ADVANCED MATHEMATICS

王德华　主编
王金平　副主编

国家示范性高职高专教改系列特色教材

# 高等数学

## 土建类

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

Civil Construction

模块结构配合教学计划

背景案例面向职业应用

知识选点服务专业发展

国家示范性高职高专教改系列特色教材

# 高等数学

## 土建类

王德华　主编　王金平　副主编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学：土建类／王德华主编．—镇江：江苏大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-81130-243-1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①王… Ⅲ．①高等数学－高等职业教育－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 168660 号

**高等数学：土建类**

主　　编／王德华
副 主 编／王金平
责任编辑／宋晓平　段学庆
出版发行／江苏大学出版社
地　　址／江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话／0511-84443089
传　　真／0511-84446464
排　　版／镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷／丹阳市教育印刷厂
经　　销／江苏省新华书店
开　　本／787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张／15.5
字　　数／377 千字
版　　次／2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
书　　号／ISBN 978-7-81130-243-1
定　　价／35.00 元

如有印装质量问题请与本社发行部联系(电话:0511-84440882)

# 前　　言

高等数学是高职高专的重要基础课，也是职业教育体系中服务于专业教育的必修课。编者基于国家级示范性高职院校的教学经验和教改成果，针对高职高专教学的基础性与应用性特点，组织编写了面向应用型高职高专院校的《高等数学》。

本书为其中的土建类分册，包括函数的极限与连续，一元函数微分学，不定积分，定积分及其应用，线性代数，统计技术共六个基本知识模块。它以讲解应用数学在土建类专业课中的应用案例为切入点，本着够用为度、注重实效的原则，采用目标驱动的方式、模块化的知识结构和独特的编排体例，使学生通过学习可以具备与专业技能需求相适应的数学知识、与职业要求相适应的数学能力以及可持续发展的潜力，体现了编者不同于传统的数学教育思想。

目前，高职院校的学生学业水平参差不齐，教学课时及内容受到一定限制，这使高职院校的教学面临一定的困难。根据高职高专基础课程以应用为目的，以必需、够用为度的教学原则，我们在制订教学计划时，充分考虑高职高专学生的认知规律，根据不同层次、不同专业学生对数学知识的不同需求，循序渐进、由浅入深，适当增加学时，强化基础，解决知识衔接问题，提高学生概括问题能力、逻辑推理能力、自学能力、运算能力及综合运用能力。

本书内容体现了全新的“三书”教材模式，即：

(1) 课前指导书。明确每节课的学习内容、目的要求、重点难点，设置与课堂内容密切相关的课前问题，要求学生通过各种途径主动查阅资料，参与小组讨论，完成课前指导书的任务并进行评价，以达到课前预习的目的。

(2) 课堂任务书。合理组织每次课的教学内容，结合专业和实际生活相关问题进行案例设置，提高学生学习数学的兴趣和观察生活的能力；在例题后又设置相应的练习题，要求学生在教师的引导下当堂完成并进行评价，以达到课堂学习的目标。

(3) 课后作业书。根据学习内容选取难度适当、题量适宜、具有一定思考性的习题，要求学生独立完成并进行评价，以达到课后复习的要求。

“三书”创新模式突破了“一生、一师、一教材”的传统模式，也是编者建设精品课程教材的积极尝试。

本教材在编写过程中得到了山东科技职业学院领导的关心、支持，在此深表谢意。

由于编者自身的水平有限，书中难免存在一些不足和缺点，诚恳期望广大读者提出宝贵的意见和建议，对此表示衷心的感谢！

编　者

2011 年 8 月

# 目录

## 第 1 模块 函数的极限与连续



## 第 2 模块 一元函数微分学



## 第 3 模块 不定积分

## 第 4 模块 定积分及其应用



## 第 5 模块 线性代数



## 第 6 模块 统计技术

# 第1模块

# 函数的极限与连续

**【学习目标】**

理解函数的概念、特性，掌握基本初等函数的图像性质；理解分段函数、反函数、复合函数等概念；了解生活中的常见函数；理解无穷小和无穷大的概念；掌握极限思想、极限概念、极限法则和求极限方法；理解函数连续性的概念、性质.

