能直接判别某些正项级数的敛散性, 还可以利用几何级数作为参照进行比较, 从而导出正项级数的比式判别法, 也称达朗贝尔判别法.

定理 2.3 (比式判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, 且存在 $N_0\in\mathbf{N}$ 及常数 $q(0<q<1)$.

(i) 若对一切 $n>N_0$, 总有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(ii) 若任取 $n>N_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 (i) 不妨设任意 $n\in\mathbf{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}<q$ 成立, 则

$$\frac{u_2}{u_1}\leqslant q,\ \frac{u_3}{u_2}\leqslant q,\ \cdots,\ \frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q,\ \cdots.$$

前 $n-1$ 个不等式的两端相乘, 得

$$\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\cdots\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqslant q^{n-1}\quad 或\quad u_n\leqslant u_1q^{n-1}.$$

而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_1q^{n-1}$ 收敛, 依定理 2.2 可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(ii) 任意 $n>N_0$, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$, 即

$$u_{n+1}\geqslant u_n\geqslant u_{N_0}.$$

从而正项数列 $\{u_n\}$ 从 N_0 项后单调递增, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 依定理 1.1 的推论 1 可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

推论（比式判别法的极限形式） 若 u_n 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q,$$

则（i）当 $q<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（ii）当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

提示 利用 $q-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<q+\varepsilon$，依据定理 2.3 的（i）、（ii），相应地推出推论（i）、（ii）. 有兴趣的读者可根据提示补出推论的证明过程.

注意 使用该推论判定级数的敛散性时，若 $q=1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性不能确定.

例 6 判别下列正项级数的敛散性：（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$.

解 （1）$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{n}{2^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ 收敛.

（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛.

（3）$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}}{\frac{5^n}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}5\left(\frac{n}{n+1}\right)^5=5>1$，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ 发散.

定理 2.4（柯西判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且存在 $N_0\in\mathbf{N}$ 及正常数 q.

（i）若任取 $n>N_0$，总有

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（ii）若任取 $n>N_0$，总有

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 （i）由于 $n>N_0$ 时，$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1$，即存在 N_0，当 $n>N_0$ 时，$u_n\leqslant q^n$；又 $0\leqslant q<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（ii）由 $n>N_0$ 时 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$ 知，$u_n\geqslant 1$. 故 $n\to\infty$ 时数列 $\{u_n\}$ 不以 0 为极限，由定理 1.1 的推论 1 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

推论 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

则（i）当$0\leqslant l<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（ii）当$l>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

证明 （i）因$0\leqslant l<1$，故存在实数$q(l<q<1)$，依数列极限定义，取$\varepsilon_0=q-l>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有

$$\left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<\varepsilon_0 \quad 或 \quad \left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<q-l,$$

则

$$\sqrt[n]{u_n}<q<1.$$

依定理 2.4, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（ii）因$l>1$，依数列极限保号性，存在$N\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有

$$\sqrt[n]{u_n}>1.$$

依定理 2.4, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

例 7 判别下列正项级数的敛散性：（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(\ln n)^n}$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^{\ln n}}$.

解 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$收敛；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{(\ln n)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}=0<1$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(\ln n)^n}$收敛；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{3^{\ln n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3^{\frac{\ln n}{n}}}=2>1$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^{\ln n}}$发散.

三、积分判别法

无穷积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$与广义调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$有着一定的联系，这里将其敛散性比较如下：

表 10.1

	$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$
$p>1$	收敛	收敛
$p\leqslant 1$	发散	发散

这种联系是内在的，绝非巧合.

定理 2.5 无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是：对任意数列$\{A_n\}$，当任意的自然数$n$，有$A_n\in[a,+\infty)$，而$A_1=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛于同一数，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x .$$

证明　必要性. 已知无穷积分收敛，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x.$$

充分性. 已知对任意数列 $\{A_n\}$，其中 $A_1 = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于同一数，即其部分和数列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\right\} \text{ 或 } \left\{\int_a^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x\right\}$$

收敛于同一个数. 由函数极限的归结原则，无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x .$$

定理 2.5 告诉我们，无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 相当于级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$，定积分 $\int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x$ 就相当于此级数的部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$，因此 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

注　一般情况我们令 $A_n = n$.

例 8　讨论下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$；　　（2）$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$.

解　（1）研究无穷积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$. 由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} = \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^p},$$

且当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散. 根据定理 2.5，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，$p\leqslant 1$ 时发散.

对于（2），考察无穷积分 $\int_3^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$，同样可推得级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leqslant 1$ 时发散.

习题二

1. 判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n-6}}$；　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}$；　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$；　（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$；　（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$；　（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}\right)$；

（9）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n n!}{n^n}\right)$；（10）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$；（11）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$；

（12）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n \to a\,(n\to\infty),\ a,b>0,\ a\neq b$；

（13）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$；（14）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$；（15）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

2. 设 $a_n \geqslant 0$，若数列 $\{na_n\}$ 有界，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n u_{n+1}}$ 也收敛.

4. 证明下列极限：（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=0$；（2）$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$.

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}(a_n>0)$ 收敛.

6. 证明级数 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$ 收敛.

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda<1$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\lambda^2<1$，因此，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 这个推理成立吗？为什么？

第三节　一般项级数

本节讨论几种通项特殊的级数. 另外，还要引入绝对收敛概念，以将某些变号级数的收敛问题转化为正项级数的收敛问题来讨论.

一、交错级数

定义 3.1　设 $u_n>0\,(u=1,2,\cdots)$，我们称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots$$

为**交错级数**. 即各项符号正负相间的级数为交错级数.

定理 3.1（莱布尼兹判别法）　若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(u_n>0,n=1,2,\cdots)$ 满足：

（i）数列 $\{u_n\}$ 单调递减，即 $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$；

（ii）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛.

证明　首先讨论交错级数的部分和数列 $\{s_n\}$. 为此，考察 $\{s_n\}$ 的奇子列 $\{s_{2k-1}\}$ 与偶子列 $\{s_{2k}\}$. 对任意 $k\in\mathbf{N}$，有

$$s_{2(k+1)}=u_1-u_2+\cdots+u_{2k-1}-u_{2k}+u_{2k+1}-u_{2k+2},\quad s_{2k}=u_1-u_2+\cdots+u_{2k-1}-u_{2k},$$

则

$$s_{2(k+1)}-s_{2k}=u_{2k+1}-u_{2k+2}.$$