21世纪高等院校公共基础课精品教材

Yingyong shuxue

应用数学

主审◎高全德

主编◎陈更新　陈雪　王宁

电子科技大学出版社

二十一世纪高等院校公共基础课精品教材

应用数学

主　审　高全德

主　编　陈更新　陈　雪　王　宁

副主编　李淑玲　陈珠社　闫佩玉　李　琦

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/陈更新,陈雪,王宁主编. —成都:电子科技大学出版社,2011.1

ISBN 978-7-5647-0740-8

Ⅰ.①应… Ⅱ.①陈… ②陈… ③王… Ⅲ.①应用数学 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 013180 号

应用数学

陈更新　陈　雪　王　宁　主　编

出　　版	电子科技大学出版社(成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编:610051)
策划编辑	张　鹏
责任编辑	张　鹏
主　　页	www.uestcp.com.cn
电子邮箱	uestcp@uestcp.com.cn
发　　行	新华书店经销
印　　刷	北京华创印务有限公司
成品尺寸	185mm×230mm　　印张　15　字数　387 千字
版　　次	2011 年 1 月第一版
印　　次	2011 年 1 月第一次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5647-0740-8
定　　价	30.00 元

前 言

本教材在编写过程中，作者结合多年从事数学教学的体会，以“强化基础、深化概念、加强计算、注重应用”为目的，以“必需、适度、够用、实际”为尺度，在内容的编排上与初等数学紧密衔接，深入浅出、难点分散、论述简明、易于教、便于学习. 概念和结论的引入由具体到抽象、由特殊到一般，减少了大量定理的证明推导过程，力求通俗易懂；在概念讲清楚的基础上，对计算能力的要求有所减弱，为此引入软件计算来弥补这方面的问题，从而使得学生可以把主要的精力放在“概念明确，结论应用”上；本书还特别注意与已往知识的衔接问题，使得对于基础不好的学生也完全有能.

本教材具有以下特色.

1. 思想性强、思路新. 本教材注重数学的思想方法. 例如：在一元函数的积分中，先由实例引入不定积分和定积分的概念、性质、基本积分公式，使不定积分和定积分联系得更加紧密，解题更加自如.

2. 目的明确、切合实际. 本教材以“掌握概念、强化应用、培养技能”为编写指南，充分体现以应用为目的、以必需和够用为尺度的高职高专教学基本原则，理论描述简练，讲解明晰易懂，兼顾各专业后续课程教学对数学知识的需求，充分考虑到学生持续发展的需要.

3. 与初等数学衔接紧密. 注重运用学生对已有数学知识中的函数及图形的认识，引入新概念，进行直观演示解说，利于学生对初等数学的复习回顾和顺利地学好本教材的内容.

4. 基本概念、基本定理表述贴切精练. “高度的抽象性”是数学科学不同于其他科学最典型的特征之一，学生学习数学需要思想活、思路宽.

5. 结合实际、探索应用. 为了提高学生应用数学知识解决实际问题的能力，本教材选用了一些应用方面的例题和习题，以提高学生的数学应用意识.

6. 对不同层次的学生要求有度、期预有望. 本教材本着够用为尺度的编写原则，同时考虑到有些专业的特殊需求，适当地增加一些内容. 在每节后面附有习题，使学生可以加强巩固所学知识. 为了适应一部分基础较好的学生拓展知识面的需要，在每章后编入一定数量的、具有一定难度的复习题以供选用.

本书在编写过程中，得到了有关方面的大力支持，在此一并感谢！

由于编者水平有限，本书中还有很多不足之处，诚恳地希望读者批评指正！

编　者

2010 年 12 月于大学城

目　录

第一章　命题逻辑

正确地使用逻辑用语是现代社会公民应该具备的基本素质.无论是进行思考、交流,还是从事各项工作,都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思想.在本模块中,学生将在义务教育阶段的基础上,学习常用逻辑用语,体会逻辑用语在表述和论证中的作用,利用这些逻辑用语准确地表达数学内容,更好地进行交流.

第一节　命　　题

表述客观世界的各种现象,表述人们的思想,表述各门学科的规则、理论等,除使用自然语言(这常常是带有歧异性的)外,还要使用一些特定的术语、符号、规律等"对象语言",这些是所研究学科的一种特殊的形式化语言,研究思维结构与规律的逻辑学也有其对象语言.本章就是讨论逻辑学中的对象语言——命题及其演算,它相当于自然语言中的语句.

一、命题的基本概念

首先我们从下面的例子加以分析:

例 1　人总是要死的.

