高等教育公共基础课教材

高等数学

下册

GAODENG SHUXUE

主编 易正俊 张万雄 代 鸿
主审 穆春来

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

高等数学

（下册）

主　编　易正俊　张万雄　代　鸿
主　审　穆春来

重庆大学出版社

内容提要

本书的编写以培养学生的创新思维和应用能力为指导思想.全书取材着眼于微积分中的基本概念、基本原理、基本方法及应用,强调直观性,注重可读性.内容处理新颖,覆盖面广,深入浅出,突出数学思想和数学方法,重在应用和数学建模,淡化各种运算技巧,注重把学生培养成为极具竞争优势的创新型人才,体现了国内外在教材改革方面的最新进展.

本书分为上下两册.上册内容包括极限论,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分和定积分的应用;下册内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,级数和微分方程.

本书可作为高等学校非数学专业,尤其是理工类各专业高等数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/易正俊,张万雄,代鸿主编.—重庆:重庆大学出版社,2011.11(2013.1 重印)
ISBN 978-7-5624-6421-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①易…②张…③代… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 230658 号

高等数学
(下册)
主 编 易正俊 张万雄 代 鸿
主 审 穆春来
策划编辑:曾显跃
责任编辑:文 鹏 版式设计:曾显跃
责任校对:邬小梅 责任印制:赵 晟
*
重庆大学出版社出版发行
出版人:邓晓益
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号
邮编:401331
电话:(023) 88617183 88617185(中小学)
传真:(023) 88617186 88617166
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)
全国新华书店经销
自贡兴华印务有限公司印刷
*
开本:787×1092 1/16 印张:19.5 字数:487 千
2011 年 11 月第 1 版 2013 年 1 月第 2 次印刷
印数:5 001—9 000
ISBN 978-7-5624-6421-1 定价:36.00 元

前言

本教材以经典微积分为主要内容，目的是训练学生的数学思想和数学方法以及如何从已知世界去探索未知世界，把未知的问题转化为已知的问题进行求解. 多数专业课程的学习都以高等数学为基础，很多实际问题都可归结为数学建模和相应的求解问题. 因此，高等数学为学生的后续课程的学习和科技创新带来重要的价值，成为高校工科、理科专业及经济管理专业的一门重要必修基础课程.

《高等数学》教材在国内已有很多的版本，其内容和体系已经相当成熟. 但由于社会在进步，学科在发展，对高等数学的教学提出了更高的要求. 重庆大学主管教学的各级领导为达到"研究学术，造就人才，佑启乡邦，振导社会"的目的，从学生出发，一切为了学生，强调"以培养创新精神和应用能力为核心"的指导思想，把学生培养成为极具竞争优势的创新型人才，对教材建设的每一个环节提出了更高的要求.

本教材由重庆大学数学与统计学院具有丰富教学经验的一线教师编写，参考了国内外有关教材，博采众家之长，注重培养学生的创新思维，力争为后续课程的学习奠定扎实的理论基础和应用基础. 本教材的特色主要表现在以下 5 个方面：

①充分强调了高等数学基础理论的重要地位，所有基本概念与基本理论尽可能从研究背景引入，选取的是学生熟悉的背景知识，图文并茂，旨在培养学生的创新思维，点燃学生的求知欲.

②突出数学思想和数学方法，淡化各种运算技巧. 内容处理新颖，对高等数学教材的内容进行大幅度的调整，主要是依据教材内容的逻辑体系和学生的可接受性，将学生掌握难度较大的基本理论处理成若干个学生易于接受的部分，增加教材的可读性.

③例题的选取经过仔细筛选，每个例题都为后面的例题或习题埋下伏笔，顺序由易到难，渗透数学建模思想和数学在工程技术中的应用实例. 旨在培养学生提出问题，分析问题，解决问题的能力.

④重视反例在学生理解和掌握基本概念和基本理论中的重要作用，对读者易误解的概念和理论进行注释.

⑤习题的设置依据学生不同的层次和不同的要求分为 A 组和 B 组. A 组是基础知识训练；B 组是能力提升，对学生的创新思维进行训练.

