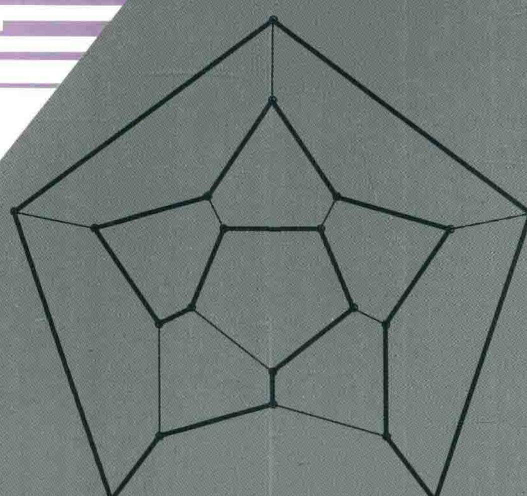
新世纪高等学校教材

数学与应用数学系列教材

LISAN SHUXUE

离散数学

北京师范大学数学科学学院　主　编
蔡俊亮　闫建平　赵武超　编　著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

数学与应用数学系列教材

离散数学

LISAN SHUXUE

北京师范大学数学科学学院 主 编

蔡俊亮 闫建平 赵武超 编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

离散数学／蔡俊亮，闫建平，赵武超编著. —北京：北京师范大学出版社，2014.8

（新世纪高等学校教材 数学与应用数学系列教材）

ISBN 978-7-303-17763-9

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①蔡…②闫…③赵… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第171880号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com
电子信箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875

印　　刷：北京东方圣雅印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：13
字　　数：230千字
版　　次：2014年8月第1版
印　　次：2014年8月第1次印刷
定　　价：20.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　田兴姣
美术编辑：焦　丽　　装帧设计：焦　丽
责任校对：李　菡　　责任印制：陈　涛

内 容 简 介

本书选取离散数学中最基础的、在各领域中有着广泛应用的数理逻辑、集合论、代数系统和图论及其应用四个部分为主要内容. 具体包含命题逻辑、谓词逻辑、集合论、关系、映射、代数结构、群论、特殊代数系统、图的基本概念、 Euler 图与 Hamilton 图、树和林及平面图 12 章. 每章后面配有适量的习题, 书末附有部分习题参考答案与提示.

本书本着简明、易学、实用的原则, 选材恰当, 结构严谨, 叙述详细, 通俗易懂. 本书配有较多例题, 便于自学, 适应性广, 伸缩性强. 本书可作为普通高等院校计算机专业离散数学课程的教材, 亦可作为大专院校的专科教材或函授教材.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立数学与数学教育研究所，2004年成立数学科学学院. 学院现有教师84人，其中教授36人，副教授28人；有博士学位的教师占96%. 特别地，有中国科学院院士2人，第三世界科学院院士1人，国家千人计划入选者2人，全国高校教学名师奖1人，教育部长江学者奖励计划特聘教授4人和讲座教授1人，国家杰出青年基金获得者4人，新世纪百千万人才工程国家级人选2人，获德国洪堡(Humboldt)基金者12人. 现有全日制在校生共1 168人，其中本科生770人，硕士研究生320人，博士研究生78人.

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权. 1988年，基础数学、概率论与数理统计被评为国家级重点学科. 1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站. 1996年，数学学科成为国家211工程重点建设的学科. 1997年成为国家基础科学人才培养基金基地. 1998年获数学一级学科博士学位授予权. 2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体. 2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台. 2007年数学被评为一级学科国家重点学科. 2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点. 2009年教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌，分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队，调和分析与流形的几何方向被评为教育部创新团队. 2011年获统计学一级学科博士学位授予权. 2012年在高校第3轮数学一级学科评估中排名第5. 学院还有8个硕士点，9个教研室和《数学通报》杂志编辑部. (李仲来执笔)

2014-03-04

前 言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系．2004 年成立北京师范大学数学科学学院．经过近百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验．将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的．

