

《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

许瓦兹引理

——从一道加利福尼亚大学伯克利分校数学系博士生试题谈起

佩捷 编著



◎ 保角映射

◎ Schwarz 引理

◎ 复函数的逼近

◎ 陆启铿论 Schwarz 引理

◎ 线性变换与罗巴切夫斯基几何



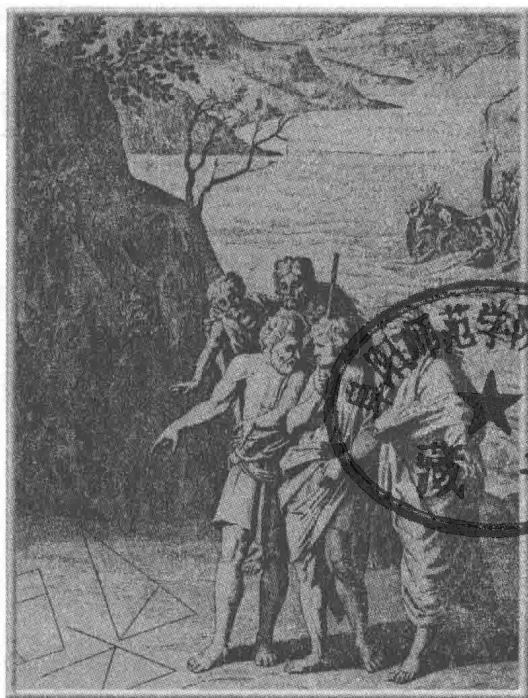
哈尔滨工业大学
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

许瓦兹引理

——从一道加利福尼亚大学伯克利分校数学系博士生试题谈起

佩捷 编著



◎ 保角映射

◎ Schwarz 引理

◎ 复函数的逼近

◎ 陆启铿论 Schwarz 引理

◎ 线性变换与罗巴切夫斯基几何



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书系统地介绍了许瓦兹引理、保角映射以及复函数的逼近,并且着重地介绍了 Carathéodory 和 Kobayashi 度量及其在复分析中的应用.论述深入浅出,简明生动,读后有益于提高数学修养,开阔知识视野.

本书可供从事这一数学分支相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

许瓦兹引理:从一道加利福尼亚大学伯克利分校数学系博士生试题谈起/佩捷编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.8

ISBN 978-7-5603-4896-4

I. ①许… II. ①佩… III. ①多复变函数论
IV. ①O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 196799 号

策划编辑	刘培杰 张永芹
责任编辑	张永芹 杨万鑫 聂兆慈
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真	0451-86414749
网 址	http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷	哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本	787mm×960mm 1/16 印张 5.5 字数 62 千字
版 次	2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5603-4896-4
定 价	18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎

目

录

- § 1 几道数学竞赛培训题 //1
- § 2 保角映射 //3
- § 3 一道西德竞赛题 //5
- § 4 Schwarz 引理 //9
- § 5 同时代的两位 Schwarz //11
- § 6 一个伯克利问题 //13
- § 7 中国大学生夏令营试题 //15
- § 8 与非欧几何的联系 //20
- § 9 与多复变函数论的联系 //23
- § 10 复函数的逼近 //25
- § 11 与插值问题的联系 //27
- § 12 Carathéodory 和 Kobayashi 度量
及其在复分析中的应用 //28
 - 1 序 言 //28
 - 2 单值化定理 //30
 - 3 源自于 Schwarz 引理和
Schwarz-Pick 引理的推动 //32
 - 4 关于小林度量的基本事实 //35

5 关于 Caratheodory 度量的一些基本事实 //38

6 小林度量和 Caratheodory 度量的比较 //41

§ 13 陆启铿论 Schwarz 引理 //43

附录 线性变换与罗巴切夫斯基

几何 //53

1 罗巴切夫斯基几何在圆上的欧几里得图像 //53

2 给定附标的两点间的非欧距离的计算法 //55

3 非欧几里得圆周 //57

4 曲线的非欧长度 //58

5 非欧几里得面积 //58

6 远环 //59

7 超环 //60

8 罗巴切夫斯基几何在平面上的欧几里得图
像 //62

参考文献 //65

编辑手记 //67

§1 几道数学竞赛培训题

北京大学社会学教授郑也夫指出. 中国教育的一大弊病是过度复习. 为拿高分花大量时间去做类似的问题. 数学竞赛也不例外. 培训试题太多.

