数学分析中的重要定理

杨艳萍　明清河　著

mportant Theorems In
ematical Analysis

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

数学分析中的重要定理

杨艳萍　明清河　著

電子工業出版社·
Publishing House of Electronics Industry

内 容 提 要

本书是为学习数学分析课程的学生、从事数学分析教学与研究的读者而编写的。全书共分七章，系统地把数学分析中的重要定理总结和归纳为微积分基本定理、微分中值定理、积分中值定理、积分关系定理、极限关系定理、闭区间上连续函数的性质定理、实数连续性（完备性）定理七类进行研究。

全书从定理的历史演变分析、定理的内容与证明分析、定理的几何意义与条件结论分析、定理间的相互关系分析、定理的应用分析、定理的推广分析等角度展开研究。

本书可供数学及相关专业的本科生、研究生和从事数学分析的教学研究人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析中的重要定理/杨艳萍，明清河著. —北京：电子工业出版社，2015.2

ISBN 978-7-121-25562-5

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①杨…②明…　Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 033543 号

策划编辑：赵玉山
责任编辑：赵玉山
印　　刷：北京天来印务有限公司
装　　订：北京天来印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：22.25　字数：487 千字
版　　次：2015 年 2 月第 1 版
印　　次：2015 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序　言

“数学分析”是高等院校数学类各专业的主干课程之一，它是进一步学习各有关后续课程的阶梯，这门课程经过近三个世纪的发展和完善，形成了一套严密的、抽象的、形式化和逻辑性很强的理论体系。其中定理是数学分析理论体系中的重要内容，作为每一位从事数学分析教学和研究的人员，都面临着“教师如何教定理？学生如何学定理？”的问题。

杨艳萍、明清河同志所著的《数学分析中的重要定理》，把数学分析中的重要定理进行了总结、归纳与研究。该书将数学分析中的重要定理分成微积分基本定理、微分中值定理、积分中值定理、积分关系定理、极限关系定理、闭区间上连续函数的性质定理、实数连续性（完备性）定理七类。从数学史的角度认真梳理了这些定理的历史演变，从数学方法论的角度系统总结了这些定理的证明方法，从数学教学论的角度详细分析了定理的几何意义、定理的条件与结论、定理间的相互关系、定理的应用范畴，从数学研究的角度系统归纳了定理的推广方法。

本书是著者在认真学习国内外数学科学方法论的基础上，结合自己多年的数学分析课程教学和科学研究的实践，参阅大量的文献及参考书，经过反复推敲、修改和筛选，经过长时间探讨的成果。是对数学分析中的重要定理进行系统研究的一本难得的好书，也为数学分析定理的研究提供了一个很好的体例。它不仅适用于数学分析的教学研究人员和理工科专业的学生，而且对从事数学史、数学分析教学、数学分析研究来说都有很好的参考价值。

王梓坤
（中国科学院院士、北京师范大学原校长）

前　　言

“数学分析”作为数学类各专业的基础与主干课程，其理论体系的严密性与逻辑性很强，其中定理是数学分析理论体系中的重要内容。定理的历史演变、内容与证明、现实意义、相互关系、应用与推广，值得每一位教学研究人员和学习者深入研究和探讨。

笔者在多年的数学分析教学与研究实践中，一直关注着上述问题，积累了许多相关的资料，并进行了深入的思考，逐渐理清了数学分析定理研究的大致框架和基本思路。首先，对前人大量的研究成果进行了认真的归纳、整理、分析，对研究、认知、教学、学习等过程开展了认真的挖掘、分析、实践；然后，对数学分析中的重要定理进行了分类，力求全面化、系统性、思辨性，使其既符合科学研究过程的一般规律，又符合教学认知过程的一般规律。

按照这样的思路，本书把数学分析中的重要定理总结和归纳为微积分基本定理、微分中值定理、积分中值定理、积分关系定理、极限关系定理、闭区间上连续函数的性质定理、实数连续性（完备性）定理七类。对每类定理从定理的历史演变、定理的证明方法、定理的相关内容分析（包含定理的几何现实意义、定理的条件与结论、定理间的相互关系等）、定理的应用范畴、定理的推广方法五个侧面展开细致的研究。本书是基于数学方法论、数学教学论、数学研究的基本方法等理论依据编写的。

书中对定理的历史演变分析，力求体现历史发展的原本过程；对定理的证明方法，力求体现多样化；对定理的相关内容分析，力求密切联系教学实际；对定理的应用范畴，力求体现典型、丰富；对定理的推广方法，力求体现启发性与研究性。书中题量较大、题型丰富，参考文献详细，不仅可作为教学研究的辅导材料，也可作为数学分析的学习指南和复习考研的参考书。