培养人才和编写教材是学院两项非常重要的工作．教材的编写是学院的基本建设之一．学院要抓好教材建设，教师要研究教学方法．在教材方面，学院要推出一批自己的高水平教材．另外，编写教材要注意几项基本原则：写教材要慢一点，质量要好一点，教材修订连续化，教材出版系列化．

2005 年 5 月，由学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院主编（李仲来教授负责），准备对学院教师目前使用的，或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版，另有一些教材需要重新编写．计划用几年时间，出版数学与应用数学系列教材、数学教育主干课程系列教材、大学公共课数学系列教材、数学学科硕士研究生基础课程系列教材，共 4 个系列的主要课程教材．

2005 年起，由学院组织和动员全院在职和退休教师之力量，主编出版数学一级学科 4 个系列课程教材．教材编写涉及面之广、数量之大、持续时间之长，在一所高校数学院系内是为数不多的，其数量在中国数学界列全国第一．经过 8 年的编写，至今已经出版了 50 余部教材，原计划的大多数教材已经出版，对于学院来讲，这是一件值得庆贺的大事．现在可以说，学院和北京师范大学出版社基本上是干成了一件大事．若留下缺憾，则需要后人去补充．

从数量上看，按教材系列，出版数学与应用数学系列教材 28 部、数学教育主干课程系列教材 9 部、大学公共课数学系列教材 7 部、数学学科硕士研究生基础课程系列教材 10 部．按出版教材版次，第 1 版 21 部、第 2 版 21 部、第 3 版 12 部．还出版了 3 部教辅教材．从质量上看，14 部教材被评为普通高等教育“十一五”“十二五”国家级规划教材；9 部教材被评为北京市高等教育精品教材；“师范院校数学学科 4 个系列教材建设”项目获 2012 年北京师范大学教育教学成果一等奖．

本套教材可供高等院校数学院系本科生、教育学院数学系、函授和网络大学（数学专业）和在职中学教师等使用和参考.（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院

2014-06-04

编者的话

本教材是根据新世纪高等学校课程教学基本要求编写而成. 伴随着计算机科学技术的迅速发展, 离散数学作为基础学科正变得越来越重要. 编写过程中注意选取并吸纳当前教材改革中的一些成功模式或案例, 使本教材具有广泛的适应性和独特的优势.

根据国家教育委员会颁布的计算机软件专业教学基本要求, 本教材包含了四部分内容: 数理逻辑、集合论、代数系统和图论及其应用. 其中第一部分包含命题逻辑和谓词逻辑; 第二部分包含集合论、关系和映射; 第三部分包含代数结构、群论和特殊代数系统; 第四部分包含图的基本概念、 Euler 图与 Hamilton 图、树和林及平面图.

针对读者为教育类数学与科学方向学生的特点, 适应教育课程改革综合化的趋势, 贯彻使学生文理兼通, 学有专长, 一专多能的精神, 以处理好基础性、综合性、专业性以及在理论体系严谨、系统的前提下力求突出科学性和可读性为原则, 选择离散数学中最基础的、对学生将来的教学工作和可持续发展有重要作用的内容编写而成. 为适应不同读者的需要, 书中部分内容加上了"*"号, 教学时可选用.

本教材具有结构严谨、逻辑清晰、论证详细、通俗易懂等优点. 主要表现在以下几个方面: 注重内容的系统性与科学性; 注重内容的连续性与适应性; 注重内容的基础性与实用性; 注重内容的知识性与可读性.

本教材可作为普通高等学校计算机专业本、专科生离散数学课程的教材, 亦可供其他数学和计算机相关专业学生和工作人员阅读参考. 本教材的出版得到了北京师范大学数学科学学院的大力支持, 在此表示衷心感谢!

由于时间仓促且编者水平有限, 书中错误和疏漏之处难免, 诚恳地希望各界读者批评指正.

编　者

2014 年 3 月于北京

目　录

第一章　命题逻辑

通常，人们把研究人的思维形式和规律的科学称为 逻辑学. 由于研究的对象和方法各有侧重，又分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑.

