高等数学

经管类

学习指导（下册）

西南财经大学高等数学教研室 编

科学出版社

高等数学(经管类)学习指导

（下册）

西南财经大学高等数学教研室　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与朱文莉主编的《高等数学》(经管类)(下册)配套的学习指导书，按照教材体系逐章、逐节对应编写。每节内容由本节教材知识结构、学习要求、重点难点、疑难解答、典型题型分析、习题解析六个部分组成。每章开头增加了本章数学三考点和本章知识结构，每章结尾增加了本章教材总习题解答、单元测试及其解答。全书分为上、下两册，本书为下册，共5章，分别是多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程及差分方程。

本书既可以面向使用该教材的学生(但与教材《高等数学》(经管类)具有相对的独立性)，也可作为讲授高等数学的教师的教学参考书，还可为学习高等数学的学生和报考经管类研究生的考生提供解题指导。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(经管类)学习指导. 下册/西南财经大学高等数学教研室编. —北京:科学出版社，2015

ISBN 978-7-03-043299-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①西… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 026360 号

责任编辑:李淑丽 李 萍 / 责任校对:邹慧卿

责任印制:霍 兵 / 封面设计:华路天然工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年1月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015年1月第一次印刷 印张:17 1/2

字数:414 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

高等数学是财经类院校大学本科生的基础课程，有着举足轻重的地位。它的内容丰富，既要为理、工、经、管等各专业后继课程提供必要的、基本的数学工具，又负有培养学生应用数学知识解决实际问题的思想与能力的任务。同时，它又是理、工、经、管各专业硕士研究生入学考试的课程之一。高等数学理论抽象，逻辑推理严密，读者刚从中学数学过渡到大学数学的学习，他们在学习这门课程时往往感到抽象晦涩难懂，不易把握这门课程的重点、难点，做习题也难以下手。为帮助读者解决这些问题，结合财经类院校的学科特点，我们组织编写了这套学习指导，希望它们能帮助广大读者弄清楚高等数学的教学基本要求、深入理解基本概念和基本理论、牢固掌握基本运算技能、引导学生顺利克服学习中的困难、避免一些易犯的错误，从而提高经管类高等数学的教学质量，对学生真正掌握微积分起到一种辅助作用。

本套书是与科学出版社出版的由朱文莉主编的《高等数学》(经管类)(下册)配套的学习指导书。按照教材体系逐章、逐节对应编写。每节内容由本节教材知识结构、学习要求、重点难点、疑难解答、典型题型分析、习题解析六个部分组成。每章内容编写之初，增加了本章数学三考点和本章知识结构两部分；每章内容编写完后，增加了本章教材总习题解答、单元测试及其解答两部分。“本章知识结构”或“本节教材知识结构”以图表的形式指出了各个知识点的有机联系，帮助学生从总体上把握这一章的内容及结构。“学习要求”的提出和“重点难点”的归纳可以帮助读者把握对高等数学知识的掌握程度。“疑难解答”意在帮助读者释疑解难；“典型题型分析”主要对本章涉及的习题按内容划分为几个基本题型，这些题目基本上是源于全国硕士研究生入学统一考试的数学试题。通过这些例题讲解，探索主要解(证)题思路，提炼基本解(证)题方法和常用技巧，有的题目在解答之后，以注解的形式对该类题的解法做了归纳小结，有的题目还提供了常用的具有典型意义的多种解法。“习题解析”和“总习题解答”对教材中的全部习题作了详细解答(请读者正确使用这部分内容)。“单元测试”是依据全国硕士研究生数学三入学统一考试大纲和教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的经济类理科本科微积分课程教学基本要求而精心制作的单元测试题，“单元测试解答”为读者提供了详细的解题指导。

本套学习指导书为经济类高等数学教辅，条理清晰，体系结构完整，既可以面向使用该教材的学生(但与教材《高等数学》(经管类)具有相对的独立性)，也可作为讲授高等数学的教师的教学参考书，也可为学习高等数学的学生和报考经管类研究生的考生提供解题指导。