本教材为高等数学下册，包括 6 章. 由易正俊教授组织

参编人员进行多次讨论，合理确定了教材的内容体系和框架，由易正俊、张万雄、代鸿担任主编．第7章由张良才和刘琼芳编写，第8章由彭智军编写，第9章由胥斌和肖志祥编写，第10章由张万雄编写，第11章由党庆一和易正俊编写，第12章由代鸿编写，易正君负责对教材中所需的文献进行采集和书稿的校对．

本教材由重庆大学数学与统计学院教学院长、博士生导师穆春来教授审定．

本教材的出版得到重庆大学教务处、重庆大学数学与统计学院、重庆市教委和重庆大学出版社的大力支持，我们表示衷心的感谢．

由于时间较紧，加之编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请广大同行、读者批评指正．

编　者

2011年9月

目 录

第 7 章 向量代数与空间解析几何

空间解析几何是通过点与坐标的对应,把抽象的数与空间的点统一起来,从而使得人们可以用代数的方法研究几何问题,也可以用几何的方法解决代数问题.本章首先介绍向量及其代数运算,然后以向量为工具研究空间的直线与平面,最后讨论空间曲面与曲线的一般方程和特点.

7.1 向量及其运算

7.1.1 向量的基本概念

在自然界中经常会遇到两种量,一种是只有大小没有方向的量,称为数量,如年龄、身高、体温等.另一种量是既有大小又有方向的量,称为向量,如速度、力、位移等.向量可以用粗体英文字母表示,如$\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$;也可用字母上加箭头来表示,如$\vec{a},\vec{r},\vec{v},\vec{F}$.

向量的几何表示是用一条带有方向的线段(称为有向线段)来表示,如图 7.1 所示.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以M_1为起点,M_2为终点的向量记为$\overrightarrow{M_1M_2}$.

向量的大小称为向量的模,记为$|\boldsymbol{a}|$,$|\vec{a}|$,$|\overrightarrow{M_1M_2}|$.模为 1 的向量称为单位向量.模为 0 的向量称为零向量,记作$\mathbf{0}$或$\vec{0}$.零向量的起点与终点重合,它的方向可以看作是任意的.

如果两个向量的模相等、方向相同,则称这两个向量相等.我们在高等数学里所讲的向量

图 7.1

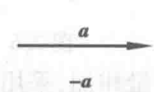

图 7.2

是与起点无关的向量,这种向量称为自由向量.

如果两个向量模相等,方向相反,则这两个向量互为负向量,如图 7.2 所示.

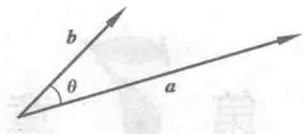

图 7.3

如果两个非零向量的方向相同或相反,则称这两个向量平行(或称两向量共线),记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 或 $\vec{a}/\!/\vec{b}$. 规定:零向量与任何向量都平行.

把两个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所形成的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为两向量的夹角(如图 7.3 所示),记为:$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. 若两向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 平行,则这两个向量的夹角 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$ 或 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi$.

7.1.2 向量的运算

(1)向量的加法

定义 1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 平移向量 $\boldsymbol{b}$ 使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

上述定义也称为向量加法的三角形法则,如图 7.4 所示. 向量三角形法则可以推广到多个向量相加的情形,即:求向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和,就是把这 n 个向量首尾相连,从第一个向量的起点到最后一个向量的终点所构成的向量就是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i$,如图 7.5 所示的 $\boldsymbol{s}$ 就表示 $\sum\limits_{i=1}^{5}\boldsymbol{a}_i$.

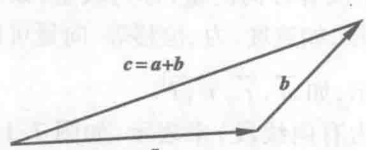

图 7.4

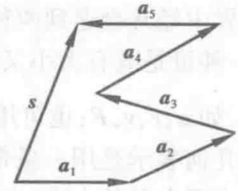

图 7.5

定义 2 设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 平移向量使得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,从公共起点到对角顶点的向量就等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 7.6 所示.

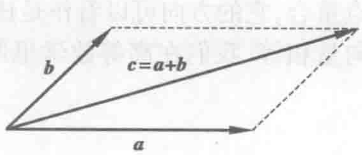

图 7.6

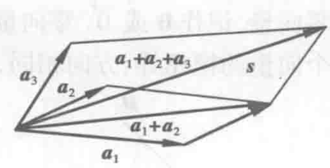

图 7.7

对于多个向量相加,采用向量的平行四边形加法法则是先把两个向量相加,再与第三个向量相加,依次类推. 如图 7.7 所示的 $\boldsymbol{s}$ 就表示 $\sum\limits_{i=1}^{3}\boldsymbol{a}_i$.

共线的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和规定为：

①若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，其和向量的方向就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的共同方向，其模为 $\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{b}$ 的模之和.