什么是 数理逻辑 ? 著名数学家希尔伯特 (Herbert) 曾对此有简单而又确切的描述：“它是把数学上的形式化的方法, 应用到逻辑领域的结果. ”因此, 数理逻辑是一门用数学方法来研究推理，以及推理中前提和结论之间的形式关系的科学. 这里的数学方法主要是指建立一套表意符号体系，对具体事物进行抽象的形式化研究的方法. 所以数理逻辑也称作 符号逻辑.

一般认为，数理逻辑是由德国数学家兼哲学家莱布尼茨 (G.W.Leibniz) 在 17 世纪中叶创立的. 1847 年, 英国数学家布尔 (G.Boole) 出版了《逻辑的数学分析》一书，初步建立命题演算系统. 1879 年，德国数学家弗雷格 (G.Frege) 出版了《表意符号》，引入了量词、约束变元，初步建立谓词演算系统. 1930 年，出生于奥地利的美籍数学家哥德尔 (K.Godel) 的完全性定理证明，使数理逻辑的基础得到完善. 而后意大利数学家皮亚诺 (G.Peano) 、英国数学家德 · 摩根 (A.DeMorgen) 、罗素 (B.A.W.Russell) 等人对数理逻辑的发展都作出了很大贡献.

20 世纪以后，经过数理逻辑学家的努力，数理逻辑在逻辑演算基础上又发展了四个分支：证明论、公理集合论、递归论和模型论.

在计算机科学中，数理逻辑为机器证明、自动程序设计、计算机辅助设计等计算机的应用和理论研究提供了必要的理论基础. 同时，它在其他科学技术和生产实践领域中有着广泛的应用. 本章只介绍计算机科学领域所必需的数理逻辑基础知识：命题逻辑.

命题逻辑 也称 命题演算, 它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的推导关系. 它包含什么是命题、如何符号化、命题公式和解释、范式、推理论等内容. 下面逐一进行讨论.

§1.1　命题与联结词

§1.1.1　命题与命题真值

众所周知，语言是交流思想的工具，日常使用的语言称为自然语言，它是极其丰富多彩的，然而也有模棱两可、含糊多义的缺点. 因而对于严格的推理，使用自然语言是极为不便的，需要引入一种形式化语言，它具有单一、明确的含义，这种形式化语言在数理逻辑中称为目标语言. 由目标语言和一些规定的公式与符号构成了数理逻辑的形式符号体系. 目标语言中的基本元素是

命题. 所谓命题，是指能判断真假的陈述句. 这种陈述句的判断只有“正确”和“错误”两种可能，称判断为“正确”的命题的真值为真，称判断为“错误”的命题的真值为假，分别用“ T ” (或“ 1 ”), “ F ” (或“ 0 ”) 表示. 任何一个命题的真值非真必假，因此又可称命题是非真必假的陈述句.

例 1.1 判断下列句子中哪些是命题.

(1) 北京是中国的首都. (2) 雪是黑色的. (3) 请开门！

(4) 你要去青岛旅游吗？ (5) $x+y+z>6$. (6) 今天天气真好！

(7) 3 能被 2 整除. (8) 火星上也有人. (9) $\sqrt{2}$ 是无理数.

(10) 小李在宿舍里.

解 分析以上十个句子：(3) 是祈使句；(4) 是疑问句；(6) 是感叹句；这三句都不是陈述句，当然不是命题.

(5) 不是命题，因为它没有确定的真值. 当 $x=1, y=2, z=4$ 时，$1+2+4>6$ 正确，而当 $x=1, y=2, z=3$ 时，$1+2+3>6$ 错误.

(1)(9) 是真值为“真”的命题. (2)(7) 是真值为“假”的命题.

(8) 的真值是唯一的，只是目前我们不知道而已，随着科技的进步，它的真值迟早会知道，因而它是命题.