先来看三道复数的竞赛培训试题.

试题 1 已知 $z, \alpha, x \in \mathbf{C}, x = \frac{\alpha - z}{1 - \alpha z}$, 且 $|z| = 1$,

求证: $|x| = 1$.

试题 2 证明: 若对 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ 成立 $|z_1 - \bar{z}_2| = |1 - z_1 z_2|$, 则 $|z_1|, |z_2|$ 中至少有一个等于 1.

试题 3 设 $z, w \in \mathbf{C}$, 且 $z \neq w, |z| = 2$, 求

$\left| \frac{z - w}{4 - \bar{z}w} \right|$ 的值.

这三个问题的共同之处在于都出现形式 $\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$,

在试题 2 中只是将 z_2 令为 $\bar{z}_2$

$$\left| \frac{z_1 - \bar{z}_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{|1 - z_1 z_2|}$$

在试题 3 中令 $z_1 = \frac{z}{|z|}, z_2 = \frac{w}{2}$, 则 $z = 2z_1, w = 2z_2$

代入 $\left| \frac{z - w}{4 - \bar{z}w} \right|$ 中得 $\left| \frac{2z_1 - 2z_2}{4 - 4\bar{z}_1 z_2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$.

再看一道培训讲座例题(《中学生数学》2005 增刊

第六讲复数,长沙市雅礼中学杨日武).

设 $|a| < 1$, 对复平面上任何点 z , $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$ 或者小于 1, 或者等于 1, 或者大于 1, 从而整个平面分成三个子集. 所述的条件等价于

$$|z-a|^2 \leq |1-\bar{a}z|^2 \text{ 或 } (1-|a|^2)(|z|^2-1) \leq 0$$

第一个集合是开圆盘 $|z| < 1$, 第二个集合是单位圆周 $|z| = 1$, 第三个集合是闭单位圆盘的外部 $|z| > 1$, 对于 $z = \infty$, 该表达式的值为 $|a|^{-1}$, 从而 $z = \infty$ 属于第三个集合.

§2 保角映射

一般地说,在域 D 定义的函数 $w = f(z)$, 把 D 内的曲线

$$C: z(t) = x(t) + i y(t), \quad a \leq t \leq b$$

映射为 w 平面的曲线

$$\Gamma: f(z(t)) = f(x(t) + i y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

称 Γ 为在 f 下 C 的像(图 1).

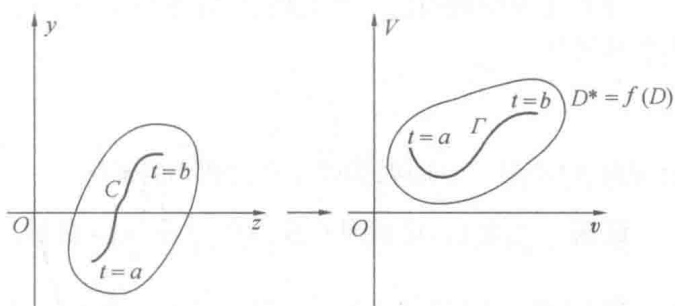


图 1

下面我们建立保角映射的概念:

设 C_1, C_2 为通过 z_c 的两条光滑曲线, 在 $w = f(z)$ 下, 它们在 w 平面的像为 Γ_1, Γ_2 , 当在 z_0 处 C_1, C_2 的切线夹角, 与 $w_0 = f(z_0)$ 处 Γ_1, Γ_2 的切线的夹角, 包括角的取向在内相等时, 则称 $w = f(z)$ 在 z_0 保角映射, 最容易而且基本的保角映射即一次映射

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

这样类型的有理数称为一次函数,由此函数决定的从 z 平面到 w 平面的映射称为一次映射.

一次映射具有下列重要性质:

定理 1 (圆圆对应) 一次映射将 z 平面上的圆变为 w 平面上的圆,但直线看做圆的一种.

定理 2 (镜像原理) 如在一次映射下 z 平面的圆 O 变为 w 平面上的圆 O' ,则关于圆 O 互相处于镜像位置的两点 P, Q 变为关于圆 O' 处于镜像位置的两点.