本套学习指导书由西南财经大学高等数学教研室共同编写，其中朱文莉为主编，负责全书的统一协调、编纂与定稿。第一、八章由吴静编写，第二、五章由方敏编写，第三、七章由朱文莉编写，第四、九章由代宏霞编写，第六章由梁浩编写，第十、十一章由向开理编写；第一、四、九章的习题解析主要由代宏霞提供，第二、十、十一章的习题解析主要由向开理提供，第三、七、八章的习题解析主要由朱文莉提供，第五、六章的习题解析主要由谢果提供。林一多及多位研究生

对初稿进行阅读及校对，并提出了宝贵的建议，在此深表感谢！

最后向关心、支持本书出版的西南财经大学经济数学学院领导和全体老师，以及科学出版社表示衷心的感谢！本套书博采众家之长，参考了多本同类书籍和考研辅导书，吸取了不少养分，在此也向这些书籍的作者表示感谢。同时由于编者水平有限，难免有错误及不妥之处，欢迎广大读者给予批评指正。

编　者

2014 年 12 月

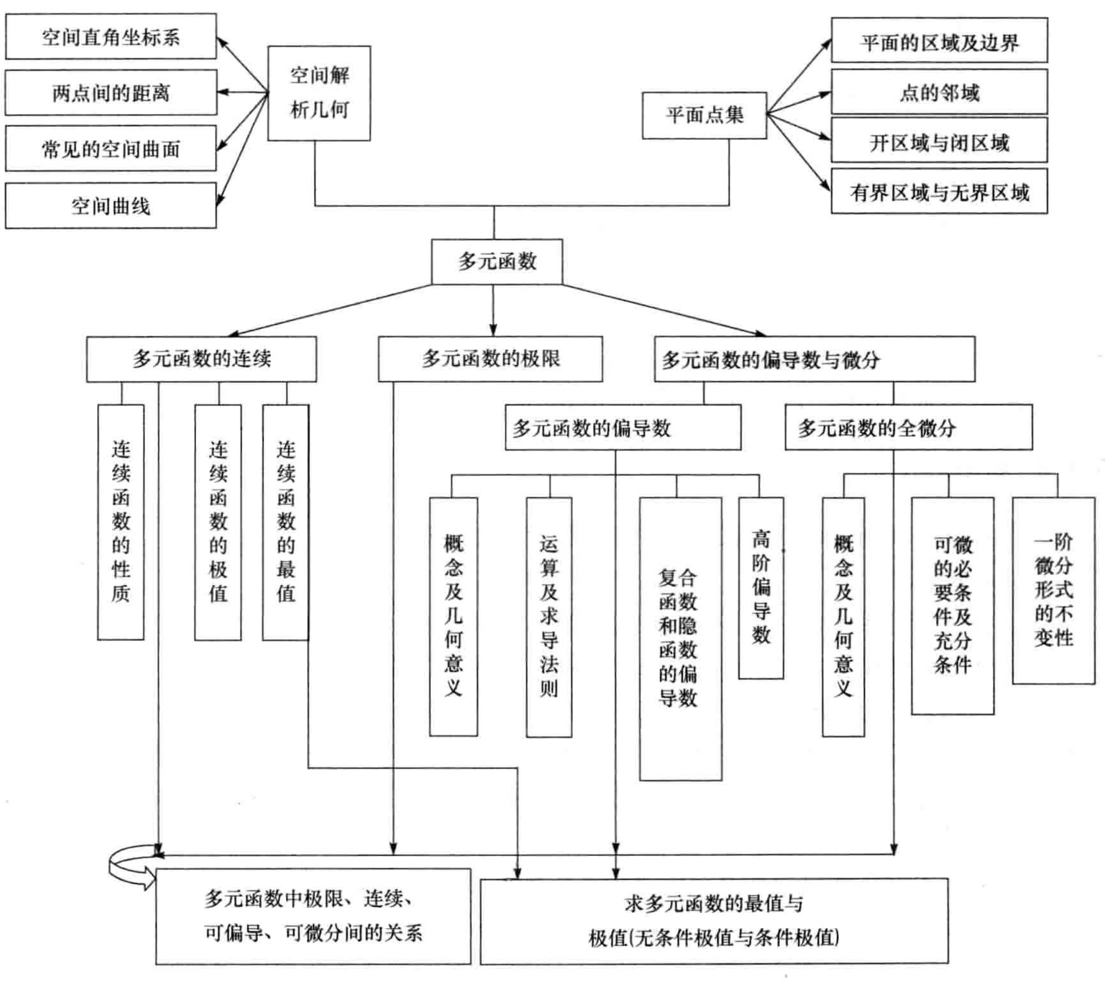
目　录

第 7 章　多元函数微分学

本章数学三考点

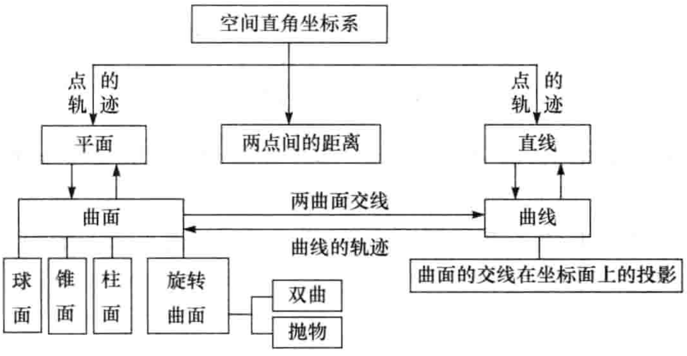
多元函数的概念，二元函数的几何意义，二元函数的极限与连续的概念，有界闭区域上二元连续函数的性质，多元函数的偏导数与计算，多元复合函数、隐函数的求导法，二阶偏导数，全微分，多元函数的极值和条件极值，多元函数的最大值和最小值.

本章知识结构



7.1　空间解析几何基本知识

本节教材知识结构



7.1.1　学习要求

1. 理解空间直角坐标系的概念及空间基本元素(点、线与数组、方程或函数)的对应关系;

2. 掌握两点间距离公式;

