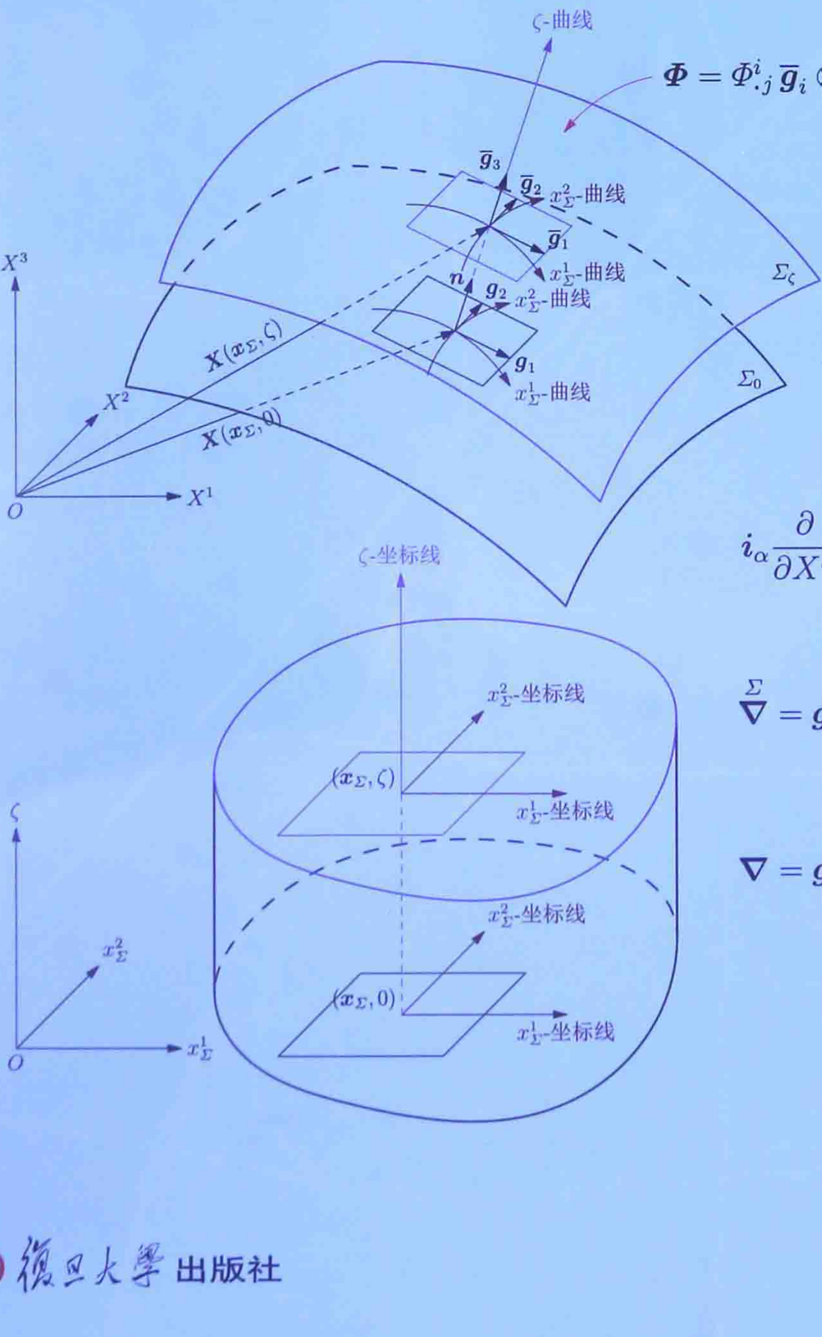
现代张量分析及其在连续介质力学中的应用

Modern Tensor Analysis with Applications in Continuum Mechanics

谢锡麟 著

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i}_{\cdot j}\,\overline{\boldsymbol{g}}_i \otimes \overline{\boldsymbol{g}}^j + \Phi^{i}_{\cdot 3}\,\overline{\boldsymbol{g}}_i \otimes \boldsymbol{n}$$



