MPA

公共管理硕士(MPA)专业学位联考
标准化题库 数学分册

MPA联考题库编写组　编

中国人民大学出版社

公共管理硕士(MPA)专业学位联考标准化题库

数学分册

MPA 联考题库编写组　编

参编人员：

朱永胜　史　弦　冯　旻　买　星

黄　倩　宋雪涛　蔡　晶　王明远

王　涛　魏旭东　张素君　平中怀

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

公共管理硕士（MPA）专业学位联考标准化题库．数学分册/MPA 联考题库编写组编．—北京：中国人民大学出版社，2015.5
ISBN 978-7-300-21396-5

Ⅰ.①公… Ⅱ.①M… Ⅲ.①公共管理-研究生-入学考试-习题集②高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①D035-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 114026 号

公共管理硕士（MPA）专业学位联考标准化题库
数学分册
MPA 联考题库编写组 编
Gonggong Guanli Shuoshi（MPA）Zhuanye Xuewei Liankao Biaozhunhua Tiku Shuxue Fence

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242（总编室）		010-62511770（质管部）
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.1kao.com.cn（中国 1 考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司	**版　　次**	2004 年 8 月第 1 版
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本		2015 年 6 月第 12 版
印　　张	17.75	**印　　次**	2015 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	331 000	**定　　价**	38.00 元

MPA

目　录

第一章　微积分

第一节　函数、极限、连续

试题精解

1. 设函数 $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(16-x)$,则 $f(x)$ 的定义域是(　　).

(A) $-4\leqslant x\leqslant 4$　　(B) $0<x\leqslant 4$

(C) $0\leqslant x\leqslant 4$　　(D) $-4\leqslant x\leqslant 16$

[答案] (B).

[解析] 由

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ x>0,\\ 16-x>0,\end{cases}$$

解得 $0<x\leqslant 4$,故应选(B).

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-ax}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$,则 $a=$ ________.

[答案] 2.

[解析] 由于

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-ax}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-ax)^{-\frac{1}{ax}}\right]^{-a}}=\frac{e}{e^{-a}}=e^{1+a},$$

所以　$e^{1+a}=e^3$,

解得　$a=2$.

3. 如图 1—1—1,假设甲、乙两国关于拥有洲际导弹数量的关系曲线 $y=f(x)$

和$x=g(y)$ 的意义是：

当甲国拥有导弹 x 枚时，乙国至少需储备导弹 $y=f(x)$ 枚，才有安全感；

当乙国拥有导弹 y 枚时，甲国至少需储备导弹 $x=g(y)$ 枚，才有安全感.

这两条曲线将坐标平面的第一象限分成四个区域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，双方均有安全感的区域是(　　).

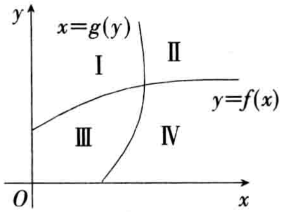

图 1—1—1

(A) Ⅰ 和 Ⅲ　　(B) Ⅲ　　(C) Ⅱ　　(D) Ⅱ 和 Ⅳ

[答案] (C).

[解析] 根据已知条件：当甲国拥有导弹 x 枚时，乙国至少需储备导弹 $y=f(x)$ 枚，所以乙国的导弹储备区域为 Ⅰ 和 Ⅱ.

类似地分析知：甲国的导弹储备区域为 Ⅱ 和 Ⅳ，故两国均有安全感的区域为Ⅱ. 本题应选(C).

4. 已知函数 $\varphi(x)$ 满足$\lim\limits_{x\to\infty}x\varphi(x)=3$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(n)=$ ________.

[答案] 0.

[解析] 由$\lim\limits_{x\to\infty}x\varphi(x)=3$，可知$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$，于是

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(n)=0.$$

5. 若函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 求函数 $g(x)=f(f(x))$ 及其定义域.

[解] 由已知条件，有

$$g(x)=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$$

而对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $|f(x)|\leqslant 1$，故 $g(x)=1$.
其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, & x\leqslant 0, 0<a<1,\\ 1-x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上(　　).