(10) 的真值视小李当时的具体位置而定，它必有一个确定的真值，所以它也是个命题.

从上述例子可以看出，判断一个句子是不是命题，首先看它是不是陈述句，然后再看它的真值是否唯一. 当然，真值是否唯一与我们是否知道它的真值是两回事. 命题的真值有时可以明确指出，有时还需依靠环境、条件、实际情况、时间等才能确定.

在例 1.1 中给出的命题 (1)(2)(7)(8)(9)(10) 都是简单的陈述句，都不能再分解为更简单的句子，像这样的命题称为 **原子命题** 或 简单命题. 通常用小写的英文字母 $p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots$ 表示简单命题，并将表示命题的符号放在该命题的前面，称为 **命题符号化**.

如：p: 雪是黑色的. q: $\sqrt{2}$ 是无理数. 此时，p 是假命题，q 是真命题.

对简单命题来说，它的真值是确定的，因而又称为 **命题常项** 或 **命题常元**.

对于 (5), 虽不是命题，但当给定 x, y, z 的值时，它的真值就确定下来，这种真值可以变化的简单陈述句称为 **命题变项** 或 **命题变元**, 也可用英文字母 $p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots$ 表示. 一个符号，例如 p, 它表示的是命题常项还是命题变项，一般由上下文来确定.

注意 命题变项不是命题. 下面用数学方法研究命题之间的逻辑关系，并介绍常见的五种命题联结词.

§1.1.2 命题联结词

在日常使用的自然语言中，各类语句的联结词如“与”“并且”“或”等，往往没有确定的、唯一的含义，是多义性的. 在数理逻辑中，命题的联结词都是有严格定义的，并且予以符号化.

在数理逻辑中，常用的命题联结词有五种.

§1.1.2.1 否定联结词 $\neg$

定义 1.1 设 p 是一个命题，命题“非 p”(或“p 的否定”)，称为 p 的否定式，记作：$\neg p$，读作“非 p”. $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假. $\neg p$ 的真值可列表 (见右表).

p	$\neg p$
T	F
F	T

例 1.2 设 p : 3 是一个偶数，则 $\neg p$: 3 不是偶数.

联结词 $\neg$ 是自然语言中“非”“不”“没有”等的逻辑抽象. 逻辑电路图如图 1-1 所示.

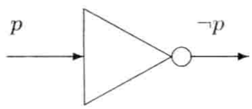


图 1-1

§1.1.2.2 合取联结词 $\wedge$

定义 1.2 设 p, q 是两个命题，命题“p 并且 q”(或“p 和 q”)，称为 p 和 q 的合取式，记作：$p\wedge q$，读作“p 与 q 的合取”. $p\wedge q$ 为真当且仅当 p, q 均为真. $p\wedge q$ 的真值可列表 (见右表).

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例 1.3 设 p : 今天天气很冷. q : 今天刮风. 则 $p\wedge q$ 表示：今天天气很冷并且刮风.

又如：设 p : 我们去香山看红叶. q : 教室里有两块黑板. 则 $p\wedge q$ 表示：我们去香山看红叶并且教室里有两块黑板.

在自然语言中，命题“我们去香山看红叶并且教室里有两块黑板”是没有意义的，因为 p 与 q 没有任何联系，但作为数理逻辑中的命题 p 和 q 的合取来说，它仍可作为一个新的命题，而且按照定义，当 p 和 q 都为真时，$p\wedge q$ 是一个真值为真的命题.

联结词 $\wedge$ 是自然语言中的“并且”“既 …… 又 ……”，“不仅 …… 而且 ……”等的逻辑抽象. 逻辑电路图如图 1-2 所示.

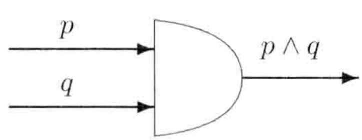


图 1-2

§1.1.2.3 析取联结词 $\vee$

定义 1.3 设 p, q 是两个命题，命题“ p 或 q”，称为 p 和 q 的析取式. 记作： $p \vee q$, 读作“ p 与 q 的析取”. $p \vee q$ 为假当且仅当 p, q 均为假. $p \vee q$ 的真值可列表 (见右表).

