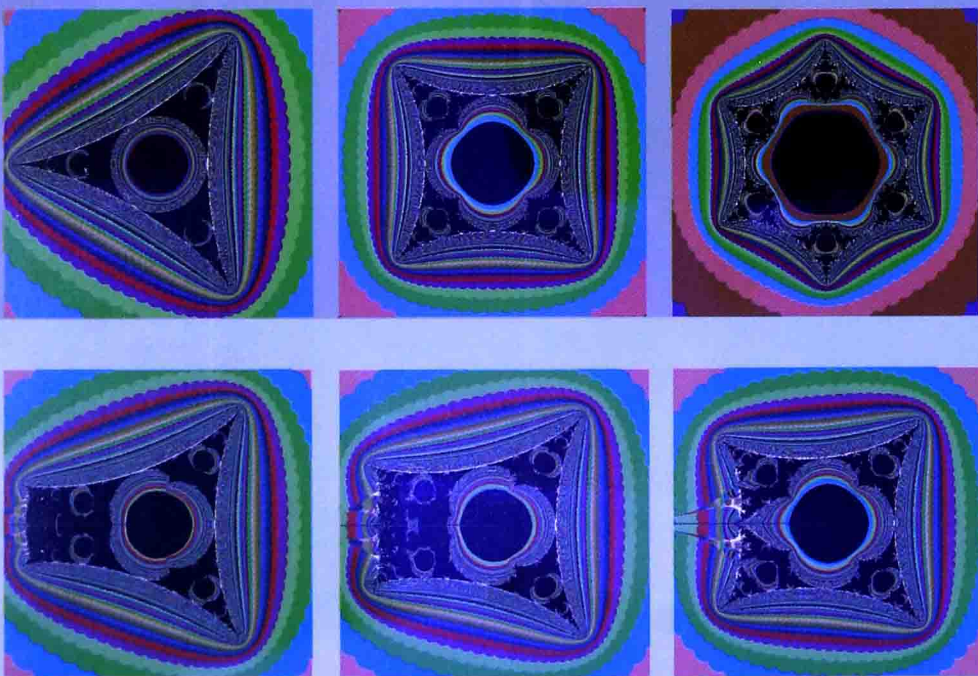
分形几何学及应用

（上册）

王兴元　孟　娟　著



科学出版社

分形几何学及应用

(上　册)

王兴元　孟　娟　著

科 学 出 版 社
北　京

内容简介

分形几何学是描述具有无规则结构复杂系统形态的一门新兴边缘科学. 在过去 30 多年中, 分形几何学已成功地应用于许多不同学科的研究领域, 并对一些未解难题的研究取得突破性进展. 今天, 分形几何学已被认为是研究复杂问题最好的一种语言和工具, 成为世人关注的学术热点之一. 本书详细介绍分形几何学中具有重要地位的 M-J 集的生成机理, 探索了 M-J 集发展、演化、控制、应用的规律, 用动力系统的观点对 M-J 集的复杂性进行刻画. 主要内容有：分形几何学的发展史及研究方法、分形几何学的基本理论、序列和映射中的分形与混沌、广义 M-J 集、广义 M-J 集非边界区域分形结构、噪声扰动广义 M-J 集及其控制、高维广义 M-J 集、牛顿变换的广义 J 集、IFS 吸引子和广义 M-J 集在物理学中的应用研究.

本书深入浅出, 图文并茂, 文献丰富, 可供理工科大学教师、高年级学生、研究生和博士后阅读, 也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

分形几何学及应用. 上册/王兴元, 孟娟著. —北京：科学出版社, 2015.1
ISBN 978-7-03-042475-4

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①王… ①孟… Ⅲ. ①分形学 Ⅳ. ①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 263255 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 钟　洋　朱光兰
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第　一　版　开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 1 月第一次印刷　印张:34 3/4　插页:12
字数: 689 000

定价: 218.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

1975 年, Mandelbrot 出版了他的法文专著《分形对象：形、机遇与维数》(*Les objects Fractal:Forme, Hazardet Dimension*), 此专著第一次系统地阐述了分形几何的思想、内容、意义和方法, 标志着分形几何作为一门独立的学科正式诞生. 1977 年他出版了该书的英译本. 1982 年 Mandelbrot 的另一部历史性著作《大自然的分形几何学》(*The Fractal Geometry Nature*) 与读者见面. 该书旁征博引, 图文并茂, 从分形的角度考察了自然界中的诸多现象, 引起学术界的广泛注意, 从而把分形理论推进到一个迅猛发展的阶段.

此后, 一直持续的分形热引起了全世界众多科学家和学者的注意, 他们在各自领域中研究工作, 使分形理论遍地开花.

分形理论的创立激起了科学界的极大热情, 经过 30 多年来的开拓与发展, 分形研究在当前形成了一股热潮. 分形的研究跨越了各学科, 涉及各个科学技术领域. 分形理论为科学地研究具有随机形态特征及无穷细节的自然现象, 提供了一种全新的数学工具. 分形研究的目的是力图揭露、了解隐藏得很深的自然界混乱无规结构中的规律性及其物理本质, 并进而支配它们. 但这个目的还远没有达到. 因此, 已经有越来越多的学者投身于这一新学科的理论及其在各门具体科学中的应用研究. 传播和普及分形学的基本概念、基本理论及应用研究成果是一项非常有意义的工作.