(A) 连续，且单调递增　　(B) 不连续，但分段单调

(C) 连续，且单调递减　　(D) 不连续，不单调

[答案] (C).

[解析] 因为，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}a^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$，所以，

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0).$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在$(-\infty,+\infty)$ 上连续，可排除(B)，(D).

又在 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=a^x(0<a<1)$ 为单调递减函数；因此，在 $x>0$ 时，$f(x)=1-x$ 为单调递减函数. 故 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. 故本题应选(C).

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\sin x}=$ ________.

[答案] 1.

[解析] 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$，可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

8. 设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，$f(0)=0$，且当 $x\neq 0$ 时，有

$$(1+x)f(x)=\frac{3\sin x}{\ln(1+x)}-2\lim_{x\to 0}f(x),$$

求 $f(x)$.

[解] 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处未必连续，可设 $A=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

当 $x\neq 0$ 时，在已知等式两边取极限，得

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{\ln(1+x)}-2A,$$

所以
$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}\quad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\cos x(1+x)=1.$$

故
$$(1+x)f(x)=\frac{3\sin x}{\ln(1+x)}-2,$$

即
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin x}{(1+x)\ln(1+x)}-\dfrac{2}{1+x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

9. 当 $x\to 0$ 时，$e^{-x}-1$ 的等价无穷小是(　　).

(A) e^x-1　　(B) x　　(C) $1-e^x$　　(D) x^2

[答案] (C).

[解析] 因为 $x\to 0$ 时，有 $e^x-1\sim x$ 和 $e^{-x}-1\sim -x$. 所以，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-x}=-1,$$

故(A) 不正确. 或由

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^{-x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(e^x-1)}{1-e^x}=\lim_{x\to0}(-e^x)=-1,$$

亦可得知(A)不正确.

因为 $x\to0$ 时,有 $e^{-x}-1\sim-x$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{e^{-x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{-x}=-1,$$

可知(B)不正确.

因为 $x\to0$ 时,有 $e^x-1\sim x$,$e^{-x}-1\sim-x$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{e^{-x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{-x}=1,$$

可知:$e^{-x}-1$ 的等价无穷小是 $1-e^x$. 故选(C).

10. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ 的所有可去间断点是________.

[答案] ±1.

[解析] $f(x)$ 在 $x=\pm(2k-1)(k=1,2,\cdots)$ 时间断,但当 $x\to-1$ 或 $x\to1$ 时,有

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{2x}{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi}.$$

类似地,有 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}=-\dfrac{4}{\pi}$.

故 $x=\pm1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

11. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-2x)}{x}$.

[解] 令 $x=-\dfrac{2}{3}t$,则 $x\to0$ 时,有 $t\to0$. 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(3x)}=\lim_{t\to0}\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{t}{f(-2t)}=-\frac{2}{3}\lim_{t\to0}\frac{t}{f(-2t)}=2.$$

由此得到 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(-2t)}{t}=-\dfrac{1}{3}$. 故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-2x)}{x}=-\dfrac{1}{3}$.

12. 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$,则当 $x\to0$ 时,一定是无穷小量的是(　　).

(A) $x^2f(x)$　　(B) $\dfrac{|x|}{xf(x)}$　　(C) $e^{-f(x)}$　　(D) $f(x)-\dfrac{1}{x}$

[答案] (B).

[解析] 取 $f(x)=\ln x$,分别代入检验即可得.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x^2-1)}{x^3-1}=$ ________.

[答案] $\dfrac{2}{3}$.

[解析] 当 $x\to 1$ 时，$\tan(x^2-1)-x^2-1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x^2-1)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}.$$

14. 若 $f(x)=\begin{cases} a+\dfrac{x}{\pi}, & x\leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{a\sin x+b}{x-\dfrac{\pi}{2}}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，求参数 a，b 的取值.