最后，衷心感谢电子工业出版社赵玉山老师和相关编辑人员的辛勤工作，感谢我们的两个研究生吕海玲、于金倩老师为书稿校对所做的工作，正是他们的努力，才能使本书得以早日出版。

由于水平有限，成书仓促，书中一定还有不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

杨艳萍　明清河

目　录

第 1 章　微积分基本定理

微积分基本定理作为数学分析的核心定理，是微积分这门学科建立的标志。它揭示了微分与积分这对矛盾的内在联系和转化规律，使微分学与积分学成为一门统一的学科；微积分基本定理是联系导数、微分、不定积分、定积分的桥梁和纽带，具有重要的理论意义和实用价值。

1.1　微积分基本定理的历史演变

微积分基本定理从发现到形成现在的形式，跨度将近两个世纪，大致分为发现、创立和完善三个阶段，对其作出主要贡献的有巴罗、牛顿、莱布尼茨、柯西等人。

1.1.1　微积分基本定理的发现阶段

微积分基本定理的最早形式是巴罗的几何形式的微积分基本定理。

微分和积分的概念，在古希腊和古代中国就已经萌芽，15～16 世纪，一大批数学家沿着古人的道路，在求切线、求面积这两类微分和积分的基本问题上进行了深入的研究，但并未形成统一的方法，特别是他们并未看到“求切线”和“求面积”之间的互逆关系。

17 世纪英国数学家巴罗（Isaac Barrow，1630－1677）是第一个看到这一互逆关系的人，他在其著作中，给出求曲线切线的方法，引入“微分三角形”的概念，以明确形式给出了求切线和求面积之间的互逆关系，对于牛顿和莱布尼茨确立微积分体系起到了重要的启发作用。

巴罗在《几何讲义》一书中，以几何形式给出了求面积和求切线的互逆关系，这一关系用现代数学语言可以表述为：

建立坐标系 xOy，使 Oy 向下，现有增函数 $y=f(x)$ 在坐标系中表示为曲线 BGE（见图 1.1）。

$D(x,0)$为 Ox 上任一点，曲线 BGE 和 OD 及纵线 BO、ED 所围成的面积（即曲边梯形 $OBED$ 的面积）是 x 的函数，记作 $S(x)$。

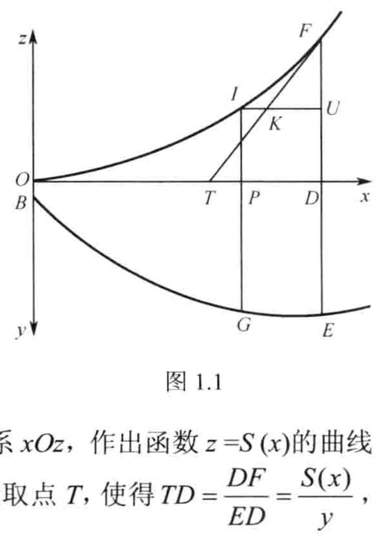

图 1.1

为了便于比较，以 Oy 的反方向为 Oz，建立坐标系 xOz，作出函数 $z=S(x)$的曲线 OIF，$F(x,S(x))$是 ED 延长线与曲线的交点，在 Ox 上取点 T，使得 $TD=\dfrac{DF}{ED}=\dfrac{S(x)}{y}$，

巴罗断言，直线 TF 是曲线 OIF 在点 F 的切线（原话是 TF 仅在点 F 与 OIF 相接触），并以较为初等的方法加以证明。

很容易看出直线 TF 是分析意义下面积函数 $S(x)$的切线，若同时适当地定义斜率，则上述结论就相当于 $S'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=f(x)$。

巴罗的这一结果被认为是微积分基本定理的最早形式，从而对微积分的创立起到了巨大的作用，由于这一结果是用几何语言叙述的，较难理解，应用也较为困难，再加上巴罗本人对于接近微积分基本定理的重大发现似乎认识不足，因此这一发现在当时影响不大。

1.1.2 微积分基本定理的创立阶段

揭示微分和积分内在联系，创立微积分基本定理的是牛顿和莱布尼茨。

1．牛顿的反流数形式的微积分基本定理

英国著名的物理学家、数学家和天文学家牛顿（Isaac Newton，1643－1727）是微积分学的奠基人，他是在前人的工作基础上进行分析和综合，建立他的理论体系的，他将古希腊以来求解无穷小问题的各种技巧统一为两类普遍的算法——微分和积分，以"流数"（导数）为该理论的核心概念，并通过逆过程（反流数）来解决面积等积分问题。