例 2　苏格拉底是人.

例 3　苏格拉底是要死的.

例 4　中国人民是勤劳和勇敢的.

例 5　鲸鱼是鱼.

例 6　8 是质(素)数.

例 7　今天下雨.

例 8　公元两千一百年会出现生物计算机.

例 9　火星上有生命.

例 10　小明喜欢读书也喜欢运动.

例 11　小明在机房里或者在图书馆里.

例 12　电灯不亮是灯泡或电线有毛病,或者是停电所致.

例 13　如果 a 和 b 都是正数,则 ab 也是正数.

例 14　$xy > 0$ 当且仅当 x 和 y 都大于零.

例 15　$101 + 1 = 110$.

例 16　天气多好啊?

例 17　小张走了吗?

例 18　全体卧倒!

例 19　帮帮李四吧!

例 20　$x = 0$.

例 21　我正在说谎.

上述例 $1 \sim 4$,例 $12 \sim 13$ 是可以判断为对(真,成立)的陈述句,例 5,6,14 是能够判断为不对(假,不成立)的陈述句,例 $8 \sim 9$ 在人类历史发展的长河中能够判断它是真或是假的陈述句,例 $10 \sim 11$ 根据小明当时的情况能够判断出是真或是假的陈述句,例 15 在二进制计算中为真,在十进制计算中为假,也还是可以判断为真或为假的陈述句,例 16 是感叹句,例 17 是疑问句,例 18 是命令句,例 19 是祈使句,例 20 中 x 是一个未知数(变量),无法判断是真还是假,例 21 是无法判断真假的悖论. 从以上的分析可以看出,表达思想的语句有不同的类别,数理逻辑中研究的是出现较多而又比较规范的语句——可以判断出真或假的陈述句.

定义 1　凡是能判断是真或是假的陈述句称为**命题**;真或假称为**命题的真值**;命题的真值为真就称为**真命题**;命题的真值为假就称为**假命题**.

简单地说,对的就是真,错的就是假. 如前面的例 $1 \sim 15$ 都是命题,例 $16 \sim 21$ 都不是命题. 命题的值为真或假,今后约定用 1 表示真,0 表示假.(命题的真假也可以用 T、F 表示,本书统一用 1、0 表示.)

为了推导的方便,一般命题都用除 T 和 F 以外的英文字母表示. 如 A:M8085 芯片有 40 条引线. A 称为命题"M8085 芯片有 40 条引线"的标识符. 当命题标识符代表一个确定的命题时(如 A,A:人总是要死的),称为**命题常元**,当命题标识符代表非确指的命题时,称这样的命题标识符为**命题变元**.

注意：命题变元不是命题，只有对命题变元用一个确定的命题代入后，才能确定其真值是 1 还是 0.

定义 2　用一个确定的命题代入一个命题标识符(如 A)，称为对 A 进行**指派(赋值或解释)**.

再看前面的例 1 ~ 6，这些命题不能再分解为更简单的，能判断其真值为 1 或 0 的陈述句，这类命题称为**原子命题**(简单句). 在例 7 中，如果表示今天下雨为原子命题 A，则今天没有下雨是 A 的否定；例 10 可分解为原子命题 A：小明喜欢读书，B：小明喜欢运动，用联结词(关联词)"也" 联结起来，例 11 可分解为原子命题 A：小明在机房里，B：小明在图书馆里，用联结词"或者" 联系起来；例 13 可分解为原子命题 A：a 是正数，B：b 是正数，R：ab 是正数，用联结词"和" 与"如果 …，则 …" 联系起来；例 14 可分解为原子命题 A：$xy > 0$，B：$x > 0$，R：$y > 0$，用联结词"当且仅当" 与"都" 联系起来，这类用联结词，标点符号和原子命题构成的命题称为**复合命题**(复合句).

二、逻辑联结词

日常生活、工作和学习中，自然语言里我们常常使用下面的一些联结词，例如：非，不，没有，无，并非，并不等等来表示否定；并且，同时，以及，而(且)，不但 … 而且 …，既 … 又 …，尽管 … 仍然，和，也，同，与等来表示同时；虽然 … 也 …，可能 … 可能 …，或许 … 或许 …，等和"或(者)" 的意义一样；若 … 则 …；当 … 则 … 与"如果 … 那么 …" 的意义相同；充分必要，等同，一样，相同与"当且仅当" 的意义一样. 即是说在自然语言中，这些逻辑联结词的作用一般是同义的. 在数理逻辑中将这些同义的联结词也统一用符号表示，以便书写、推演和讨论. 现定义常用联结词如下：

定义 3　在命题 A 的适当地方插入"不" 或者"没有" 产生的新命题称为 A 的**否定**，记为 $\neg A$ 读成"非 A".