微积分学的研究对象是函数.函数是数学中的一个基本且重要的概念.直到公元1837年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859)才提出现今通用的函数定义，使函数关系更加明确，从而推动了数学的发展和应用.在高等数学中，极限是深入研究函数和解决各种问题的基本思想方法.函数连续性与函数极限密切相关，连续函数是高等数学中着重研究的一类函数.

本模块将首先从函数概念入手，在分别研究数列的极限与函数的极限的基础上，讨论极限的一些重要性质及其运算法则，函数的连续性，闭区间上连续函数的性质等.

日期：______________________ 教师：______________________

# 1.1 初等函数

**学习内容**：函数的定义与性质.

**目的要求**：熟练掌握函数的定义、定义域、对应法则，了解分段函数、显函数、隐函数、反函数、复合函数的概念，熟练掌握函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性及 5 种基本初等函数的图像性质.

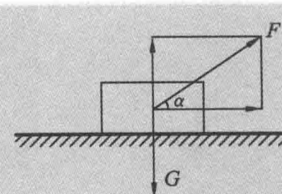
**重点难点**：判断函数的四大特性，初等函数性质的应用.

## 课前探讨

1. 现实生活中的函数举例(至少 3 个).
2. 阐述函数的定义.
3. 阐述定义域、值域、对应法则.
4. 阐述邻域、半径、去心邻域概念.
5. 阐述分段函数定义，分段函数应用.
6. 阐述显函数、隐函数定义.
7. 阐述反函数、复合函数的概念.
8. 阐述函数的四大特性(单调性、有界性、奇偶性、周期性).
9. 阐述 5 种基本初等函数的图像性质.

## 课堂讲习

**案例 1** 如右图所示，重力为 $G$ 的物体置于地平面上，设有与水平方向成 $\alpha$ 角的拉力 $F$，使物体由静止开始移动，求物体开始移动时拉力 $F$ 与角 $\alpha$ 之间的函数模型.




**解** 由物理知识可知，当水平拉力与摩擦力平衡时，物体开始移动，而摩擦力与正压力成正比. 设摩擦系数为 $\mu$，故有

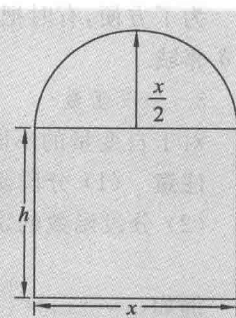
$$F\cos\alpha=\mu(G-F\sin\alpha),$$

即

$$F=\frac{\mu G}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}(0^\circ<\alpha<90^\circ).$$

**案例 2** 某下水道的截面是矩形加半圆形(如下图所示)，截面积为 $A$，$A$ 是一个常量，$A$ 的大小

取决于预定的排水量. 设截面的周长为 $s$，底宽为 $x$，试建立 $s$ 与 $x$ 的函数模型.




**解** 设矩形高为 $h$，根据等量关系有关系式

$$s=x+2h+\frac{1}{2}\pi x. \tag{1}$$

显然，在(1)式中有两个变量 $x$ 及 $h$，此外我们应把 $s$ 表示成 $x$ 的一元函数. 为此，需把变量 $h$ 也表示成与 $x$ 有关的量.

根据题中所给限制条件——截面积为 $A$，建立 $x$ 与 $h$ 的关系：

$$A=xh+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

即

$$h=\frac{A}{x}-\frac{1}{8}\pi x. \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式得

$$s=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{2A}{x}\quad (x>0). \tag{3}$$

(3)式即为我们所要找的周长与底宽 $x$ 的函数模型.

## 1.1.1 函数概念

1. 函数的定义

设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的非空数集. 若对于每一个数 $x\in D$，按照某一确定的对应法则 $f$，总有唯一确定的数值 $y$ 与之对应，则称 **$y$ 是 $x$ 的函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中，$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量；数集 $D$ 称为该函数的定义域，是 $x$ 的取值范围.