②若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，其和向量的方向就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中模较长向量的方向，其模为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

(2)向量的减法

定义 3　规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{c}$ 为

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

上式表明，把向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上，便得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 7.8 所示. 特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

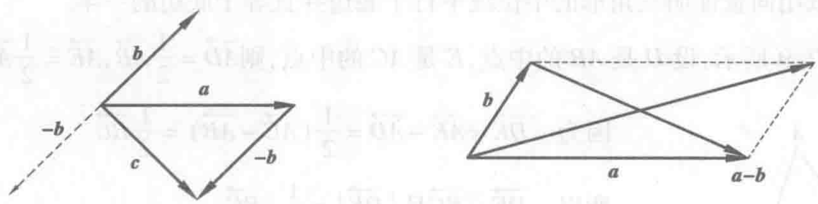

图 7.8

从图 7.8 所示可以看出：平移向量使得两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，从 $\boldsymbol{b}$ 向量的终点指向 $\boldsymbol{a}$ 向量的终点构成的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

(3)向量的数乘

定义 4　设 λ 是一个实数，$\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模和方向规定如下：

①$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$.

②当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

定理 1　两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$）.

证　①若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量.

必要性：因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，取 $|\lambda| = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则

$$|\boldsymbol{b}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，λ 取正，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，λ 取负，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

充分性：若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，$(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=0$；当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，$(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\pi$.

根据两向量平行的定义可知：$(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=0$ 或 $(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\pi$，得出 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

②若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两个向量至少有一个是零向量，结论显然成立，只是在 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}=0$ 时，结论相应地写成 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

有了向量的数乘概念以后，任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 还可以表示为

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$$

其中，$\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 于是

$$a^0=\frac{a}{|a|}$$

(4)向量线性运算规律

假设下述所涉及的向量都是同维的,所涉及的数都是同一个数域的,则下述规律成立.

①向量的加法.

交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

②数与向量的乘法.

结合律: $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 7.1　试用向量证明三角形的中位线平行于底边并且等于底边的一半.

证　如图 7.9 所示,设 D 是 AB 的中点,E 是 AC 的中点,则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

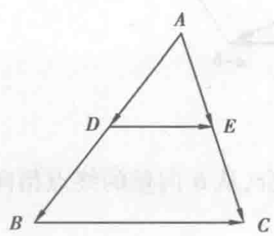

图 7.9

因为　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

所以　$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC}$且$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

例 7.2　设$\overrightarrow{AB}=-6\vec{a}+18\vec{b}$,$\overrightarrow{BC}=8(\vec{a}-\vec{b})$,求$\overrightarrow{AC}$.

解　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-6\vec{a}+18\vec{b})+8(\vec{a}-\vec{b})$

$=2\vec{a}+10\vec{b}$

例 7.3　求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的平分线方向的方向向量 $\boldsymbol{d}$.

解　因为菱形的对角线平分对角,所以取向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$,$\boldsymbol{b}^0$,这两个单位向量的和就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的平分线方向的方向向量.

因为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\ \boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

于是

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

这就是与 $\boldsymbol{a}^0$,$\boldsymbol{b}^0$ 夹角平分线平行的向量.

(5)向量的投影

定义 5　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 u 轴,用 φ 表示它们之间的夹角$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$,称数量$|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影或 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴方向上的投影,记作

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$$

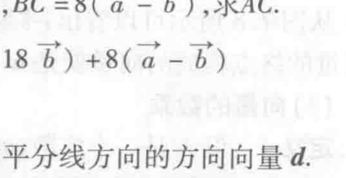

图 7.10

如图 7.10 所示向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影为:$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB$.

显而易见,当$0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$时,投影为正,即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=$

$AB>0$；当 $\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$ 时，投影为负，即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB<0$；当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，投影为零，即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=0$（此时为一个点）.

可以证明：两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和. 此结论不难推广到 n 个向量的情况，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n$$

(6)向量的数量积

1)数量积的概念

在物理学中，如果物体受到恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，沿直线发生的位移 $\boldsymbol{s}$，设力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ，则力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\theta$$

其中，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}})$.

功是一个数量，它等于力和位移这两个向量的模与这两个向量夹角的余弦的乘积，我们把向量的这种运算抽象出来，作为两个向量数量积的定义.

定义 6　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，称数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\tag{7.1}$$

两个向量的数量积也叫向量的点积或内积. 由数量积的定义，力 $\boldsymbol{F}$ 做的功为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

2)数量积的性质

性质 1　$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

证　因为　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

所以　$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

性质 2　设 $\boldsymbol{a}$ 是任意向量，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

证　因为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=0$

所以　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2$

性质 3　当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$；当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

证　根据一个向量在另一个向量上的投影，得

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}}$$

性质 4　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

证　①当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=0$ 时，结论显然成立.

②当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq0$ 时，$|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$.

必要性：若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$.

充分性：若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$.