利用以上两定理可证明 1920 年 A. Winternitz 在 Monatsh Math. Vol 30:123 证明的如下结论.

设 C 是单位圆内的一个圆周,则存在单位圆到其自身的形如

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

的变换,它把圆周 C 映射到以原点为圆心的圆周.

证明 按假设,沿圆周 C 我们有 $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \text{常数}$,

即 a 和 $\frac{1}{\bar{a}}$ (若 $a = 0$,则为 0 和 ∞)是关于 C 以及单位圆周公共的调和点对,设 z_0 表示 C 的圆心, r 为其半径, $z_0 \neq 0, r < 1 - |z_0|$,则 a ($|a| < 1$)满足二次方程 $(a - z_0)\left(\frac{1}{\bar{a}} - \bar{z}_0\right) = r^2$ 或 $(|a| - |z_0|)\left(\frac{1}{|a|} - |z_0|\right) = r^2$, $\arg a = \arg z_0$, a 是任意的.

§3 一道西德竞赛题

上述保形变换在竞赛试题中时有出现:

西德 1981 年数学竞赛第二试有一题为:

试题 4 如果一个平面到其自身上的——映射将每一个圆变换为一个圆. 证明: 该变换一定将每一条直线变换为一条直线.

注 一个平面到其自身上的——映射是这样一种映射, 它满足:

(1) 将平面上的每一个点唯一地映照为平面上的某一点;

(2) 不同的点映照为不同的点;

(3) 平面上每一点都是某一点的象点.

证明 设此平面为 π , 此平面 π 上的那个——映射记为 $f(\lambda)$, 其逆映射记为 $f^{-1}(x)$, 显然它也是一个平面 π 上的——映射, 下面我们只需证:

(1) 设平面 π 上有一点 A , 且 $f(A) = A'$, 那么一定有

$f(\text{过点 } A \text{ 的一条直线 } L) \supseteq \text{过点 } A' \text{ 的某条直线 } L'$

这是因为我们若过点 A 作一圆 B , 使 B' 和 L 相切 (图 2), 由假设可知, 圆 B 一定被 f 映射为另一个圆 B' , 亦即

$$f(B) = B'$$

因为 $f(A) = A'$, 所以圆 B' 一定过点 A' , 过点 A' 作

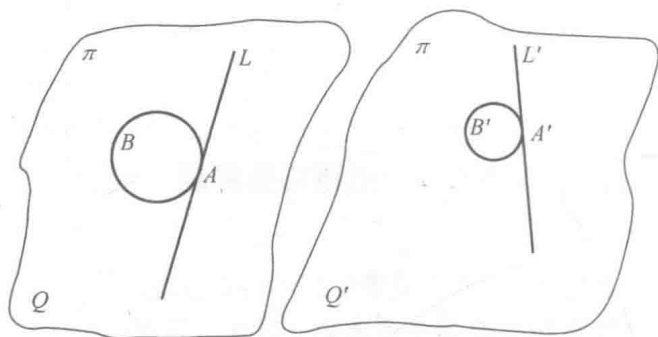


图 2

圆 B' 的切线 L' , 我们就是要证明

$$f(L) \supseteq L'$$

因为我们把平面 π 上除直线 L 以外的部分记为 Q , 直线 L' 以外的部分记为 Q' , 这就有

$$L \cap Q' = \Phi, \quad \pi = L \cup Q$$

$$L' \cap Q = \Phi, \quad \pi = L' \cup Q'$$

因为平面 π 上 Q 中的每一点, 若不是 B 上的点, 此点记为 C , 那么一定可以作一圆 D , 使 D 过 A, C 两点, 而且与圆 B 相切, 因为 f 将圆映射为圆, 若记 $f(D) = D'$, 那么 D' 一定是一圆, 而且此圆过 A' , 亦一定与圆 B' 相切, 因圆 B 与圆 D 只有一个交点, 所以圆 B' 与圆 D' 亦只能有一个交点, 因此圆 D' 与圆 B' 相切于 A' . 再记 $f(C) = C'$, 那么 C' 一定在圆 D' 上 (图 3), 也就是 C' 一定在 Q' 内, 所以

$$f(Q) \subseteq Q'$$

因为 $\pi = f(Q) \cup f(L)$, 而且

$$f(A) \cap f(L) = \emptyset$$

所以

$$f(L) \supseteq L'$$

这也就是 f (过 A 点的一条直线 L) $\supseteq$ 过点 A' 的某

条直线 L' .