他通过考虑函数关系中自变量的无穷小量变化和相应的函数变化量之间的比例关系，得到人类有史以来最有力的数学工具——微分方法及其思想，牛顿称之为"流数法"，进而，他发现反流数法，可以由切线求出曲线，由流数求出函数，更加神奇的是利用反流数法，可以轻松求出曲线所围图形的面积，而不必借助复杂的穷竭法。牛顿将求曲线的切线和面积之间的互逆关系从巴罗的纯几何形式推广到代数形式的互逆运算形式，这是历史上第一次以明确形式给出了微积分基本定理。

以下是牛顿在《论流数》（1666）中首次给出的微积分基本定理：

设 y 为曲线 $g=f(x)$ 下图形 abc 的面积，作 $de // ab, ad\perp ab, ce\perp de, be=1$，当垂直线 cbe 以单位速度向右移动时，cb 扫出面积 $abc=y$，其流数 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=q$，$be$ 扫出 $adbe=x$，其流数 $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=p=1$，因此，$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\left(\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\right)=\dfrac{q}{p}=q=f(x)$；于是面积 y 可以通过面积的变化率 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=f(x)$，经过反流数求得（见图 1.2）。

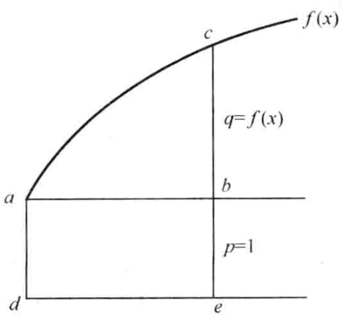

图 1.2

这里，牛顿虽未以命题形式叙述和证明微积分基本定理，但他确实很清楚地看到这个事实，并应用它使许多动力学、运动学的问题变为简单问题，为经典

物理学做出了开创性的工作。牛顿在以后的著作中，如《流数法和无穷级数》中将微积分分为两个基本问题：已知流量关系，求流数比；已知含流数的方程，求流量的关系。从而确定这两个问题的互逆关系，进而建构起系统的微分法和反微分法。

2．莱布尼茨的建立在符号基础上的微积分基本定理

德国哲学家、数学家莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646－1716）也是微积分的奠基人，他开始研究数学的时间比牛顿要晚，在 17 世纪 70 年代，他了解到笛卡儿、瓦里斯、巴罗在研究微积分的工作，并萌发了与微积分有关的思想。作为一位哲学家，他是从发现和揭示微积分基本原理入手发展他的学说的，独立的微分 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 作为他的体系的基本概念，面积和体积被看成若干个微分之和。

巴罗的微分三角形对莱布尼茨有着重要启发，对微分三角形的研究，使他意识到：曲线切线依赖于纵坐标的差值与横坐标差值之比，求面积依赖于横坐标的无穷小区间的纵坐标之和，再加上他对整数平方和序列中“和”与“差”关系的研究，使他意识到求切线和求积问题是一对互逆的问题，从而促使他去研究“$\int$”的运算（积分）和“d”的运算（微分）之间的关系。在他研究了积分和微分的运算之后，注意到这样一个事实：

对于 $p\mathrm{d}x = x\mathrm{d}x$，转换成和式就变为 $\int p\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x$，而从我们所建立的求切线的方法中，明显地有 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x\mathrm{d}x$，所以反过来 $\frac{1}{2}x^2 = \int x\mathrm{d}x$。

因此作为普通运算的幂和根式、和与差、“$\int$”和“d”是互逆的。通过以上不充分的论证，莱布尼茨第一次表达出微分和积分之间的互逆关系。

1675－1676 年间，他给出微积分基本定理 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(b) - f(a)$，$\int f(x)\mathrm{d}x = A$，其中 A 为曲线 f 所围图形的面积。

1693 年，他给出了上述定理的一个证明，发表在《教师学报》上。

1.1.3　微积分基本定理的完善阶段

牛顿和莱布尼茨的微积分体系中，总是将积分看成微分的逆运算，并且他们的积分概念也是含糊不清的，有时为定积分，有时又为不定积分，特别是将积分定义为微分的逆命题，从某种意义上影响了积分学作为相对独立数学分支的发展，造成了微积分发展的曲折，这种情况到微积分进行严格化尝试时才有所变化。

19 世纪法国著名的数学家、物理学家柯西（Cauchy，1789－1857）是微积分的真正理论基础——极限理论的缔造者，我们今天看到极限、连续性定义、把导数看成差商的极限、把定积分看成和的极限、微积分基本定理的现代形式和证明，都是柯西给出的。