$$\boldsymbol{i}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\bigg|_{\Sigma_0} = \overset{\Sigma}{\boldsymbol{\nabla}} + \boldsymbol{n}\frac{\partial}{\partial \zeta}(\boldsymbol{x}_\Sigma, 0)$$

$$\overset{\Sigma}{\boldsymbol{\nabla}} = \boldsymbol{g}^l \frac{\partial}{\partial x^l_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{g}^l \boldsymbol{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^l_\Sigma}}$$

复旦大学出版社

现代张量分析
及其在连续介质力学中的应用

Modern Tensor Analysis with Applications in Continuum Mechanics

谢锡麟 著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代张量分析及其在连续介质力学中的应用/谢锡麟著. —上海:复旦大学出版社,2014.10
ISBN 978-7-309-10980-1

Ⅰ.现… Ⅱ.谢… Ⅲ.张量分析-应用-连续介质力学-高等学校-教材 Ⅳ.033

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 217037 号

现代张量分析及其在连续介质力学中的应用
谢锡麟 著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
江苏省句容市排印厂

开本 787×1092 1/16 印张 35 字数 748 千
2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-10980-1/O·550
定价:70.00 元

内容提要

张量分析作为连续介质研究的基本数学方法，在力学、物理学、航空宇航科学与技术、计算机科学、材料科学等学科中具有广泛的应用背景.

本书较为系统地阐述张量分析知识体系及其在连续介质力学中的相关应用.在张量分析知识体系方面，主要包括张量代数性质，Euclid空间中体积上张量场场论、曲面上张量场场论、张量映照微分学.在连续介质力学应用方面，主要包括体积形态连续介质(Euclid流形)的有限变形理论，按作者近期发展的当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论进行阐述；曲面形态连续介质(Riemann流形)的有限变形理论，主要由作者独立发展.全书共分6个部分，共27章.本书所涉及的知识体系(思想及方法)，基本源于作者自身对张量分析及其在连续介质力学中应用的认识与体会.在知识体系发展上，注重基于微积分与线性代数知识体系发展张量分析知识体系，基于张量分析知识体系发展体积及曲面形态连续介质的有限变形理论；注重数学与力学知识体系之间的融合；注重理论联系实际；注重知识体系的现代化阐述.

本书的文体介于一般学术专著与教程之间，所述张量分析与连续介质力学知识体系同相关科学与技术研究联系密切，注重体现知识体系的脉络结构、逻辑发展、思想方法；为便于阅读，在写作上注重演绎推导过程完整，应用事例丰富.

本书可作为力学、物理学、数学、航空宇航科学与技术、材料科学、计算机科学等相关专业的本科生与研究生教材，亦可作为相关科学与技术研究的参考.

前言

机械与运载工具的运动、结构与材料的宏观行为、大气与河流的运动、鱼儿的游动与鸟儿的飞行、生命体中器官与组织的运动等等, 这些运动具有的一个共同特点为所涉及的对象 (亦即介质) 在空间中呈连续分布, 可称为连续介质; 而变形为连续介质的典型行为. 张量分析作为连续介质研究的基本数学方法, 在力学、物理学、航空宇航科学与技术、计算机科学、材料科学等学科中具有广泛的应用背景.

作为我国理性力学先驱之一的郭仲衡先生在其所著《张量 (理论和应用)》以及《非线性弹性理论》中记述了现代张量分析以及有限变形理论的知识体系.