自变量取定义域内某一值时，因变量的对应值叫做函数值. 对于给定的函数 $y=f(x)$，当函数的定义域 $D$ 确定后，按照对应法则 $f$，因变量的变化范围也随之确定. 函数值的集合叫做函数的**值域**. 所以**定义域和对应法则就是确定一个函数的两个要素**. 两个函数只有在它们的定义域和对应法则都相同时，才是相同的.

函数的三种表示方法：解析式、列表法、图像法.

运用数学工具解决实际问题时，通常要先找出变量间的函数关系，再用数学式进行表示，最后进行分析和计算.

建立函数模型的具体步骤为：

(1) 分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示.

(2) 根据所给条件，运用数学、物理、经济及其他知识确定等量关系.

(3) 具体写出解析式 $y=f(x)$，并指明其定义域.

2. 邻域的概念

**邻域**也是一个重要概念，在以后的学习中会经常遇到. 所谓**点 $a$ 的 $\delta$ 邻域**，是指以 $a$ 为中心的开区间$(a-\delta,a+\delta)$. 也就是说，设 $a,\delta(\delta>0)$为两个实数，则称满足不等式$|x-a|<\delta$ 的实数全体为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域. 点 $a$ 为该邻域的**中心**，$\delta$ 为该邻域的**半径**. 若把邻域$(a-\delta,a+\delta)$的中心点 $a$ 去掉，称为点 **$a$ 的去心 $\delta$ 邻域**，表示为$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$或 $0<|x-a|<\delta$.

为了方便，有时把开区间$(a-\delta,a)$称为点 $a$ 的左 $\delta$ 邻域，把开区间$(a,a+\delta)$称为点 $a$ 的右 $\delta$ 邻域.

3. 分段函数

对于自变量的不同取值范围，对应法则不相同的函数，称为分段函数.

**注意** (1) 分段函数是一个函数，而不是几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例如，$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 5,\\ 0, & x=5,\\ -1, & -5<x<0\end{cases}$ 都是分段函数.

4. 显函数和隐函数

若函数中的因变量 $y$ 用自变量 $x$ 的表达式直接表示出来，这样的函数称为**显函数**.

有些函数的表达方式却不是这样. 例如方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$y$ 都有唯一确定的值与之对应.

一般地，若两个变量 $x,y$ 的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 的形式来表示，即 $x,y$ 的函数关系隐藏在方程里，这样的函数叫做**隐函数**.

有的隐函数，可以从方程 $F(x,y)=0$ 中解出 $y$，并化为显函数，但有的隐函数化为显函数比较困难，甚至是不可能的. 例如由方程 $xy-e^{x+y}=0$ 确定的隐函数就不能化为显函数.

5. 反函数

设函数 $y=f(x),x\in D,y\in E$. 若对于任意一个 $y\in E$，$D$ 中都有唯一的一个 $x$，使得 $f(x)=y$ 成立，这时 $x$ 是以 $E$ 为定义域的 $y$ 的函数，称它为 $y=f(x)$的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y),y\in E$.

在函数 $x=f^{-1}(y)$中，$y$ 是自变量，$x$ 是因变量. 但按照习惯，我们需对调函数 $x=f^{-1}(y)$中的字母 $x,y$，把它改写成 $y=f^{-1}(x),x\in E$. 今后凡不特别说明，函数 $y=f(x)$的反函数都是这种改写过的 $y=f^{-1}(x),x\in E$ 形式.

函数 $y=f(x),x\in D$ 与 $y=f^{-1}(x),x\in E$ 互为反函数，它们的定义域与值域互换.

在同一直角坐标系下，$y=f(x),x\in D$ 与 $y=f^{-1}(x),x\in E$ 互为反函数，且他们的图形关于直 $y=x$ 对称.

**例题 1** 函数 $y=3x-2$ 与函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 互为反函数，如图 1-1 所示；函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，如图 1-2 所示. 它们的图形都是关于直线 $y=x$ 对称的.