随着分形的发展, 分形发生学理论体系的建立已直接影响到分形实质性的、深入的研究, 成为分形研究的焦点. 分形发生学主要对分形中具有重要地位的 M-J 集和 IFS 吸引子的生成机理进行研究, 探索 M-J 集和 IFS 吸引子发展、演化的规律, 用动力系统的观点对 M-J 集和 IFS 吸引子的复杂性进行刻画. 为此, 我们在多年从事 M-J 集分形结构研究工作的基础上, 参阅国内外有关文献资料, 并结合我们近年来的一些研究成果, 经过反复修改而写成本书. 本书介绍广义 M-J 集和 IFS 吸引子计算机构造的基本原理, 利用实验数学方法, 研究广义 M-J 集和 IFS 吸引子的结构特征, 是一本从事分形应用的科技工作者和对分形理论有兴趣的研究人员的实用读物.

全文共分 10 章. 第 1 章介绍分形理论的建立与发展、分形理论的研究现状和分形应用的若干研究领域. 第 2 章介绍分形的基本理论, 内容有分形的定义、分形空间、分形维数、逃逸时间算法、分形与混沌的关系和刻画混沌运动的 Lyapunov 指数. 第 3 章介绍序列的动力学特性以及 Logistic 映射和 C-K 映射中的分形与混沌. 第 4 章介绍复映射的广义 M-J 集、准正弦斐波那契函数的 M-J 集以及高次复

多项式的 M-J 集. 第 5 章介绍广义 M-J 集非边界区域分形结构. 第 6 章介绍了噪声扰动的广义 M-J 集、噪声扰动的四元数 M 集、单扰动复映射的广义 M-J 集以及广义 M-J 集的控制. 第 7 章介绍高维广义 M-J 集, 具体有双复数广义 M-J 集、超复数空间中的高维广义 M-J 集、超复数空间广义 M-J 集的 L 系统描述和四元数广义 M-J 集. 第 8 章介绍 Newton 变换的广义 J 集, 主要有标准 Newton 变换的 J 集、广义 Newton 变换的 J 集, 复指数函数 Newton 变换的 J 集、单参数高次多项式的 Schröder 函数的 J 集、实指数幂多元 Newton 变换的 J 集和伪 3D Newton 变换的 M-J 集. 第 9 章介绍 IFS 吸引子, 内容有基于 IFS 的自然景观模拟、一类 NMIFS 吸引子的递归计算构造及特性分析, 分形植物形态模拟. 第 10 章介绍广义 M-J 集在物理学中的应用研究. 书中所采用的例子, 大都来自近年来我们课题组在国内外期刊所发表的论文, 内容翔实可靠.

本书的研究工作得到了国家自然科学基金 (编号: 61370145, 61173183, 60973152, 60573172)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20070141014)、辽宁省高等学校优秀人才支持计划 (批准号: LR2012003)、辽宁省自然科学基金 (批准号: 20082165) 以及辽宁省教育厅科学研究项目 (编号: L2012258) 的支持, 在此表示由衷的感谢.

由于受科研水平和所做工作的局限性影响, 书中难免有疏漏之处, 恳请广大读者多提宝贵意见. 谢谢!

王兴元　孟　娟
2014 年 1 月于大连理工大学

目　　录

前言
第 1 章　绪论 ············ 1
1.1　分形理论的建立与发展 ············ 1
1.1.1　分形概念的提出与理论的建立 ············ 1
1.1.2　分形理论的发展 ············ 2
1.2　分形理论的研究现状 ············ 4
1.3　分形应用的若干研究领域 ············ 8
参考文献 ············ 12
第 2 章　分形的基本理论 ············ 18
2.1　分形 ············ 18
2.1.1　分形的定义 ············ 18
2.1.2　分形空间 ············ 19
2.1.3　分形维数 ············ 21
2.2　构造分形图的逃逸时间算法 ············ 26
2.3　分形与混沌的关系 ············ 27
2.4　刻画混沌运动的特征量——Lyapunov 指数 ············ 29
2.4.1　Lyapunov 指数的定义 ············ 29
2.4.2　卡普兰-约克猜想 ············ 29
2.4.3　差分方程组计算 Lyapunov 指数的方法 ············ 30
2.4.4　实验数据计算 Lyapunov 指数的方法 ············ 30
参考文献 ············ 31
第 3 章　序列和映射中的分形与混沌 ············ 36
3.1　序列的动力学特性 ············ 36
3.1.1　Batrachion 序列中的混沌现象 ············ 36
3.1.2　广义高斯和的分形序列及其 M-J 集 ············ 42
3.1.3　基于分形可视化方法研究广义 $3x+1$ 函数的动力学特性 ············ 52
3.1.4　基于广义 M 集的逃逸线图研究一维映射的动力学 ············ 62
3.2　Logistic 映射和 C-K 映射中的分形与混沌 ············ 77
3.2.1　二维 Logistic 映射的分岔与分形 ············ 77
3.2.2　复合 Logistic 映射中的逆分岔与分形 ············ 91