郭仲衡所著《张量 (理论和应用)》, 主要内容包括: (1) 张量的代数性质 (张量定义为多重线性函数). (2) 仿射量的基本性质 (基于外积运算). (3) 张量值映照微分学 (含各向同性张量值映照的表示理论等). (4) 微分几何中曲线论与曲面论的基本内容 (主要包括局部标架及其运动方程). (5) 现代几何学中相关思想及方法 (包括基于同态映照的推前及拉回、Lie 导数、Hodge 星算子、里积、外微分以及相关运算之间的关系). 对此部分内容的叙述虽然未引入微分流形的概念, 但所述的相关思想及方法可以几近完全地移植于流形上的分析, 且数学分析上非常清晰. (6) 张量分析在连续介质 (几何形态默认为 Euclid 流形) 中的基本应用, 包括变形刻画、输运方程. 另涉及同态扩张以及 Lie 导数等在连续介质力学中的应用, 但书著中未对这部分内容做深入阐述.

郭仲衡所著《非线性弹性理论》, 主要内容包括: (1) 有限变形理论 (连续介质几何形态默认为 Euclid 流形). 在理论框架上分别对初始物理构形以及当前物理构形引入曲线坐标系; 理论发展上按变形梯度及其基本性质、变形刻画、输运方程、守恒律方程等. (2) 有限变形弹性静力学、有限变形弹性动力学若干典型事例的半解析求解. (3) 变分原理. 值得指出, 基于《张量 (理论和应用)》所载张量分析的知识体系, 研习《非线性弹性理论》就显得较为自然而无数学以及力学分析上的困难.

随着现代科学技术的发展, 人们已越发关注纳米膜、细胞膜等连续介质, 其法向特征尺度远远小于展向特征尺度; 又如, 考虑星体表面的大气运动, 海面上油污扩散以及洪水漫延过平原、洼地以及山丘, 皂膜流动等, 其法向尺度 (流层厚度) 远远小于流动的展向 (流向) 尺度. 由此, 可将此类介质视作“几何形态为曲面的连续介质”. 数学上而言, Euclid 空间中的曲面 (对应 Riemann 流形) 同体积 (对应 Euclid 流形) 在场论上具有本质的不同, 故笔者认为可按连续介质的几何形态区分“体积形态连续介质”以及“曲面形态连续介质”两类. 就这两类几何形态各异的连续介质, 笔者近期已提出“当前物理构型

对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论” 以及 “几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论”.

笔者希望基于郭仲衡先生有关现代张量分析及有限变形理论知识体系构建并发展 “理性力学观点下的基于现代张量分析与几何学的连续介质力学一般理论”; 并将一般理论应用于涡量与涡动力学以及生物力学的某些方面, 致力于发展相应的研究思想及方法, 以期深入对相关问题的认识. 笔者基于自 2005 年留校工作持续至今的学习、研究与教学上的努力, 在复旦大学已逐步建设两条教学路径：(1)“微积分的一流化进程”. 主要包括一年制 “数学分析”、选修课程 “经典力学数学名著选讲 (有关微积分的深化)”、“流形上的微积分”、“应用实变函数与泛函分析基础”. (2)“基于现代张量分析的连续介质力学理论及其在流体力学中实践”. 主要包括选修课程 “张量分析与微分几何基础”、“连续介质力学基础”、“涡量与涡动力学基础”. 第一条教学路径主要提供有限维 Euclid 空间上微积分以及一般赋范线性空间上微分学知识体系, 这些知识体系为第二条教学路径提供了充实的数学基础.

目前, 笔者已通过复旦大学教务处网络资源, 建设成 “微积分的一流化进程” 课程网站`http://jpkc.fudan.edu.cn/s/354/`以及 “现代连续介质力学理论及应用” 课程网站`http://jpkc.fudan.edu.cn/s/353/`. 课程网站及时发布相关教学研究与实践的学术交流信息、学术论文、课程讲稿、参考试卷、课程录像等.