3. 理解曲面方程的概念,了解常见的空间曲面(平面、球面、柱面、旋转曲面、马鞍面等)、方程的建立与图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程;

4. 了解曲面的交线在坐标面上的投影,并会求其方程.

重点　会求空间坐标系下特殊点的坐标,掌握两点间距离公式,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

难点　识别常用的二次曲面方程,能用截痕法研究二次曲面的性质.

7.1.2　疑难解答

1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下,空间基本元素怎么表示?

(1) 点的表示.

空间直角坐标系中任一点 M 与有序数组(x,y,z)之间可建立一一对应关系,称有序数组(x,y,z)为点 M 的坐标,记为 $M(x,y,z)$. 特别地,原点 O 的坐标为$(0,0,0)$.

坐标轴和坐标面上的点的坐标各有一定的特征,即坐标轴上的点至少有两个坐标为 0,坐标面上的点至少有一个坐标为 0. 例如,x 轴上的点,都有 $y=z=0$;y 轴上的点,都有 $x=z=0$;z 轴上的点,都有 $x=y=0$. xy 坐标面上的点,都有 $z=0$;yz 坐标面上的点,都有 $x=0$;zx 坐标面上的点,都有 $y=0$.

注　有序数组与空间的点的一一对应是几何问题代数化或代数问题几何化即数形结合的基础. 从轨迹的角度看点 M 运动的轨迹可成面、线,而从代数的角度看点 $M(x,y,z)$ 运动的轨迹可成方程 $F(x,y,z)=0$ 或函数 $z=f(x,y)$,于是将空间的基本元素点、线、面与代数中的数组、方程(或函数)联系起来,实现了它们相互间的转化,这是解析几何的基本思想,也是本节讨论问题的基本出发点.

(2) 面的表示.