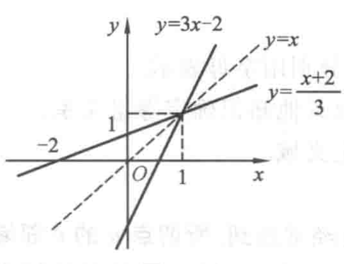



图 1-1

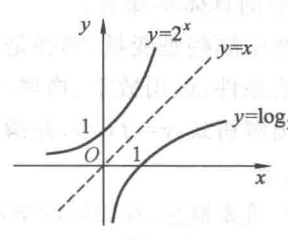



图 1-2

**定理(反函数存在定理)** 单调函数必有反函数，且单调增加(减少)函数的反函数也是单调增加(减少)函数.

求函数 $y=f(x)$ 的反函数可以按以下步骤进行：

(1) 从方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 $x$，并写成 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 将 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 $x,y$ 对调，得到函数 $y=f^{-1}(x)$，这就是所求的函数的反函数.

6. 复合函数

假设有两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，与 $x$ 对应的 $u$ 值能使 $y=f(u)$ 有定义，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，得到函数 $y=f[\varphi(x)]$. 这个新函数 $y=f[\varphi(x)]$ 就是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 经过复合而成的复合函数，$u$ 称为中间变量.

例如，由 $y=f(u)=\sin u$，$u=\varphi(x)=x^2$ 可以复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]=\sin x^2$.

复合函数不仅可用两个函数复合而成，也可以由多个函数相继复合而成. 如由 $y=u^3$，$u=\ln v$，$v=\sin x$ 可以复合成复合函数 $y=[\ln(\sin x)]^3$.

**例题 2** 试求下列函数由简单函数的复合过程.

(1) $y=\ln\cos x$；(2) $y=\sin\sqrt{x+1}$；(3) $y=\mathrm{e}^{\cos 2x}$.

**解** (1) 令 $u=\cos x$，则 $y=\ln u$. 于是 $y=\ln\cos x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\cos x$ 复合而成的.

(2) 令 $v=x+1$，$u=\sqrt{v}$，则 $y=\sin u$. 所以 $y=\sin\sqrt{x+1}$ 是由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$ 复合而成的.

(3) 令 $v=2x$，$u=\cos v$，则 $y=\mathrm{e}^u$. 所以 $y=\mathrm{e}^{\cos 2x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\cos v$，$v=2x$ 复合而成的.

**注意** 不是任何两个函数都能复合成复合函数. 由定义易知，只有当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空时，这两个函数才能复合成复合函数. 例如函数 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=-x^2$ 的值域为 $(-\infty,0]$，而 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，显然 $(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\varnothing$，$y=\ln(-x^2)$ 无意义.

### 1.1.2 函数性质

1. 单调性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，若对任意两点 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上是**单调增加**的，区间 $(a,b)$ 称为**单调增加区间**；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上是**单调减少**的，区间 $(a,b)$ 称为**单调减少区间.**

单调增函数和单调减函数统称为**单调函数**，单调增加区间和单调减少区间统称为**单调区间.**

2. 有界性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，均有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 内是有界的；如果这样的 $M$ 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 内是无界的.

例如 $y=\sin x$ 是有界函数，其中对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$；而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数，因为 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上仅有下界.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域内任意的 $x$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；如果对于定义域内的 $x$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数. 奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 $y$ 轴对称. 如果函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

例如，$y=\sin x$ 与 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$是奇函数；$y=\cos x$ 与 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$是偶函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，$f(x+T)=f(x)$恒成立，则称函数 $y=f(x)$为周期函数；使上式成立的最小正数 $T$，称为函数 $y=f(x)$的最小正周期，简称周期.

例如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的周期 $T=2\pi$，$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 的周期 $T=\pi$，正弦型曲线函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

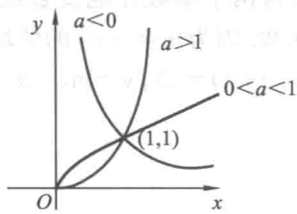
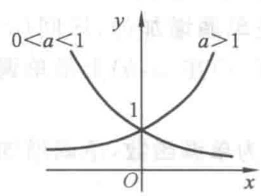
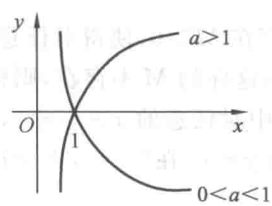
狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 是周期函数，但它没有最小正周期.