柯西在他的《无穷小计算概念》（1823）中对定积分做了最系统的开创性工作，首先他恢复了把积分作为和的特征。

他对连续函数 $f(x)$ 给出了定积分作为和的特征，他指出：如果 $f(x)$ 是定义在区间 $[x_0,x]$ 上的连续函数，区间 $[x_0,x]$ 被 x 的值 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 所分割，那么 $f(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上的积分是特征和式

$$f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

在 $[x_{i+1},x_i]$ 无限减小时的极限。柯西证明了"这个极限仅仅依赖于函数 $f(x)$ 的形式以及变量 x 的两端值 x_0 和 x"，因此他称这个极限为定积分，记作 $\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$，用以代替高斯对反微分法经常使用的记号 $\int f(x)\mathrm{d}x\begin{bmatrix}x=b\\x=a\end{bmatrix}$。

接着，柯西定义 $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$，利用推理证明了 $F(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续，并且设

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)\mathrm{d}x$$

利用积分中值定理证明了 $\left[\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，即 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x]$ 上的定积分的导数就是 $f(x)$ 本身，这就是微积分基本定理的现代形式，他所给的证明也是微积分基本定理的第一个严格证明。

柯西接着证明了"给定函数 $f(x)$ 的全体原函数彼此只差一个常数"之后，定义了不定积分

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{x} f(x)\mathrm{d}x+C$$

柯西指出，若 $f'(x)$ 连续，则 $\int_{a}^{b} f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$，从而完成了揭示微积分基本定理的全部任务。

1.2 微积分基本定理的内容与证明

微积分基本定理描述了微积分的两个主要运算——微分和积分之间的关系，其内容包含两个部分或以两种形式表述。第一部分称为微积分第一基本定理（也称为原函数的存在定理、积分上限函数的求导公式、微分形式的微积分基本定理），表明不定积分是微分的逆运算，其重要之处在于它保证了某连续函数的原函数的存在性；第二部分称为微积分第二基本定理（也称为牛顿–莱布尼茨公式、微积分基本公式、积分形式微积分基本定理），表明定积分可以用无穷多个原函数的任意一个来计算，其重要之处在于它大大简化了定积分的计算。

1.2.1 微积分第一基本定理及其证明

定理 1.1（微积分第一基本定理、微分形式的微积分基本定理）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$，则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x), x\in[a,b]$，亦即 $\mathrm{d}\Phi(x)=\mathrm{d}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\mathrm{d}x$ 。

证法一（利用积分中值定理）

对 $[a,b]$ 上任一确定的 x，当 $\Delta x\neq 0$ 且 $x+\Delta x\in[a,b]$ 时，按定义式有

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$

由积分第一中值定理，得

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=f(x+\theta\Delta x),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

由于 f 在点 x 连续，故有

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\Delta x)=f(x)$$

所以

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

证法二（利用牛顿-莱布尼茨公式）

因　$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$，故由牛顿-莱布尼茨公式得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=F(x+\Delta x)-F(x)$$

即　$$\Delta\Phi=F(x+\Delta x)-F(x)$$

所以　$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=f(x)$$

即　$$\Phi'(x)=F'(x)=f(x)$$

所以　$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

证法三（利用连续函数的定义和定积分的保号性）

任取一点 $x_0\in[a,b]$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，由连续函数的定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x-x_0<\delta$ 时有

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，根据定积分的保号性知：

$$[f(x_0)-\varepsilon](x-x_0)<\int_{x_0}^x f(x)\mathrm{d}x<[f(x_0)+\varepsilon](x-x_0)$$

注意到 $$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t$$

从而有 $$f(x_0)-\varepsilon<\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}<f(x_0)+\varepsilon$$

同理，此式当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时也成立。

由极限的定义知 $$\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

即有 $$\Phi'(x_0)=f(x_0),\quad x_0\in[a,b]$$

由 x_0 的任意性知 $\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$。

1.2.2 微积分第二基本定理及其证明

定理 1.2（微积分第二基本定理、积分形式的微积分基本定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且存在原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$。

证法一（利用定积分的定义和微分中值定理）

由定积分的定义，即证明：任给 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|<\varepsilon$。

对于 $[a,b]$ 的任一分割 T，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上应用拉格朗日中值定理，则存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i),i=1,2,\cdots,n$，使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^n F'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，所以对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$，于是，当 $\Delta x_i\leqslant\|T\|<\delta$ 时，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，便有 $|\xi_i-\eta_i|<\delta$，故

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|=\left|\sum_{i=1}^n[f(\xi_i)-f(\eta_i)]\Delta x_i\right|$$
$$\leqslant\sum_{i-1}^n|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}.\sum_{i=1}^n\Delta x_i=\varepsilon.$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 成立。

证法二（利用原函数存在定理）

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，根据微积分第一基本定理知 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，而 $f(x)$ 的任意两个原函数只能相差一个常数，所以