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例 1.4 设 p：小张是位排球运动员. q：小张是位篮球运动员. 则 $p \vee q$ 表示：小张是位排球运动员或篮球运动员. 逻辑电路图如图 1-3 所示.

联结词 $\vee$ 是自然语言中的“或”“或者”的逻辑抽象.

依定义可见，析取式 $p \vee q$ 表示的是一种相容性“或”，因为 p, q 可同时为真. 但在自然语言中的“或”具有二义性，有时表示相容性“或”，如例 1.4. 有时表示不相容性“或”，如“他的死或重于泰山或轻于鸿毛”，就不能符号化为 $p \vee q$ 的形式，但可符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

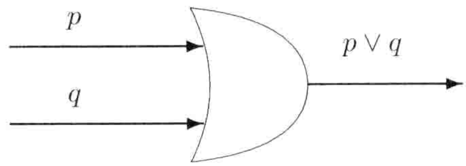


图 1-3

§1.1.2.4 蕴涵联结词 $\rightarrow$

定义 1.4 设 p, q 是两个命题，命题“如果 p, 则 q”称为 p 与 q 的蕴涵式，记作： $p \rightarrow q$, 读作“ p 蕴涵 q”，其中，p 称为蕴涵式的前件， q 称为蕴涵式的后件. $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真， q 为假. $p \rightarrow q$ 的真值可列表 (见右表):

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例 1.5 设 p: 天气晴朗. q: 我去新华书店. 则 $p \rightarrow q$ 表示：如果天气晴朗，那么我去新华书店.

“ $p \rightarrow q$ ”是自然语言中的“若 p 则 q ”“若 p 才能 q ”“只要 p 就 q ”“ p 仅当 q ”“只有 q 才 p ”等的逻辑抽象.

在自然语言中，“若 p 则 q ”中的前件 p 与后件 q 之间必存在某种因果关系，而且当前件 p 为假时，无论结论 q 是真还是假，整个语句的意义往往无法判断. 但在数理逻辑中，可以允许 p, q 之间没有必然的因果关系. 例如：如果 $2+2=5$, 那么太阳从东方升起. 令 p: $2+2=5$, q: 太阳从东方升起. 则 $p \rightarrow q$ 中 p, q 之间没有必然联系，但 $p \rightarrow q$ 是一个真值为真的命题. 在数理逻辑中，若前件为假，则 $p \rightarrow q$ 为真，称为“善意推定”. 下面我们通过一个例子来说明“善意推定”的规定是有一定道理的.

例如：如果天不下雨，那么路面潮湿. 设 p: 天下雨，q: 路面潮湿. 则这里 p 为假，q 为真，根据善意推定，$p \to q$ 为真. 事实上，如果天不下雨，路面潮湿完全可以，比如给地面洒水. 说明规定当 p 为假时，$p \to q$ 为真，即善意推定是合理的.

又如：如果天不下雨，那么路面不潮湿. 设 p: 天下雨，q: 路面潮湿. 则这里 p 为假，q 为假，根据善意推定，$p \to q$ 为真. 事实上，这明显可行.

§1.1.2.5 等价联结词 $\leftrightarrow$

定义 1.5 设 p, q 是两个命题，命题"p 当且仅当 q"称为 p 与 q 的等价式，记作：$p \leftrightarrow q$, 读作"p 等价于 q"，$p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p, q 同时为真或同时为假. $p \leftrightarrow q$ 的真值表见右表.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例 1.6 设 $p: 2+2=4$. q: 太阳是恒星. 则 $p \leftrightarrow q$ 表示：$2+2=4$ 当且仅当太阳是恒星.

例 1.7 两直线平行当且仅当内错角相等.

设 p: 两直线平行. q: 内错角相等. 则命题可符号化为 $p \leftrightarrow q$.