[解] 左极限 $\lim\limits_{x^-\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(a+\dfrac{x}{\pi}\right)=a+\dfrac{1}{2}$，

右极限 $\lim\limits_{x^+\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{a\sin x+b}{x-\dfrac{\pi}{2}}\right)$，

又因为 $f(x)$ 为连续函数，其在$\dfrac{\pi}{2}$处的极限必存在，故 $\lim\limits_{x^+\to\frac{\pi}{2}}f(x)$ 存在，

从而有 $\begin{cases} \lim\limits_{x^+\to\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b)=0, \\ \lim\limits_{x^+\to\frac{\pi}{2}}a\cos x=a+\dfrac{1}{2}, \end{cases}$

所以 $\begin{cases} a+b=0, \\ 0=a+\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}, \\ b=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

习题

单　元　一

一、选择题

1. 函数 $f(x)$ 在(a,b)内有反函数 $f^{-1}(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必为(　　).

(A) 有界函数　　(B) 严格单调上升

(C) 严格单调下降　　(D) 以上结论都不正确

2. 设$[x]$为取整函数，则函数 $f(x)=x-[x]$ 在$(-\infty,+\infty)$上为(　　).

(A) 单调上升函数　　(B) 奇函数

(C) 偶函数　　(D) 周期函数

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$ 等于(　　).

(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) 0　　(D) 2

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-\ln(2+x)}{x}=$__________.

2. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=$__________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\ln(1+e^x)}{x^2+e^{2x}}=$__________.

三、计算题

1. 设函数 $f(x)$ 定义在$(-\infty,+\infty)$，试判别函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 与 $h(x)=f(x)-f(-x)$ 的奇偶性.

2. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x^3)+2f\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=3x,\ x\neq 0$，试求 $f(x)$.

3. 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}$；

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(4) $y=\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to x_0}P_n(x)$.

5. 分别求出在 x 趋于 1，0 和 ∞ 时，函数$\dfrac{x-x^3}{2x+3x^3}$的极限值.

6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

单　元　二

一、选择题

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ 等于(　　).

(A) ∞　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2-e^x)}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 等于(　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) ln2

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$ 等于(　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) $\frac{3}{2}$　　(D) 2

二、填空题

1. 设 $f'(1)=4$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{f(3-2x)-f(1)}=$ ________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)}{(e^x-1)\ln(e^x-x)}=$ ________.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}-2x^3, & -1\leqslant x<1,\\ -2\sqrt{x}, & 1\leqslant x<4,\\ -x, & x\geqslant 4,\end{cases}$ 则 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为 ________.

三、计算题

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=A$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 点处连续，且极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(3-2x)+2}{x-1}$ 存在，试求 $f(1)$.

5. 证明方程 $x^5-3x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+\ln(1-x)}{e^x+(x+1)}$.

单　元　三

一、选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ 等于(　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) 2　　(D) ln2

2. 下列各选项中的两函数相等的是(　　).

(A) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$ 和 $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

(B) $y=e^{\ln x^3}$ 和 $y=x^3$

(C) $y=\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$ 和 $v=\sqrt{\dfrac{2+u}{2-u}}$

(D) $y=x$ 和 $y=\dfrac{x^2}{x}$

3. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,则 $f(x)$ 是(　　).

(A) 奇函数

(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数

(D) 既是奇函数,也是偶函数

4. 下列数列中收敛的是(　　).

(A) $\{n^2\}$　　(B) $\{e^{-1/n}\}$

(C) $\begin{cases}2, & n<50\\ n^2+1, & n\geqslant 50\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n}{n+2}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

二、填空题

1. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上满足 $2f(1+x)+f(1-x)=3e^x$,则 $f(x)=$ __________.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$ __________.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+x^3-\ln x}{5^x+x^4+3\ln x}=$ __________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{5^n+3}{n}}=$ __________.

5. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,则 $a=$ __________.

三、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}[1+\ln(1+x)]^{\ln x}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,其中 $x_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}_{n重}$.

单　元　四

一、选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 等于(　　).

(A) -1　　(B) 1

(C) 不存在　　(D) 以上结果均不正确

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}4-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在 $x=1$ 点间断是因为(　　).

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 点无定义

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 点的左极限不存在

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 点的右极限不存在

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 点的左、右极限都存在,但不相等

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在区间 (a,b) 内的根是(　　).

(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

4. $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(\mathrm{e}^x-x)]^x$ 等于(　　).

(A) 0　　(B) e　　(C) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　(D) 1

二、填空题

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,则函数 $f(x)$ 的间断点为__________.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$ __________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=$ ____________.