本书主要表现了笔者对现代张量分析及其在连续介质中应用的现有认识, 主要内容分成 6 部分：(1) 张量定义及其代数性质. 主要按张量的多重线性函数定义获得张量的表示形式及基本代数运算, 基于置换运算研究外积运算并基于外积运算研究仿射量的基本代数性质. (2) 有限维 Euclid 空间中体积上张量场场论. 主要阐述一般曲线坐标系下张量场场论及其应用, 涉及湍流时均方程、旋转参照系下流体控制方程等. (3) 有限维 Euclid 空间中曲面上张量场场论. 分别按有限维 Euclid 空间上微分学以及微分流形的观点阐述有限维 Euclid 中曲面的基本几何性质以及曲面上张量场场论. (4) 体积形态连续介质力学的相关理论. 阐述当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论, 涉及可变形边界上涡量动力学、有限变形弹性体 Euler 型控制方程及 Lagrange 型控制方程等. (5) 曲面形态连续介质力学的相关理论. 主要阐述几何形态为曲面的连续介质有限变形理论, 涉及固定曲面上二维流动涡量动力学、固体膜有限变形及海面油污扩散的控制方程等. (6) 张量映照微分学. 主要阐述一般赋范线性空间上微分学以及张量映照微分学的相关内容.

有限维 Euclid 空间中体积 (对应 Euclid 流形) 及曲面 (对应 Riemann 流形) 上张量场场论分别为建立体积形态及曲面形态连续介质的有限变形理论提供数学基础. 场论的研究对象主要为张量场, 亦即自变量为介质位置刻画 (可为 Cartesian 坐标或者曲线坐标) 的张量值映照, 一般张量映照指自变量及因变量均为张量的映照. 在张量空间上可定义线性结构以及范数, 由此成为张量赋范空间；可按一般赋范线性空间上的微分学研究张量场以及张量映照.

近年笔者通过在复旦大学持续性开设专业选修课程 “张量分析与微分几何基础”、“连续介质力学基础” 讲述本著述涉及的张量分析以及连续介质力学基础知识体系.

"张量分析与微分几何基础"(每周 3 学时, 约 54 学时), 目前主要按下述体系构建讲述内容：(1) 张量的基本代数性质 (第一部分). 将张量定义为有限维 Euclid 空间中的多重线性函数, 涉及协变基、逆变基 (对偶基)、简单张量及张量表示、张量并积、张量多点点积. (2) 有限维 Euclid 空间中一般曲线坐标系下的张量场分析. 基于有限维 Euclid 空间以及张量赋范线性空间上的微分学 (引述一般赋范线性空间上微分学的相关理论), 基于微分同胚定义曲线坐标系、曲线坐标诱导之局部基及其运动方程 (引入 Christoffel 符号); 基于张量场可微性引入的张量梯度及协变 (逆变) 导数; 张量场场论分析, 包括场论恒等式推导的一般方法; 非完整基思想及方法; 广义 Gauss-Ostrogradskii 公式; 在应用方面, 涉及弹性力学、流体力学中的基本关系式. (3) 张量的基本代数性质 (第二部分). 引入置换算子、对称及反称化算子、外积运算、Hodge 星算子; 就仿射量特征问题的相关表述, 涉及行列式定义、主不变量表示、Cayley-Hamilton 定理. (4) 张量映照微分学. 基于张量赋范线性空间上的微分学阐述可微性 (一阶导数)、高阶导数等结论；特征问题相关结论. (5) 有限维 Euclid 空间中曲线论及曲面论基本内容. 基于有限维 Euclid 空间上的微分学阐述曲线几何特征 (曲率及挠率), 曲线上局部标架及其运动方程; 曲面几何特征 (第一基本形式、第二基本形式、Gauss 曲率及平均曲率、截线曲率及主方向), 曲面上局部标架及其运动方程; 内蕴形式广义 Stokes 公式; 曲面上 Ricci 等式 (Gauss 方程) 以及 Codazzi 方程. (6) 流形上微分学基本概念、思想及方法. 以有限维 Euclid 空间中光滑曲面 (Riemann 流形) 作为对象, 按微分同胚以及列满秩映照叙述的坐标卡以及地图册 (概念及作用)；流形上 Riemann 度量、Levi-Civita 联络、协变微分的坐标定义及其曲面上的具体实现; 曲面切空间及余切空间; 曲面上张量场; 同态映照及其推前与拉回运算; 曲面上张量场的 Lie 导数与物质导数、Hodge 星算子、里积运算、外微分运算, 流形上主要微分运算之间的关系; 力学、物理等方面的几何化相关内容.