$\neg A$ 的取值依赖于 A 的取值，即定义运算表为：

命题	A	$\neg A$
真值	0	1
	1	0

非真即假；非假即真

例如 A：2 是一个质数(值为 1)，

$\neg A$：2 不是一个质数(值为 0) 或 2 是一个合数.

注意：

1. 不同的陈述句可能确定同一个命题；

2. 否定是一个一元运算.

定义 4　两个命题 A 和 B 产生的一个新命题记为 $A \wedge B$，读成"A 与 B"或"A 和 B 的合取". 合取的运算表为：

命题	A	B	$A \wedge B$
真值	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

只有两个都真才真

如例 10，A：小明喜欢读书，B：小明喜欢运动，A 和 B 的合取为 $A \wedge B$：小明喜欢读书也喜欢运动；又如 A：猫吃鱼，B：$2+2=0$，则 $A \wedge B$：猫吃鱼而且 $2+2=0$.

注意：1. 数理逻辑中的联结词"合取"只考虑命题之间的形式关系，不考虑命题内容的实际含义，只有在研究取值时才加以考虑；

2. 合取是一个二元运算.

定义 5　两个命题 A 或 B 产生一个新命题，记为 $A \vee B$，读成"A **析取** B"，析取的运算表为：

命题	A	B	$A \vee B$
真值	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

只有两个都错才错

如例 11，A：小明在机房里，B：小明在图书馆里，$A \vee B$：小明在机房或图书馆里；又如 A：他是游泳冠军，B：他是百米赛跑冠军，$A \vee B$：他是游泳冠军或百米赛跑冠军；A：猫吃鱼，B：$2+2=0$，$A \vee B$：猫吃鱼或者 $2+2=0$.

注意：1. 析取可细分为两种，一种是"不可兼或"如前面例 11；另一种是"可兼或"就是两种情况可以同时发生，如例 10. 有的将"不可兼或"就是不可能同时发生，记为"$\overline{\vee}$"；可兼或记为"$\vee$". 显然"$\vee$"包含"$\overline{\vee}$"为其特殊情况. 故我们着重考虑"$\vee$"的情形.

2. 在自然语言或形式逻辑中，用来析取联结的对象往往要求属于同一类事物，但是在数理逻辑中不做这种限制，例如 $A \vee B$：猫吃鱼或者 $2+2=0$ 是允许存在的命题.

3. 析取是一个二元运算.

定义 6　设 A，B 是两个命题，“若 A 则 B”是一个新命题，记为 $A \to B$，读成 A 推出 B（或 B 是 A 的必要条件，A 是 B 的充分条件），A 称为**条件式**，也称**蕴含式**联结词“→”的前件，B 为“→”的后件.

如 A：河水泛滥，B：周围的庄稼被毁. $A \to B$：若河水泛滥，则周围的庄稼被毁；A：$2<3$，B：今天阳光明媚. $A \to B$：若 $2<3$，则今天阳光明媚.

条件联结词的运算表为：

命题	A	B	$A \to B$
真值	0	0	1
	0	1	1
	1	0	0
	1	1	1

只有前件对并且后件错才错

注意：1. 条件联结词联结的前件与后件不限定于同一类事物. 这种表述方式生活中经常这样出现。如：“如果太阳从西方升起，我就请你吃饭.”，其实说话人表达的是说我是不会请你吃饭的.

2. 从真值表定义可知，前件取假值时无论后件的取值是真还是假，条件联结词产生的新命题都取为真，即采取的是“善意的推定”.

3. 条件联结词为一个二元运算.

定义 7　设 A，B 是两个命题，“A 当且仅当 B”是一个新命题，记为 $A \leftrightarrow B$，“↔”称为**双条件**，又称为**等价式**. 它的运算表为：

命题	A	B	$A \leftrightarrow B$
真值	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

只有相同才真

双条件是数学上考虑最多，也是大家比较熟悉的，可以举出许多例子. 例如，例 14 是

“原子命题 $xy>0$ 及命题 x 和 y 都大于零”用双条件联结词产生的命题，这个命题取值为 0. 又如，我没有收到信当且仅当没有人给我写信，它的值为 1. 约定在整数范围内讨论，$A:2+2=0$，B：$IBM-PC$ 是一种微型计算机，$A\leftrightarrow B:2+2=0$ 当且仅当 $IBM-PC$ 是一种微型计算机，此命题取值为 0.