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x=$ ____________.

三、计算题

1. 试求函数 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^2}{(x^2+x-2)(1+e^{\frac{1}{x}})}$ 的连续区间、间断点及其类型.

2. $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2+1, & 0<x<2,\end{cases}$ 求其定义域.

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x\geqslant 100,\\ 0, & x<100,\end{cases}$ 求其定义域.

4. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=e^{\ln^2\frac{1}{x}}$;

(2) $y=\lg^2\sqrt{3x+1}$.

5. 求下列函数的反函数及其定义域.

(1) $y=\dfrac{x}{x+2}$;

(2) $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$

习题精解

单　元　一

一、选择题

1.［**答案**］(D).

［**解析**］首先可知(A)不正确,例如 $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ 无界,但它有反函数

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{x},\quad x\in(1,+\infty).$$

其次,(B),(C)也不正确,试看反例:

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1],\\ 3-x, & x\in(1,2),\end{cases}$$

有反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1],\\ 3-x, & x\in(1,2)\end{cases}$ 存在,但显然 $f(x)$ 在$(0,2)$上无单调性.

2.**[答案]** (D).

[解析] 由$[x]$的定义可知,$[x+1]=1+[x]$,因此,对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=(x+1)-(1+[x])=x-[x]=f(x)$,可见$f(x)$是周期 $T=1$ 的函数,它在一个周期$[0,1)$上的表达式为 $f(x)=x,x\in[0,1)$,所以易知(A),(B),(C)都不正确.故应选(D).

3.**[答案]** (C).

[解析] 本题是"$0\cdot\infty$"型未定式的极限,可用洛必达法则.首先应将其化为"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式,究竟化为哪一种,要视具体情况而定,如本题必须化为"$\frac{\infty}{\infty}$"型,即

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{-2x^{-3}}{-2x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0.$$

二、填空题

1.**[答案]** ∞.

[解析] 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2,\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(2+x)}{x}=\infty,$$

所以应填 ∞.

2.**[答案]** 不能确定.

[解析] 因为

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}\\ =&\lim_{t\to0}\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}+\frac{f(x_0-3t)-f(x_0)}{t}+\frac{2f(x_0)}{t}\right],\end{aligned}$$

由于 $$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=f'(x_0),$$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0-3t)-f(x_0)}{t}=-3f'(x_0),$$

可知,当 $f(x_0)=0$ 时,有

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=f'(x_0)-3f'(x_0)=-2f'(x_0);$$

当 $f(x_0)\neq0$ 时,有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=\infty.$$

所以该极限值不存在.

3.**[答案]** $1-\ln 2$.

[解析] 因为函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\ln(1+e^x)}{x^2+e^{2x}}$ 是初等函数,且在 $x=0$ 点处有定义,可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续,即有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=\frac{\sqrt{x+1}-\ln(1+e^x)}{x^2+e^{2x}}\bigg|_{x=0}=1-\ln 2.$$

三、计算题

1.**[解]** 对于$(-\infty,+\infty)$上的任一点 x,有

$$g(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(x)+f(-x)=g(x),$$

所以函数 $g(x)$ 为偶函数. 又因

$$h(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)=-h(x),$$

所以函数 $h(x)$ 为奇函数.

2.**[解]** 作换元 $t=x^3$,则有

$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=3\sqrt[3]{t},\quad t\neq 0,$$

可知 $$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=3\sqrt[3]{\frac{1}{t}},\quad t\neq 0.$$

由以上两式,解方程可得

$$f(t)=2\sqrt[3]{\frac{1}{t}}-\sqrt[3]{t},\quad t\neq 0,$$

即有 $$f(x)=2\sqrt[3]{\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x},\quad x\neq 0.$$

3.**[解]** (1) 对于$(-1,1)$内任一点 x,有

$$y(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-y(x),$$

所以为奇函数.

(2) 对于任意不等于 $\pm a$ 的 x 点,有

$$y(-x)=\frac{1}{a+(-x)}+\frac{1}{a-(-x)}=\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}=y(x),$$

所以为偶函数.

(3) 对于$(-\infty,+\infty)$内任一点 x,有

$$y(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$