### 1.1.3 基本初等函数

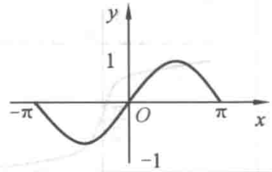
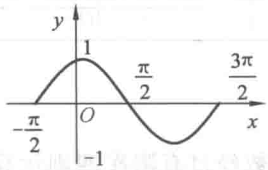
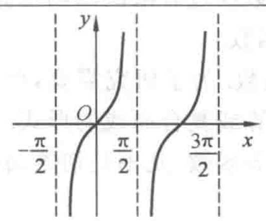
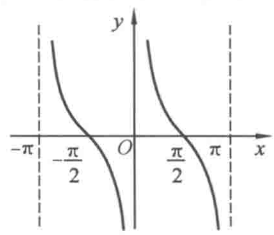
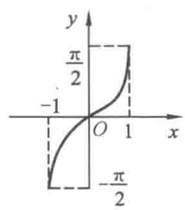
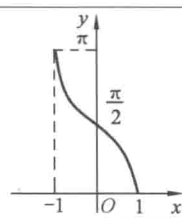
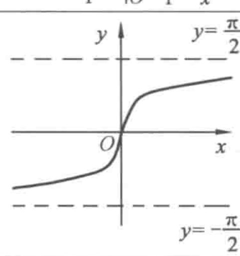
幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

基本初等函数及其图像、性质见表 1-1.

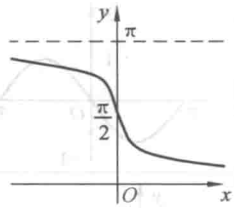
**表 1-1 基本初等函数及其图像、性质**

| 序号 | 函 数 | 图 像 | 性 质 |
|---|---|---|---|
| 1 | 幂函数 $y=x^a$，$a\in\mathbf{R}$ |   | 在第一象限，$a>0$ 时函数单调递增；$a<0$ 时函数单调递减. 共性：过点(1,1) |
| 2 | 指数函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ |   | $a>1$ 时函数单调递增；$0<a<1$ 时函数单调递减. 共性：过(0,1)点，以 $x$ 轴为渐近线 |
| 3 | 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ |   | $a>1$ 时函数单调递增；$0<a<1$ 时函数单调递减. 共性：过(1,0)点，以 $y$ 轴为渐近线 |

续表

| 序号 | 函数 | | 图像 | 性质 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 三角函数 | 正弦函数<br>$y=\sin x$ |  | 奇函数，周期 $T=2\pi$，有界 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$ |
| | | 余弦函数<br>$y=\cos x$ |  | 偶函数，周期 $T=2\pi$，有界 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$ |
| | | 正切函数<br>$y=\tan x$ |  | 奇函数，周期 $T=\pi$，无界 |
| | | 余切函数<br>$y=\cot x$ |  | 奇函数，周期 $T=\pi$，无界 |
| 5 | 反三角函数 | 反正弦函数<br>$y=\arcsin x$ |  | $x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，奇函数，单调增加，有界 |
| | | 反余弦函数<br>$y=\arccos x$ |  | $x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$，单调递减，有界 |
| | | 反正切函数<br>$y=\arctan x$ |  | $x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，奇函数，单调递增，有界，$y=\pm\frac{\pi}{2}$ 为两条水平渐近线 |

续表

| 序号 | 函　数 | | 图　像 | 性　质 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 反三角函数 | 反余切函数<br>$y=\operatorname{arccot} x$ |  | $x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,\pi)$，单调减少，有界，$y=0$ 与 $y=\pi$ 为两条水平渐近线 |

## 1.1.4　初等函数

**定义**　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的，并能用一个式子表示的函数，统称为初等函数.

初等函数的本质就是一个函数. 为了研究需要，今后经常要将一个给定的初等函数看成由若干个简单函数经过四则运算或复合而成的形式. 简单函数是指基本初等函数.

本课程研究的函数主要是初等函数. 凡不是初等函数的函数，皆称为非初等函数.