注意：

1. 双条件联结词联系的命题不限定属于同一类事物；
2. 双条件是一个二元运算.

这五种逻辑联结词也可以称为逻辑运算，与一般数的运算一样，可以规定运算的优先级，我们规定的优先级顺序依次为 $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$. 如果出现的逻辑联结词相同，又没有括号时，从左到右顺序运算. 如果遇到有括号时就先进行括号中的运算.

考察例 12. 令 A：电灯亮，B：灯泡有毛病，R：电线有毛病，S：停电. 则可将该语句符号化为 $B\vee R\vee S\rightarrow\neg A$.

习题 1.1

1. 判断下列各语句是否为命题，若是命题请指出是简单命题还是复合命题.

(1) $\sqrt{5}$ 是无理数.

(2) 7 能被 2 整除.

(3) 什么时候开会呀？

(4) $2x+3<5$.

(5) 这朵白云多美啊！

(6) 3 是质数当且仅当四边形内角和为 2π.

(7) 2008 年 7 月 1 日天气晴好.

(8) 火星上有生物.

(9) 请关上门.

(10) 4 是 2 的倍数或是 3 的倍数.

(11) 6 是偶数.

(12) 蓝色和黄色可以调配成绿色.

2. 将下列命题符号化.

(1) 我一边看书一边听音乐.

(2) 天下雨了，我不去上街.

(3) 下雨当且仅当有云.

(4) 除非你努力,否则你就会失败.

(5) 合肥到北京的列车是中午十二点半或下午五点五十分开.

(6) 优秀学生应做到思想身体学习都好.

3. 判断下列命题的真值.

(1) 若 $2+2=4$,则 $3+3=6$;

(2) 若 $2+2=4$,则 $3+3\neq6$;

(3) 若 $2+2=5$,则 $3+3=6$;

(4) 若 $2+2=5$,则 $3+3\neq6$;

(5)$2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$;

(6)$2+2=4$ 当且仅当 $3+3\neq6$;

(7)$2+2\neq4$ 当且仅当 $3+3=6$;

(8)$2+2\neq4$ 当且仅当 $3+3\neq6$.

4. 将下列语句符号化.

(1) 占据空间的,有质量而且不断变化的称之为物质.

(2) 占据空间的,有质量者称为物质,而物质是不断变化的.

(3) 如果你来了,那么他唱歌与否要看你是否伴奏而定.

(4) 我们不能既划船又跑步.

5. 下列哪个命题是真命题?

(1) 如果 $2+5=6$,则太阳从东方升起.

(2) 严禁吸烟.

(3) 如果 $2+3=5$,则太阳从西方升起.

(4) 我正在说谎.

6. 下列语句是命题的是哪些?

(1)$1+1=10$.

(2)$x+y=10$.

(3)$\sin x+\sin y<0$.

(4)$x \bmod 3=21$.

7. 设 P 表示"我去镇上",Q 表示"明天我有时间",则命题"只有当明天我有时间,我才去镇上。"符号化为什么?

8. 设 P 表示"天下雨",Q 表示"我骑自行车上班",则命题"除非下雨,否则我骑自行车上班".符号化为什么?

第二节　命题公式与公式的运算

由命题变元、括号、逻辑联结词形成的有意义的符号串是我们讨论的对象.

一、命题演算公式

定义 1　由命题变元,逻辑联结词和括号构成的下述表达式称为命题合式公式或**命题演算公式**,简称**公式**:

(1) 单个原子命题变元是公式;

(2) 若 P,Q 是公式,则 $(\neg P)$,$(P \wedge Q)$,$(P \vee Q)$,$(P \rightarrow Q)$,$(P \leftrightarrow Q)$ 都是公式;

(3) 只有有限次使用(1),(2) 得到的表达式才是公式.

为了书写和输入计算机,以及进行运算方便起见,规定:(1)$(\neg P)$ 的括号,整个公式的最外层括号可以省略,(2) 已定好逻辑联结词的优先级后,优先级的括号可省略.

$\neg(P \wedge Q)$,$P \vee \neg Q$,$P \rightarrow (P \vee Q)$,$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$,$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow R)$ 等都是公式,但 $RS \rightarrow T$,$\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 就不是公式,因为前一表达式 R,S 之间没有逻辑联结词,后一表达式中括号不配对,故不符合定义 1.

定义 2　令 A 为公式,对 A 中出现的全部原子命题变元 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别赋以真值 0 或 1 所得到的一组真值(n 个)称为 A 的一个**指派**或**解释**. 在命题公式中,对于分量指派的各种可能组合,即确定了该命题的各种真值情况,把它汇列成表格,就是命题的**真值表**.