"连续介质力学基础"(每周 3 学时, 约 54 学时), 主要按下述体系构建讲述内容：(1) 几何形态为 Euclid 流形的有限变形理论. 在理论框架上, 直接阐述当前物理构形对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论. (2) 本构关系的基本研究方法以及典型介质的本构关系. (3) 有限变形弹性静力学、动力学若干经典问题的半解析求解. 涉及问题的 Euler 提法以及 Lagrange 提法; 张量场多点形式的非完整基理论; 基于非完整基理论进行的经典问题的求解; 另提供学生开展数值实验以及真实实验的软硬件条件等. (4) 几何形态为曲面 (Riemann 流形) 的有限变形理论. 阐述笔者现已发展的理论思想及方法; 研究现代几何学相关思想与方法的引入. (5) 几何形态为曲面的有限变形理论的应用研究. 鼓励学生参与相关典型问题的数值实验及真实实验, 可涉及固定曲面上的薄层流动 (对应镀膜过程等)；薄膜的有限变形运算 (如薄膜振动、旗帜与周边流场的耦合作用等); 皂膜流动; 水面上污染物的扩散过程等. (6) 变分原理. (7) 连续介质力学一般理论的应用. 这方面可具体涉及经典弹性力学、流体力学相关知识, 以辅助和补充相关专业课程的学习; 另外涉及考虑电场、磁场等其它作用的连续介质力学, 以期接近相关前沿科技.

笔者近年的学习、研究与教学, 包括本书的撰写, 得到上海市教委 2011 年上海高校本科重点教学改革项目 "现代连续介质力学理论及实践课程体系", 上海市教委 2011 年重点

课程立项项目“数学分析”(一年制, 面对力学等技术科学专业), 复旦大学 2013、2014 年暑期集中教学项目 (FIST) 之“现代张量分析及其在连续介质中应用”, 上海市教委 2014 年上海高校本科重点教学改革项目“力学 -数学 - 物理学相关知识体系之间互为借鉴与融合的教学研究与实践”, 国家自然科学基金面上项目 (11172069, 10872051) 等资助. 在此谨表感谢.

本书撰写过程中, 复旦大学力学与工程科学系博士研究生陈瑜、史倩、张大鹏、傅渊等做了大量 LaTeX 文本的输入工作, 并一起参与理论推导与核查等; 张大鹏利用 Asymptote 绘制了本书的全部插图. 本书在出版过程中得到复旦大学出版社范仁梅编辑的大力支持与帮助. 在此谨表诚挚感谢.

在上海大学戴世强教授的博客中有一篇博文《新一代应用数学和力学工作者的楷模——追念郭仲衡院士》(2011 年 10 月 14 日), 其中提到: 郭仲衡在一份自述中写道: “在吸收老师们的知识雨露的同时, 我更不忘揣摩他们的治学态度和高尚品德.……我执教北大, 在教学生的同时, 我从来没有忘记帮助他们养成严谨的治学作风和与人为善的处世态度, 以师长们对我的态度来培养青出于蓝而胜于蓝的学生是对我的师长的最好的报答.” 本书笔者自 1993 年 (当时大学二年级) 接触到郭仲衡先生的《张量 (理论和应用)》, 就被此书所载的学问深深吸引, 后又接触到郭仲衡先生的《非线性弹性理论》, 研习郭仲衡先生的专著至今感到获益匪浅, 也十分敬佩郭仲衡先生的卓越学问, 赞同郭仲衡先生对教书育人的高尚理念. 近期, 本书笔者确立以研习、继承、发展、传播相关数理知识体系作为自己学术活动的主要内容. 限于笔者的有限学识, 本书必然会有阐述上不当甚至错误之处等, 敬请读者直言不讳、不吝赐教, 甚为感谢.