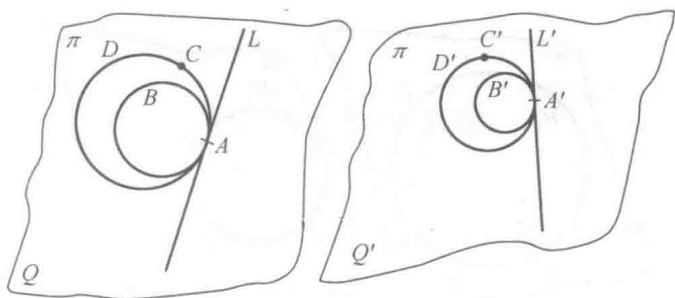


图 3

(2) 我们要证明: f^{-1} 亦是圆映射为圆的, 设平面上有一圆 E' , 其上有三点 H_1', H_2', H_3' , 设

$$H_1 = f^{-1}(H_1')$$

$$H_2 = f^{-1}(H_2')$$

$$H_3 = f^{-1}(H_3')$$

我们首先证明一定可以选择 H_1', H_2', H_3' , 使 H_1, H_2, H_3 三点是不会共线的. 因为否则的话, 对圆 E' 上的任意三点 H_1', H_2', H_3' , 一定有使 H_1, H_2, H_3 共线, 固定 H_1', H_2' , 由 H_1, H_2 确定的直线记为 M . 这样, 也就是 $f^{-1}(E') \subseteq M$, 从而有 $E' \subseteq f(M)$, 但由(1)知 $f(M) \subseteq$ 某直线, 因此有

$$E' \subseteq f(M) \subseteq \text{某直线}$$

这样 $E' \subseteq$ 某直线, 但因直线决不能包含圆, 所以导致矛盾, 故而一定存在圆 E' 上的三点, H_1', H_2', H_3' , 使 H_1, H_2, H_3 三点不共线, 这样过 H_1, H_2, H_3 三点可以确定一个圆 E (图 4). 我们要证明 $f^{-1}(E') = E$. 这是因为 $f(E)$ 一定是一个圆, 而且此圆过 H_1', H_2', H_3' 三点. 所以此圆一定是 E' , 所以 $f(E) = E'$, 也就是 $E = f^{-1}(E')$.

所以 f^{-1} 一定将圆映射为圆.

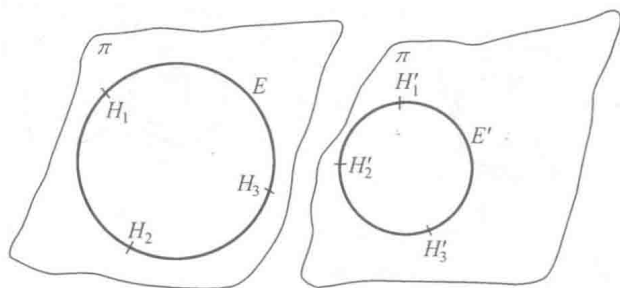


图 4

(3) 现在我们证明: $f(\text{直线}) = \text{直线}$. 设平面 π 上有一条直线 L , 由(1) 知 $f(L)$ 一定包含一条直线 L' , 亦即

$$f(L) \supseteq L' \quad (1)$$

再因为由(2) 可知, f^{-1} 亦是一个平面 π 上的一一映射, 而且亦是把圆映射为圆, 所以同样有

$$f^{-1}(L) \supseteq L \quad (2)$$

这也是

$$L' \supseteq f(L)$$

这样结合式(1) 与式(2), 便得

$$f(L) \supseteq L' \supseteq f(L)$$

亦即

$$f(L) = L'$$

也就是

$$f(\text{直线}) = \text{直线}$$

值得指出的是保角映射在应用方面也大有前途, 现在在微波通信器材设计中已经有了直接应用(见《现代数学的进展》自然杂志, 1979 年第 6 期).