3.2.3　C-K 映射中的混沌与分形 ······ 113
参考文献 ······ 135
第 4 章　广义 M-J 集 ······ 141
4.1　复映射的广义 M-J 集 ······ 141
4.1.1　一个非解析复映射的广义 J 集 ······ 141
4.1.2　一个非解析复映射的广义 M 集 ······ 154
4.1.3　复合复映射的 J 集 ······ 163
4.1.4　复合复映射的广义 M 集 ······ 177
4.1.5　广义 M-J 集之间 Hausdorff 距离 ······ 204
4.2　准正弦斐波那契函数的 M-J 集 ······ 206
4.2.1　准正弦斐波那契双曲动力系统的动力学研究 ······ 206
4.2.2　噪声干扰的准正弦斐波那契函数的 J 集 ······ 212
4.2.3　噪声干扰的准正弦斐波那契函数的 M 集 ······ 224
4.3　高次复多项式的 M-J 集 ······ 245
4.3.1　复多项式映射的广义 M-J 集理论 ······ 245
4.3.2　高次复多项式的 M-J 集 ······ 247
4.3.3　高次复多项式映射的类 M 集 ······ 255
4.3.4　一类复合复映射的类 M 集 ······ 266
参考文献 ······ 275
第 5 章　广义 M-J 集非边界区域分形结构 ······ 278
5.1　多种非边界区域分形结构构造方法的改进 ······ 278
5.1.1　利用 Engel 法研究广义 M-J 集的内部结构 ······ 278
5.1.2　利用其他三种算法研究广义 M-J 集非边界区域的分形结构 ······ 290
5.2　基于周期点的广义 M 集非边界区域分形结构的构造 ······ 309
5.2.1　M 集及广义 M 集的逃逸时间 N 的约数周期点 ······ 309
5.2.2　基于预周期的广义 M 集周期芽苞内部结构渲染 ······ 314
5.3　利用 Lyapunov 指数和周期点查找技术分析广义 M-J 集的分形特征 ······ 325
5.3.1　理论与方法 ······ 325
5.3.2　实验与结果 ······ 326
5.3.3　结论 ······ 350
5.4　整数阶广义 M 集周期区域中心点坐标的精确计算 ······ 350
5.4.1　广义 M 集的周期区域理论 ······ 351
5.4.2　整数阶广义 M 集周期区域中心点坐标的计算 ······ 353

5.4.3　负整数阶广义 M 集周期区域中心点坐标的计算 …… 363
5.4.4　小结 …… 364
参考文献 …… 365
第 6 章　噪声扰动广义 M-J 集及其控制 …… 368
6.1　噪声扰动的广义 M-J 集 …… 368
6.1.1　噪声扰动的广义 J 集 …… 368
6.1.2　噪声扰动的广义 M 集 …… 415
6.1.3　加性噪声扰动的广义 M-J 集 …… 448
6.2　噪声扰动的四元数 M 集 …… 466
6.2.1　噪声扰动的四元数 M 集的迭代形式 …… 466
6.2.2　加性噪声扰动下的四元数 M 集 …… 468
6.2.3　乘性噪声扰动的四元数 M 集 …… 477
6.2.4　输出噪声扰动的四元数 M 集 …… 483
6.2.5　小结 …… 487
6.3　单扰动复映射的广义 M-J 集 …… 487
6.3.1　理论与方法 …… 488
6.3.2　实验与结果 …… 489
6.3.3　结论 …… 502
6.4　广义 M-J 集的控制 …… 503
6.4.1　广义 J 集的控制 …… 503
6.4.2　广义集的控制 …… 526
参考文献 …… 544

第1章 绪 论

1.1 分形理论的建立与发展

非线性混沌与分形理论的基本思想起源于 20 世纪初, 发生于 60 年代后, 发展壮大于 80 年代. 这一理论揭示了有序与无序的统一、确定性与随机性的统一, 被认为是继相对论、量子力学后, 20 世纪人类认识世界和改造世界的最富有创造性的科学领域的第三次大革命.

分形理论是非线性科学研究中十分活跃的一个分支, 它的研究对象是自然界和非线性系统中出现的不光滑和不规则的几何形体. 分形理论的数学基础是分形几何.

1.1.1 分形概念的提出与理论的建立

人类在认识世界和改造世界的活动中离不开几何学. 在经典的欧氏几何中, 可以用直线、圆锥、球等这一类规则的形状去描述诸如墙、车轮、建筑物等人造物体, 这是极自然的事情, 因为这些物体本来就是根据欧氏几何的规则图像生成的. 然而在自然界中, 却存在许许多多极其复杂的形状, 如曲折的海岸线、起伏的地表面、螺旋形的海贝壳、瞬息万变的云彩、缥缈神秘的星系, 甚至经济市场中的无情的波动等. 它们都是复杂的几何形状, 用传统的欧氏几何来描述是无能为力的. 分形几何是一门以非规则几何形状为研究对象的几何学, 它把自然看成具有无限嵌套层次的精细结构, 并且在不同尺度下保持某种形似属性, 于是在变换与迭代的过程中得到描述自然形态的有效方法. 因此, 分形几何又称为描述大自然的几何学.