联结词 $\leftrightarrow$ 是自然语言中"充分必要条件""当且仅当"等的逻辑抽象.

§1.1.3 复合命题

以上我们介绍了五种常用联结词，由简单命题和命题联结词可以构成比较复杂的新的命题，我们把由简单命题用联结词联结而成的命题称为**复合命题**. 例如，设 p, q 是两个简单命题，则 $\neg p, p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ 均为复合命题，且它们是由联结词构成的基本复合命题.

五种联结词也称为逻辑运算符，它们与普通的运算符一样，运算的优先级从高到低依次为：$\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. 如果出现的联结词相同又无括号，那么按从左到右的顺序运算. 如果有括号，那么先进行括号运算.

§1.2 命题公式及解释

上节中介绍了五种常用的联结词及由它们组成的基本复合命题. 由这五种联结词和多个命题常项 $p, q, r, \cdots$ 可以组成更复杂的复合命题. 如，$(p \wedge q) \vee r$, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge q)$. 如果在复合命题中，$p, q, r$ 等不仅可以代表命题常项，也可以代表命题变项，这样组成的复合命题形式称为命题公式. 换句话说，命题公式是由联结词、命题常项、命题变项、圆括号"("和")"等组成的符号串. 但并不是所有的由这些符号任意组成的符号串都是命题公式. 所以，必须给出一定的规则，才能得到命题公式的严格定义.

§1.2.1 合式公式

对计算机而言，最方便的方式是递归性的，即用简单的原子命题和联结词，经过有限步构造出新的复合命题来.

下面给出合式公式的定义.

定义 1.6 合式公式

(1) 单个命题常项或变项是合式公式;

(2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式;

(3) 若 A 和 B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式;

(4) 经过有限次地使用规则 (1)(2)(3) 组成的符号串都是合式公式.

今后合式公式也称为 **命题公式**, 简称 **公式**.

由定义可知:

(1) 单个命题常项或变项如 $p,\ q,\ r,\ \cdots,\ p_i,\ q_i,\ r_i,\ \cdots,\ 0,1$ 是最简单的合式公式.

(2) 合式公式定义中的 A 和 B 代表任意的命题公式.

(3) 合式公式无限多.

为方便起见，约定 $(\neg A)$,$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 的外层括号可省去. 但把程序输入计算机时，括号不能随意省略.

符号串: $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (q \wedge (s \vee \neg r))$; $p \rightarrow (\neg p \wedge q)$; $\neg(p \wedge q)$ 都是命题公式; 而符号串: $(p \rightarrow q \wedge \neg q$; $p \wedge q \wedge$; $\neg p(q \vee r)$ 都不是命题公式.

由定义可以看出，命题公式的结构很复杂. 从图论观点看，每一个命题公式都可以用一棵 "树" 来表示，其中 "树" 的 "节点" 与联结词对应，而树叶与单个命题常项或变项相对应 (参见第十一章内容).

例 1.8 公式 $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (q \wedge (s \vee \neg r))$ 可以表示为图 1-4.

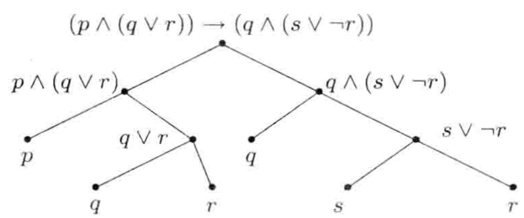


图 1-4

定义 1.7 若 A_1 是公式 A 的一部分，且 A_1 是一个公式，则称 A_1 是 A 的子公式.

如例 1.8 中的 $(q \vee r)$ 是公式 $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (q \wedge (s \vee \neg r))$ 的一个子公式.

§1.2.2 公式的解释

一个命题公式中如果含有命题变项，那么它的真值就是不确定的. 只有对它的所有命题变项指定一定的真值，命题公式才变成一个具有确切真值的命题. 一般地，对一个命题公式的解释定义如下.