§4 Schwarz 引理

复变函数论中一个基本定理称为 Schwarz 引理.

令 $D = \{z \mid |z| < 1\}$, Schwarz 引理说: 如果 $f: D \rightarrow C$ 在 D 内解析, $|f(z)| \leq 1$, 并且 $f(0) = 0$, 那么:

(1) 在 D 内, $|f(z)| \leq |z|$;

(2) 如果对于 $z_0 \in D - \{0\}$, $|f(z_0)| = |z_0|$, 那么在 D 内, $f(z) = \lambda z$, 其中 λ 是模为 1 的复常数.

在 Schwarz 引理中, 对函数及其定义域作了一些特殊的假设, 应用分式线性映射, 可以得到比较一般的结果.

定理 3 设 $f: D \rightarrow C$ 在 D 内解析, $|f(z)| \leq 1$, 并且 $f(z_0) = w_0$, 其中 $z_0 \in D$, 那么在 D 内

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|$$

在上式中, 只有当 $f(z)$ 是分式线性映射时, 等式才可能成立.

这个定理曾作为复分析的试题出现在美国加州大学洛杉矶分校 (UCLA) 1986 年秋季的博士资格考试中 (见《数学译林》1990 年第 4 期 358).

在 1985 年春季的试题中也出现了一道以此为素材的问题.

试题 5 对 $|\alpha| < 1$, 设

$$T_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}$$

许瓦兹引理

$\Delta_\alpha = \{T_\alpha z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$ 为圆盘, $r_\alpha = \Delta_\alpha$ 之半径, $d_\alpha = \inf\{1 - |w| \mid w \in \Delta_\alpha\}$ 为 Δ_α 到 $\{|w| = 1\}$ 之距离. 试证: 存在有限正常数 a 和 b , 使得

$$a \leq \inf_{|\alpha| < 1} \frac{r_\alpha}{d_\alpha} \leq \sup_{|\alpha| < 1} \frac{r_\alpha}{d_\alpha} \leq b$$

§5 同时代的两位 Schwarz

中文译名为许瓦兹的著名数学家共有三位.

在数学史上有两位同时代的 Schwarz, 其中一位是捷克数学家 Schwarz, 1914 年 5 月 18 日生, 曾任捷克科学院院士、斯洛伐克工学院教授. 他是半群论的创立者之一. 尤其在拓扑半群论方面作出了贡献, 曾获得捷克国家奖金和劳动勋章.

我们要介绍的是另一位德国的 Schwarz, 他 1843 年 1 月 25 日生于赫尔姆斯多夫. 1860 年进入柏林工业学院学习, 1864 年毕业并获得哲学博士学位, 他开始学习化学, 后受库默尔和外尔斯特拉斯影响转攻数学, 1867 年任助理教授, 两年后转为正教授, 在苏黎士瑞士工业大学任教, 1875 年到哥廷根主持数学讲座, 1892 年作为魏尔斯特拉斯的继任者赴柏林大学就职. 任教期间当选为普鲁士科学院和巴伐利亚 (Bararian) 科学院院士, 并和库默尔的一个女儿结了婚. Schwarz 作为数学家具有极强的几何直觉.

1884 年, Schwarz 对三维空间的等周问题, 提供了严密的解法. 并且他还用纯几何的方法解决了如下问题: 求每个顶点都在已知锐角三角形的三条边上, 且周长最短的三角形. Schwarz 得到的结论是此三角形的三个顶点是已知锐角三角形三条高的垂足. 1880 年, Schwarz 在给埃尔米特的信中指出, 当时教科书中的曲

许瓦兹引理

面面积概念有问题,并举出一个著名的反例. 根据这个例子证明了,用当时通常采用的曲面面积的概念会得出一个确定的圆柱面的面积的值可以是任何实数,甚至是无穷大的结论. 于是他用测度的概念重新给出了曲面面积的合理的定义.

另外一个容易弄混的数学家也译为许瓦兹,但他的名字中多了一个字母 t 即 Schwartz,这是一位法国大数学家,现代概率论的主要奠基人莱维是他的岳父,许瓦兹是法国布尔巴基学派的创始人,曾获 1950 年第二届菲尔兹奖.