分形的英文是 Fractal, 是由美国籍法国数学家 Mandelbrot 在 20 世纪 70 年代为了表征复杂图形和复杂过程首先引入到自然科学领域的. 此词源于拉丁文形容词 Fractus, 对应拉丁文动词是破碎、产生无规则碎片. 此外, 此词与英文的 Fraction(碎片、分数) 及 Fragment(碎片) 具有相同的词根. 在 20 世纪 70 年代中期以前, Mandelbrot 一直使用英文 Fractional 一词来表示他的分形思想. 因此, 取拉丁词之头, 与英文之尾合成的 Fractal, 本意是不规则的、破碎的、分数的.

1975 年, Mandelbrot 出版了他的法文专著《分形对象：形、机遇与维数》(*Les Objects Fractals: Forme, Hazardet Dimension*), 标志着分形理论的正式诞生, 1977 年他出版了该书的英译本[1]. 1982 年 Mandelbrot 的另一部历史性著作《大自然的

分形几何学》(*The Fractal Geometry of Nature*) 与读者见面[2]. 该书虽然是前书的增补本, 但在 Mandelbrot 看来却是分形理论的 "宣言书", 而在分形迷的眼中, 它无疑是一部 "圣经". 该书旁征博引, 图文并茂, 从分形的角度考察了自然界中的诸多现象, 引起学术界的广泛注意, Mandelbrot 因此一举成名.

此后, 一直持续的分形热引起了全世界众多科学家和学者的注意, 他们在各自的领域中研究工作, 使分形理论遍地开花.

1.1.2　分形理论的发展

分形理论的发展大致可分为三个阶段. 下面简要回顾一下分形理论在这三个历史阶段的发展过程[2,3].

第一阶段为 1875~1925 年, 在此阶段, 人们已认识到几类典型的分形集, 并力图对这类集合与经典几何的差别进行描述、分类和刻画. 1872 年, Weierstrass 证明了一种连续函数在任意一点均不具有有限或无限导数. 这一结果在当时曾引起了极大的震动, 但人们认为 Weierstrass 给出的函数是极为 "病态" 的例子. 1904 年 Koch 通过初等方法构造了如今被称为 Koch 曲线的处处不可微的连续曲线. 特别重要的是, 该曲线是第一个人为构造的具有局部与整体相似结构的例子, 它被称为自相似结构. 之后, Peano 又构造出填充平面的曲线, 这导致了后来拓扑维数的引入. 1872 年, Cantor 引入了一类全不连通的紧集 —— Cantor 三分集. 在当时, 人们认为这类集合在传统的研究中是可以忽略的. 但进一步的研究结果表明, 这类集合在像三角级数的唯一性这样的重要问题的研究中不仅不能忽略, 而且起着非常重要的作用.

另一类极为典型的随机分形集, 即布朗运动, 在那时已经受到物理学家的重视. Perrin 在 1913 年对布朗运动的轨迹进行了深入研究, 明确指出布朗运动作为运动曲线不具有导数. 为此, Wiener 建立了布朗运动的概率模型.

为了测量上述这些集合, 同时为了得到更一般的理论, Hausdorff 于 1919 年引入了 Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数. 这些概念指出了为了测量一个几何对象, 必须依赖测量方式及测量所采取的尺度.

总之, 在分形理论发展的第一阶段, 人们已经提出了典型的分形对象及其相关问题并为讨论这些问题提供了最基本的工具.

第二阶段大致为 1926~1975 年, 在这半个世纪里, 人们实际上对分形集的性质, 特别是维数理论的研究已获得了丰富的成果, 而且将研究范围扩大到数学的许多分支中. 其中 Besicovitch 及其他学者研究了分形集的局部性质和结构等, 他们的研究结果极大地丰富了分形几何理论. 同时, Kolmogorov 等对分形集的维数的研究, 使维数理论得到了进一步发展并日臻成熟.

尽管在此阶段分形的研究取得了许多重要的成果, 并使这一学科在理论上初见

雏形, 但是绝大部分从事这一领域工作的人主要局限于纯数学理论的研究, 并未与其他学科发生联系. 另外, 物理、地质、天文学和工程学等学科已产生了大量与分形几何有关的问题, 迫切需要新的思想与有力的工具来处理. 正是在这种形势下, Mandelbrot 以其独特的思想, 自 20 世纪 60 年代以来, 系统、深入、创造性地研究了海岸线的结构, 具有强噪声干扰的电子通信、月球的表面、银河系中星体的分布和地貌的生成的几何性质等典型的自然界中的分形现象, 并取得了一系列令人瞩目的成就. 通过研究, Mandelbrot 深刻地意识到, 传统数学中被认为是 "病态的" "反常的" "魔鬼集", 其实是大自然中具有 "粗糙和自相似" 形态的事物非常合适的数学模型. 因此, Mandelbrot 把具有 "粗糙和自相似" 特点的各种不规则图形或函数或点集称为分形, 并且找到了描述它们的数学模型[2]. 这标志着分形思想已经产生, 说明有必要建立一门以分形为研究对象的新的几何学.