任意给定一个复合命题后,用原子命题和逻辑联结词表出,再利用真值表就可以计算出复合命题的值. 当复合命题用原子命题变元、逻辑联结词和括号组成时,可以得出该复合命题变元的真值表.

下面看几个例子.

例 1　求 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 的真值表.

解

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

例 2　求 $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ 的真值表.

解

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \wedge A$	$(A \to B) \wedge A \to B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

例 3　求$(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)$的真值表。

解

A	B	$A \to B$	$A \wedge \neg B$	$(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

二、公式的类型

我们注意到例 2,3 和例 1. 对命题变元无论作什么样的指派,例 2 中的公式永远取值为 1,这种类型的公式称为永真(重言)式;例 3 中的公式永远取值为 0,这种类型的公式称为矛盾(永假)式;而例 1 中的公式则对有的指派取值为 1,对另外指派又取值为 0,这种类型的公式称为可满足公式. 显然**永真式**(或永真函数)是可满足公式,矛盾式是不可满足公式.

定义 3　对公式的命题变元无论作什么指派,公式均取值 1 时,称之为**永真式**;公式均取值 0 时,称之为**矛盾式**(或不可满足式). 若有指派使公式取值 1,则称该公式为**可满足公式**.

定理 1　任意两个永真(矛盾)式的合取或析取仍然是一个永真(矛盾)式.

由定义 3 及析取、合取的真值表立即可以证明此定理.

注意:永真式有很重要的应用价值,因为对于一个永真式来说它总是对的,总是对的东西往往被称为真理,真理是要人们信奉的,也就是说我们要按照真理的指示去做事. 下面我们就来看看如何利用永真式这一工具来找到真理.

定义 4　设 A,B 为两个公式,其中 A_1,A_2,$\cdots$,A_n 为出现在两个公式 A,B 中的原子命题变元. 如果对 A_1,A_2,$\cdots$,A_n 的任意真值指派,A 和 B 的真值都相同,则称 A 和 B 逻辑相

等或说 A 和 B 等价，记为 $A \Leftrightarrow B$ 或($A = B$). 换句话说就是 $A \leftrightarrow B$ 是永真式，那么 A 和 B 等价.

例如：$\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$，用真值表和定义 3 可以得到下列基本等价式：

(1)$\neg\neg P \Leftrightarrow P$（双重否定律）

(2)$P \vee P \Leftrightarrow P, P \wedge P \Leftrightarrow P$（幂等律）

(3)$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P, P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$（交换律）

(4)$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R, P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$（结合律）

(5)$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R), P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$（分配律）

(6)$P \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow P, P \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow P$（吸收律）

(7)$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q, \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$（德 · 摩根律）

(8)$P \vee 0 \Leftrightarrow P, P \wedge 1 \Leftrightarrow P$（同一律）

(9)$P \vee 1 \Leftrightarrow 1, P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$（零一律）

(10)$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1, P \wedge \neg P \Leftrightarrow 0$（否定律）

(11)$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$（蕴含等价式）

(12)$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$（双条件等价式）

这 12 个公式大家应该熟记，比如分配律大家可以和我们熟知的 $3 \times (4 + 2) = 3 \times 4 + 3 \times 2$ 类比的来记. 其他的公式请你自己总结规律并记住. 当公式中出现的原子命题变元很多时，用真值表和定义 3 来判断两个公式是否等价就显得麻烦，因而可利用上述基本等价式和下面的定理 2 就可以得到一些复杂的等价式. 下面的定理有点像是我们学习代数中的恒等代换.

定义 5　若公式 X 是公式 A 的子串，则称 X 为 A 的子公式.

定理 2　X 是公式 A 的一个子公式，公式 Y 与 X 等价，则将 A 中的 X 用 Y 来代替所得的公式 B，必有 A 与 B 等价(替换规则).

证　因为在命题变元的任意指派下 X 与 Y 的真值相同，故用 Y 代替 X 后所得的公式 B 与 A 在任意相应的指派下也有相同的真值，故 A 与 B 等价.

例 4　由吸收律和替换规则可知

$Q \rightarrow (P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q \rightarrow P$

例 5　证明：$((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow ((R \rightarrow P) \rightarrow (S \rightarrow P)) \Leftrightarrow 1$.

证

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow ((R \rightarrow P) \rightarrow (S \rightarrow P))$$
$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow ((\neg R \vee P) \rightarrow (\neg S \vee P))$$