日期：____________ 教师：____________

## 1.2 数列的极限

**学习内容：** 数列的极限

**目的要求：** 掌握数列、数列极限、收敛（发散）数列的定义，熟练掌握数列极限的判断方法，数列极限的四则运算法则.

**重点难点：** 数列极限的判断，数列极限的四则运算法则.

### 课前探讨

1. 求半径为 1 的圆的面积，以及以下图形的面积：

(1) 内接正四边形的面积，外切正四边形的面积；

(2) 内接正六边形的面积，外切正六边形的面积；

(3) 内接正八边形的面积，外切正八边形的面积.

2. 阐述数列的定义，并举例(至少 2 个).

3. 观察数列的变化趋势

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$；

(2) $\{n^2\}$：$1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots$

4. 阐述数列极限的定义，并举例(至少 2 个).

5. 阐述收敛数列的定义，并举例(至少 2 个).

6. 阐述发散数列的定义，并举例(至少 2 个).

7. 阐述数列极限的四则运算法则，并举例(每项至少 2 个).

8. 阐述无穷递缩等比数列的求和公式，并举例(至少 2 个).

### 课堂讲习

**案例 1** 公元 263 年，我国古代数学家刘徽提出利用内接正多边形推算圆的面积.

设有一圆，首先作内接正六边形，它的面积记为 $A_1$；再作内接正十二边形，它的面积记为 $A_2$；再作内接正二十四变边形，它的面积记为 $A_3$；如此下去，每次边数加倍，一般把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 $A_n$，这样得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$$

内接正多边形的边数 $n$ 越多，即正整数 $n$ 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 $n$ 趋向于无穷大）时，内接正多边形的面积也在不断增大，却无限接近于一个定值——圆的面积 $A$.

刘徽的割圆术还给我们一个重要启示：圆的周长最初是未知的，通过与未知有联系的一列数——圆内接正多边形的周长，在无限的过程中，化未知为已知. 这一思想正是我们所要介绍的极限的基本思想.

**案例 2** 春秋战国时期哲学家庄子在《庄子 · 天下篇》中对"截丈问题"有一段名言："一尺之棰，日取其半，万世不竭."意思是说，一尺长的木棍，每天截取它的一半，这个过程将无穷无尽，其中也隐含了深刻的极限思想.

### 1.2.1 数列极限的概念

**定义 1** 按照一定次序排列的一列数称为**数列**，记作 $\{y_n\}$，其中 $y_n$ 称为数列的一般项或通项，$n$ 为正整数，称为下标. 例如：

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$：$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$；

(2) $\left\{\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$：$2,0,\dfrac{2}{3},0,\dfrac{2}{5},0,\cdots,\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$；

(3) $\{(-1)^n\}$：$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$；

(4) $\{n^2\}$：$1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots$.

观察上述各数列，随着 $n$ 取值的逐渐增大，$y_n=\dfrac{1}{n}$ 的取值越来越小，并逐渐逼近于零；对于 $y_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}$，当 $n$ 取奇数值时，其值越来越小，并向零靠近，当 $n$ 取偶数值时，其值均为零；$y_n=(-1)^n$ 的取值总是在 1 和 $-1$ 之间跳跃；$y_n=n^2$ 的取值是越来越大. 随着 $n$ 值的增大，$y_n$ 逐渐接近于某一个固定常数，就认为该数列的极限存在，否则就认为该数列没有极限，或者极限不存在.

**定义 2** 设有数列 $\{y_n\}$，如果存在一个常数 $A$，当 $n$ 无限增大时，$y_n$ 无限地接近于 $A$，则称**当 $n\to\infty$ 时数列 $\{y_n\}$ 以 $A$ 为极限**. 记作

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A \text{ 或 } y_n\to A(n\to\infty).$$

如果一个数列有极限，则称这个数列是收敛的，否则称这个数列是发散的.

上述数列中，(1)，(2)两数列是收敛的，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}=0$；(3)，(4)两数列是发散的，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 不存在. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2$ 是趋于无穷大而不存在，也可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$.

### 1.2.2 收敛数列的性质

**性质 1（唯一性）** 若数列 $\{y_n\}$ 收敛，则其极限值唯一.

**性质 2（有界性）** 收敛数列必有界.

**推论** 无界数列必发散.