第三阶段大致为 1975 年至今, 是分形几何在各个领域的应用取得全面发展, 并形成独立学科的阶段. Mandelbrot 涉猎众多学科, 他善于把各学科联系起来, 从具体的、个别的问题中发现抽象的、一般的共性, 最终产生分形思想. 1975 年, Mandelbrot 将前人的成果进行总结, 集其大成, 以《分形: 形状、机遇和维数》为名发表了他的划时代的专著. 在此专著中, 第一次系统地阐述了分形几何的思想、内容、意义和方法. 此专著的发表标志着分形几何作为一门独立的学科正式诞生, 从而把分形理论推进到一个更为迅猛发展的阶段.

自 1975 年以来, 分形理论无论是在数学基础, 还是在应用方面都得到快速发展. 由于分形几何极强的应用性, 它在物理的相变理论、材料的结构与控制、力学中的断裂与破坏、高分子链的聚合、模式识别、自然图形的模拟、酶的生长等领域取得令人瞩目的成就. 由于应用学科和计算机制图的刺激与推动, 分形的数学理论也得以迅速发展, 并且目的更明确, 思想更深入. 近年来, 在维数的估计与算法, 分形集的生成结构, 分形的随机理论, 动力系统的吸引子理论与分形的局部结构方面已获得较深入的成果. 在此期间, 国际上分形研究方兴未艾, 有关专著纷纷问世, 物理、化学、数学及生物学中的分形论文逐年增加. 1991 年英国培格曼出版社推出了《混沌、孤子和分形》的国际刊物, 1993 年初新加坡世界科学出版社推出了《分形——关于大自然复杂几何的交叉科学杂志》; 同时, 国际专题会议此起彼伏, 特别是在 20 世纪 80 年代中期, 令人感到了雷霆万钧之势, "自然科学中的分形——大自然中复杂几何学的国际学术讨论会" 于 1993 年 8 月 30 日至 9 月 2 日在匈牙利布达佩斯召开. 为此, 有人曾经指出:"20 世纪后半期似乎是科学与数学变得更加专门化的时期. 令人瞩目的是, 在近 20 年中, 非线性动力学与分形使上述趋势得以逆转: 两者均已被应用到对一系列深层次的交叉学科的研究中." 在国内, 分形研究起步较晚, 但进展较快, 目前进入平稳发展期.

今天, 分形理论已经与计算机科学理论等领域相结合, 这种结合使人们对久悬

未解的基本难题的研究取得突破性进展, 在探索、描述及研究客观世界的复杂性方面发挥了巨大作用[4−10]. 其作用涉及几乎整个自然科学和社会科学. 分形已被认为是研究非线性复杂问题最好的一种语言和工具, 并受到各国政府及学者的重视和公认, 成为举世瞩目的学术热点. 1998 年研究几何与混沌的麦克·马伦获菲尔兹奖, 再一次说明了研究分形理论在科学研究中的地位. 我国 "国家攀登计划" 中有关非线性科学、纳米材料科学、生命科学等项目中, 就列举了有关分形理论的五个专题. "国家自然科学基金" 中也列出分形理论及其应用的内容, 并指出这是一项具有跨学科前沿交叉性特点和应用基础性的研究, 具有广阔的应用前景.

分形是人们在自然界和社会实践活动中所遇到的不规则事物的一种数学抽象. 人们对于分形的兴趣是由于可以用它来描述和解决一些实际问题, 正如历史上人们对于欧氏几何与微积分的应用一样, 这种描述和应用允许在一定尺度下的近似性. 同样地, 在利用分形来描述海岸线、云层的边界、地表的形状、岩石的裂缝、流体的湍流, 以及一些经济现象时, 也具有一定意义下近似性. 实际上, 现实世界中没有真正的分形, 正如 Mandelbrot 所强调的那样, 自然界的分形与我们数学中讨论的分形是有区别的.

分形理论的发展是迅猛的, 分形的思想和方法正日益影响着现代社会的生活和活动, 随着分形的广泛应用, 一些新的数学方法和数学工具被不断提出, 所有这些都显示了分形理论的强大生命力.

1.2　分形理论的研究现状

在分形的数学理论所谓的 "纯粹" 分形研究方面, 近年来的主要工作有以下几个方面[7−16].

1) 分形集的构造

主要研究各种经典分形集的构造, 如自相似集的构造、自仿射集的构造, 各种递归集的构造等. 其中, 函数图像的分形集的构造是比较令人感兴趣的一类问题, 构造方法基本上可分为如下三类.

(1) 有解析表达式 (例如, 级数形式), 如著名的 Weierstrass 型函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k(s-2)}\sin(\lambda^k x),$$

其中 $1<s<2$, 且 $\lambda>1$.

(2) 递归产生的函数曲线.

(a) 几何递归, 这方面比较著名的例子有 von Koch 曲线、Minassian-Gaisser 曲线、Peano 曲线等.

(b) 函数递归, 这方面最有代表性的就是分形插值函数 (fractal interpolation functions, FIFs), 关于 FIFs 的理论与应用方面的研究工作已有较多, 但存在的问题仍然不少. 几何递归与函数递归在本质上是相通的, 在一定条件下可以互相转化.