谢锡麟 谨识

2014 年 10 月

复旦大学 力学与工程科学系

Tel: 021-65643938; Email: xiexilin@fudan.edu.cn

科学网博客: http://blog.sciencenet.cn/u/manifoldflow

符号表

$\forall$	任意
$\exists$	存在
$\exists!$	唯一存在
$=:$	表示右边的表达式是左边的对象的表达形式, 符号 $:=$ 同理
$\triangleq$	表示右边的表达式是左边对象的定义
$\Box$	用在证明的结尾表示证明的结束
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}$	向量
$\boldsymbol{\Phi}$	张量
$\boldsymbol{A}$	矩阵
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}^m$	m 维 Euclid 空间
$\mathbb{R}^{m\times n}$	m 行 n 列矩阵的全体,m 行 n 列矩阵空间
$\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)$	以 m 维 Euclid 空间为底空间的 r 阶张量
$\mathscr{L}in(\mathbb{R}^m)$	以 m 维 Euclid 空间为底空间的仿射量
$\Lambda^r(\mathbb{R}^m)$	以 m 维 Euclid 空间为底空间的 r 阶反对称张量 (r-形式) 空间
$\mathscr{L}(X;Y)$	赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性映照
Sym	对称张量的全体, 对称矩阵的全体
Skw	反对称张量的全体, 反对称矩阵的全体
PSym	对称正定仿射量的全体, 对称正定矩阵的全体
Orth	正交仿射量的全体, 正交矩阵的全体
$(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^m}$	m 维 Euclid 空间中两向量的内积
$\lvert\cdot\rvert_{\mathbb{R}^m}$	m 维 Euclid 空间中向量的范数
$[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathbb{R}^3}$	3 维 Euclid 空间中向量的三重积 (混合积)

$\otimes$	张量积
$\binom{e}{\cdot}$	张量的 e 点积
$\odot$	张量的全点积
$\circledcirc$	任意合法的张量代数运算
σ	置换
I_σ	张量的置换算子
$\mathscr{S}$	张量的对称化算子
$\mathscr{A}$	张量的反称化算子
$\wedge$	反对称张量 (外形式) 的外积运算
$*$	Hodge 星算子
$\lozenge$	外形式的外全点积
δ_j^i	Kronecker 符号
$\operatorname{sgn}\sigma$	置换 σ 的符号
P_r	r 阶置换的全体
det	矩阵或仿射量的行列式
$\lvert\cdot\rvert_X$	赋范线性空间 X 的范数
$d(\cdot,\cdot)$	度量空间中的距离
$\lvert\boldsymbol{\Phi}\rvert_{\mathscr{T}^r}, \lvert\boldsymbol{\Phi}\rvert_{\mathscr{T}^r(\mathbb{R}^m)}$	张量的范数
$\det\boldsymbol{\Phi}$	仿射量的行列式
I_r	仿射量的第 r 个主不变量
$\operatorname{tr}\boldsymbol{\Phi}$	仿射量的迹
$\boldsymbol{\Phi}^*$	仿射量的转置
$\bar{I}_r$	仿射量的第 r 阶矩
$\mathscr{C}(D_x)$	区域 D_x 上的连续函数
$\mathscr{C}^p(D_x;D_X)$	区域 D_x 与 D_X 之间的 $\mathscr{C}^p$ 微分同胚
$\mathscr{C}^p(D_x;\mathbb{R})$	在区域 D_x 上具有直至 p 阶连续偏导数的函数
$\mathscr{C}^p(D_x;\mathbb{R}^m)$	在区域 D_x 上具有直至 p 阶连续偏导数的向量值函数
$\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$	$\mathbb{R}^m$ 上具有紧支集的无限光滑函数

目 录