(3) 算术分形用算术方法产生的分形函数分形, 主要是 p-进小数来定义的. 比较著名的例子有 Bush 型函数, van der Waserden 函数是另一种用算术方法产生的无处可微连续函数的例子. 应当指出的是, 用算术方法产生的分形函数在很多情形下是最简单、最优美的无处可微连续函数的例子.

人们已对由复映射 $z \leftarrow z^2 + c$ 所生成的 M 集和 J 集进行了较深入的研究, 发现其中深藏着规律性的结构, 从而大大丰富了分形理论[2−6]. 其中代表性的工作如下.

Lakhtakia 等探讨了复映射 $z \leftarrow z^\alpha + c(\alpha$ 为整数) 的广义 M-J 集的视觉结构特征[17]. 随后, Gujar 和 Bhavsar 先后对 $\alpha \in \mathbf{R}$ 时的广义 M-J 集进行了研究, 并根据广义 M-J 集的视觉结构特点提出了几点假设[18].

Glynn 研究了 $\alpha \in [1.00, 5.00]$ 时广义 M 集的演化, 得出为一对称演化过程[19]. Dhurandhar 等对 $\alpha < 0$ 时的广义 J 集的几何结构进行了理论上的探讨, 给出了 $\alpha < 0$ 时的广义 J 集的嵌套拓扑结构分布定理[20].

作者给出了实数阶广义 M-J 集的嵌套拓扑分布定理和裂变演化规律, 从理论上证明了 Gujar 和 Bhavsar 对广义 M-J 集的结构特征所提出的全部假设, 以及 Glynn 关于广义 M 集演化的观点[21−31].

Pastor 等深入分析和讨论了 M 集诸如卷须上小芽苞的尖点和末梢位置、M 集双曲分支中心的位置、M 集混沌带状区域和 M 集茎花的外部参数等 M 集的外部结构特征[32,33].

Klebanoff、朱伟勇、邓学工等对 M 集和 J 集的结构特征, 包括 M 集的普适常数、其相应填充 J 集的标度不变因子、M 集周期芽苞的 Fibonacci 序列的拓扑不变性等进行了深入分析和研究, 并根据 M 集参数平面上某个吸引周期芽苞中的参数与动力平面上相应 J 集图像结构之间的对应关系给出了 M-J 集周期轨道的递归公式和多重结构特征图的猜想[34−36].

黄永念用代数分析法研究了指数为正整数时复映射 $z_{n+1} = z_n^m + c$ 周期轨道的整体解析特性, 给出了计算任意周期的周期轨道个数的一般公式[37].

陈宁对 M-J 混沌分形图像进行了广泛研究, 提出了复映射 $z \leftarrow z^w + c(w = \alpha + \mathrm{i}\beta)$ 模型及其改造后的多种形式, 将复映射中的指数推广到所有复数, 并指出了该模型所构造的 M 集混沌分形的图像特征、M 集图像上的芽苞序列排列规律, 以及 M 集与 J 集混沌分形图之间的对应规律等, 验证了混沌动力学中简单的规则可能产生复杂的动力学特性[38,39].

李订芳对指数为复数的复动力系统 $z \leftarrow z^w + c(w = \alpha + \mathrm{i}\beta)$ 在构造分形集时因

无法确定符合 M 集定义的迭代初始点 z_0 而无法得到严格意义下的 M 集分形图的问题进行了深入分析, 提出了一种构造由这些多值函数各分支所组成的随机复迭代动力系统的广义 M 集和 J 集的方法, 为研究复动力系统分形图的结构与性质提供了一种新思路[40].

Liwa 对任意单参数复映射在参数平面下所构造广义 M 集图像进行了研究, 通过 Taylor 展开获得了这些单参数复映射的等效映射, 并在此基础上给出了精确计算 M 集边界上各个小芽苞位置、大小和方向的公式[41].

刘向东和刘建生等分别对含参有理函数族 M 集的拓扑不变特性和负整数阶变参数离散动力系统的不动点及其分形集图像进行了研究[42,43].

同时, 人们在构造分形集的动力系统形式的推广上也做了大量工作[44−56].

陈宁等提出了具有 n 周期吸引轨道的 J 分形图分维同胚分形插值算法、具有 D4 对称平面排列的动力系统构造广义 J 集的方法、FRIEZE 群等价映射动力系统构造 J 集的方法等, 极大地丰富了构造分形集的动力系统的形式[57−59].

Lakhtakia 于 1991 年最先提出了开关广义 J 集的构造方法, 给定指数不同的两个复映射, 并引入一个开关变量, 每次迭代后均将当前迭代值与开关变量进行比较来确定下一步迭代所用映射的具体形式[60].

作者将 Lakhtakia 的方法推广到指数为复数的复映射, 构造了复映射 $z \leftarrow z^w + c(w \in \mathbf{C})$ 的开关广义 J 集和 M 集; 在此基础上, 还提出了广义 M 集和 J 组合集的构造方法: 引入一个开关变量, 每次迭代后均将当前迭代值与开关变量进行比较, 来确定下一步是按照构造 M 集的方法进行迭代还是按照构造 J 集的方法进行迭代, 并给出了大量复映射 $z \leftarrow z^w + c(w \in \mathbf{C})$ 的广义 M 集和 J 组合集的实例[61−63].

作者还推广了 Shirriff 所提出的由两个简单复映射的组合构造广义 M 集的方法, 给出了构造广义 J 集的一类简单复映射系, 并基于该复映射系构造了一系列实数阶的广义 J 集, 利用复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学方法, 对广义 J 集的结构和演化进行了详细的分析和讨论[64,65].

Chung 等通过大量实验提出了一种基于非解析映射构造分形集的方法, 并利用具有等变对称性的映射进行迭代生成了一系列具有多种不同颜色对称性的填充 J 集, 证实了该法的有效性[66].

朱志良和焉德军等研究了指数为正整数的非解析复映射 $z_{n+1} = \bar{z}_n^m + c$ 构造广义 M 集的方法, 并给出了计算机实验结果[67,68].

刘树堂等研究了指数为正整数的广义 J 集的辨识控制, 并给出了理论分析和计算机实验结果[69].

2) 分形集的维数刻画

1960 年, Mandelbrot 在研究棉价变化的长期性态时, 发现了价格在大小尺度间的对称性. 同年在研究信号的传输误差时, 发现误差传输与无误差传输在时间上按

Cantor 集排列. 在对尼罗河水位和英国海岸线的数学分析中, 发现类似规律. 他总结自然界中很多现象从标度变换角度表现出的对称性, 将这类集合称为自相似集, 其严格定义可由相似映射给出. 他认为欧氏测度不能刻画这类集的本质, 转向维数的研究, 发现维数是尺度变换下的不变量, 主张用维数来刻画这类集合.

1975 年, Mandelbrot 用法文出版了分形几何第一部著作《分形对象: 形状、机遇和维数》. 1977 年该书再次用英文出版. 它集中了 1975 年以前 Mandelbrot 关于分形几何的主要思想, 将分形定义为 Hausdorff 维数严格大于其拓扑维数的集合, 总结了根据自相似性计算实验维数的方法, 由于相似维数只对严格自相似这一小类集有意义, Hausdorff 维数虽然广泛, 但在很多情形下难以用计算方法求得, 因此分形几何的应用受到局限.

1982 年, Mandelbrot 的新著《自然界的分形几何》出版, 将分形定义为局部以某种方式与整体相似的集, 重新讨论盒维数, 它比 Hausdorff 维数容易计算, 但是稠密可列集盒维数与集所在空间维数相等.

为避免这一缺陷, 1982 年 Tricot 引入填充维数, 1983 年 Grassberger 和 Procaccia 提出根据观测记录的时间数据列直接计算动力系统吸引子维数的算法.

1985 年, Mandelbrot 提出并研究自然界中广泛存在的自仿射集, 它包括自相似集并可通过仿射映射严格定义. 1982 年 Dekking 研究递归集, 这类分形集由迭代过程和嵌入方法生成, 范围更广泛, 但维数研究非常困难. Dekking 获得维数上界. 1989 年, 钟红柳等解决了 Dekking 猜想, 确定了一大类递归集的维数. 随着分形理论的发展和维数计算方法的逐步提出与改进, 1982 年以后, 分形理论逐渐在很多领域得到广泛应用.

在目前情况下, 对分形集的刻画方法仍然主要靠维数, 如 Hausdorff 维数、计盒维数和统计分维等. 不同的维数能在一定程度上在不同侧面反映集合的复杂程度, 包括几何复杂性和统计复杂性等. 但除了对 Hausdorff 维数相关联的 Hausdorff 测度在一定程度上能度量对象的复杂性分布之外, 维数从总体上来说还是一种比较粗糙的刻画工具. 事实上, 两个具有相同维数的集合在几何上可能完全不同. 尽管如此, 对集合的维数刻画 (特别是 Hausdorff 维数刻画) 仍然显得困难重重且进展缓慢, 即使 Weierstrass 函数这样的多重分形集的 Hausdorff 维数至今也只是一个猜测.

值得注意的是, 吴敏金从数学形态学的原理以及热力学 "熵" 的观点出发, 对一类广泛的分形集的形成过程进行了初步刻画, 提出了 "分形信息度量" 的方法, 并引入了 "分形示性数" 的概念. 这方面的工作对分形集的刻画和度量有非常重要的作用[70].

3) 分形集形成的动力学特征刻画

从迭代理论可以看到, 作为吸引子的分形集中的每一点至少对应一个符号序

列. 换句话说, 符号序列的复杂性在局部的意义下刻画了分形集的复杂性状和动力学特征. 因此, 分形几何的这方面研究与代换序列、自动机理论及遍历理论等数学分支的研究是紧密相连的.

在研究分形集的动力学特征刻画方面, 由 Hutchinson 和 Barnsley 等开创的迭代函数系 (iterated function system, IFS) 理论是十分重要的研究工具[6,71].

4) 分形构造的逆问题

分形构造的逆问题是分形几何研究中十分重要的一个方面. 而关于 IFS 构造的逆问题研究则是这方面最主要的内容. Barnsley 和 Demko 最早进行了用 IFS 不变测度逼近目标测度的研究工作[72]; 此后, Bessis、Handy、Mantica 等也在该领域做了部分研究工作[73,74]; 加拿大 Waterloo 大学应用数学系的 Vrscay 和意大利 Verona 大学的 Forte 等对基于 IFS 的分形逆问题构造理论和应用进行了一系列深入的研究工作, 获得了若干很有意义的结果[75,76].

5) 多重分形

在不规则分形的简单分维的测定中人们经常利用盒计数法. 但这个方法有不够细致的地方, 因为它认为, 只要盒内有图形的像素, 这个盒子就被计数进来, 而不考虑盒子内像素的多少, 这样得到的分维就必然失去很多信息. 多重分形考虑盒子内像素数和其他物理量的差别, 归一化后得到一个概率分布的集, 再用一个多重分形谱进行描述, 得到的结果包含了许多被简单分形忽略的信息. 多重分形也可以分为规则多重分形和不规则多重分形. 规则多重分形可以用解析方法或统计物理的方法得到它们的多重分形谱, 不规则多重分形谱只能用统计物理的方法得到. 在这方面, Spanos 和国内学者孙霞等做了深入的研究[12,77].

1.3 分形应用的若干研究领域

分形几何的应用研究比理论研究更为引人注目, 很难再有另外一门学科能在这么短的时间内渗透到如此多的学科中并产生重要的影响. 一般来说, 分形几何的应用性研究包含以下六个方面.

1) 在图像、数据压缩方面的研究

分形理论在图像、数据压缩技术中发挥了重要作用. 目前, 分形图像编码以其新颖的思想、高压缩比、分辨率无关性等优点受到技术界广泛关注, 是目前公认的三种最有前途的新一代图像编码技术之一. Barnsley(1993), Collage(1988) 等应用迭代函数系统编码在分形信息压缩方面做了有益的尝试. 20 世纪 80 年代末期, 美国数学家 Barnsley 及其研究小组公布了利用图像本身的复杂性中包含的自相似性进行压缩编码的新方法. 这是一种图像编码的全新思想, 其数学原理是, 一幅图像用使图像近似不变的压缩仿射变换的量化参数来表达, 只需储存压缩变换的量化参数

而不是整幅图像, 而存储仿射变换量化参数的比特数大大低于储存原始图像的比特数, 因此实现了图像数据的高倍压缩. Barnsley 和 Sloan 在一篇文章中令人惊讶地宣称, 利用他们的方法对静止图像压缩可获得高达 10000:1 的压缩比. 这在从事图像压缩的人群中引起了极大的轰动[6,78,79].

在具体寻求压缩变换的方式上, 目前有两种方法, 一种 Barnsley 方法, 另一种是 Jacquin 方法. Barnsley 方法的编码时间太长, 需要人机交互, 对操作者有较高要求. 因此, Jacquin 方法受到更多的关注. Jacquin 的压缩算法也存在缺陷: 一是压缩字典小; 二是压缩字典是变化的[79,80]. Fisher 等曾对 Jacquin 的算法做了一些改进[81].

国内学者何传江提出了带控制参数的渐近不动点定理. 基于这个定理, 实现了对分形解码过程的控制, 并且在不需要另外的特殊编码器和解码器的情况下, 成功实现渐近分形解码[82,83]. 赵德平利用 M 集和 J 集作为压缩字典的来源, 建立了常用压缩编码字典, 算法实现简单可行, 压缩效果较好[84,85]. 最近, Kazumasa 利用两种模式间的双自相似性可以对两幅图像进行同时编码, 这给分形几何理论的应用带来了新的方法[86].

分形图像压缩编码方法适用于二值图和灰度 (彩色) 图像, 其理论基础是迭代函数系理论. 从目前的实际情况来看, 分形图像压缩的效果远非像 Barnsley 等所宣称的那样令人满意. 事实上, 在分形图像压缩的理论研究方面还存在着不少问题, 但作为一种新的图像编码框架, 其前景十分光明的[87−97]. 以下三点是这一论断的旁证.

(1) 1992 年, 全球最大的软件开发商 Microsoft 公司运用分形技术推出了一套多媒体百科全书 Encarta, 在一张光盘上仅用 600 兆字节的内容, 就存储了大量的文字数据和长达 7 小时的声像资料、100 部动画片、800 张彩色地图和 7000 幅逼真的风景照片. 在这张光盘的研制中正是采用了分形图像压缩技术. 由于该技术以分形几何中 IFS 理论为基础, 采用了与常规技术不同的思路, 因而达到了很好的压缩效果. 目前, 这一技术引起了各方面学者的浓厚兴趣与不断研究, 显示出广阔的发展前景, 令人刮目相看.

(2) 1996 年 3 月 17 日到 20 日,Iterated System, Inc. 在公司的所在地美国的亚特兰大市召开了一个 "分形图像压缩技术专题研讨会", 美国副总统亲临会场祝贺, 以示政府对该技术的关注.

(3) 在国际互联网 (Internet) 上, 通过浏览器可以截取到许多关于分形图像压缩技术的资料和文献, 这说明分形图像压缩技术是目前国际上十分活跃的研究领域之一.

2) 分形在实验数学中的应用

用计算机生成各种分形图像, 不仅展现了数学的内在美, 同时也使得一些新的