对于空间中的曲面 Σ 上任意点 M 的坐标 (x,y,z) 与一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 有如下关系：

(i) 曲面 Σ 上的任意点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

(ii) 不在曲面 Σ 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$，则称方程 $F(x,y,z)=0$ 是曲面 Σ 的方程，而曲面 Σ 是此方程的图形.

(3) 线的表示.

空间曲线 Γ 可以看成是两个曲面的交线. 若两个曲面的方程为 $F_1(x,y,z)=0$ 和 $F_2(x,y,z)=0$，则其交线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

注　通过一条曲线可以作无数个曲面，任取其中两个都可表示这条空间曲线，因此表示曲线的方程组形式不唯一.

2. 学习空间解析几何要注意哪些问题？

空间解析几何的基本手段是空间直角坐标系及曲面、曲线的方程. 空间中点的坐标为 (x,y,z)，比平面解析几何中多了一个 z 坐标，从而使得两者有较大的差别. 例如，平面解析几何中的直线方程为 $Ax+By+C=0$，而空间解析几何中三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示一个平面，空间中的直线通常要用两个三元一次方程联立表示；又如，平面上两点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$ 间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

而空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2};$$

再如，平面曲线可表为方程 $y=f(x)$ 或隐式方程 $F(x,y)=0$，而在空间解析几何中这些方程却表示母线平行于 z 轴的柱面等.

空间的曲面、曲线及其相互位置关系要具体画出来是有一定难度的，这就需要通过学习空间解析几何培养一定的空间想象力.

3. 常见的空间曲面及其方程有何特征？

(1) 平面.

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$，其中常数 A,B,C 不全为零.

注　当 $D=0$ 时，平面过原点；当 A,B,C 中有一个为零时，如 $A=0$，平面平行于 x 轴，特别地，若 $D=0$，平面过 x 轴；当 A,B,C 中有两个为零时，如 $A=B=0$，方程为 $Cz+D=0$，平面平行于 xy 坐标面，特别地，若 $D=0$，平面为 xy 坐标面.

截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，其中 a,b 和 c 分别为平面在 x 轴、y 轴和 z 轴上的截距.

(2) 球面.

以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心、R 为半径的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

特别地，球心在坐标原点，半径为 R 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

(3) 柱面.

准线 $C:\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为 xy 坐标面上的曲线,母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x,y)=0$. 读者可以类似地写出母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面方程.

(4) 旋转曲面.

母线 $C:\begin{cases}F(y,z)=0,\\ x=0\end{cases}$ 为 yz 坐标面上的曲线,旋转轴为 z 轴的旋转曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

一般地,当坐标面上的曲线 C 绕着该坐标面上的一条坐标轴旋转时,为了求出这个旋转曲面的方程,只要将曲线 C 的方程中保留和旋转轴同名的坐标,而用其他两个坐标平方和的平方根来代替方程中的另一坐标即可.

读者很容易指出方程 $z=x^2+y^2$, $z^2=x^2+y^2$ 所表示的曲面名称.

4. 怎么求解空间曲线的投影柱面和投影曲线方程?

以空间曲线 Γ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 Γ 关于 xy 坐标面的投影柱面,投影柱面与 xy 坐标面的交线 C 称为曲线 Γ 在 xy 坐标面上的投影曲线. 所以先将曲线 Γ 的方程 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的 z 消去,即得曲线 Γ 关于 xy 坐标面的投影柱面方程 $G(x,y)=0$,而其投影曲线的方程为 $\begin{cases}G(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$

读者可类似求解在 yz 坐标面和 zx 坐标面上的投影柱面和投影曲线的方程.

7.1.3 典型题型分析

题型Ⅰ 求动点的轨迹方程

例 1 过点 $(-3,1,2)$ 及 z 轴的平面方程__________.

解 答案: $x+3y=0$.

设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,其中常数 A,B,C 不全为零. 由题设平面过 z 轴,则所求平面方程为 $Ax+By=0$;将点 $(-3,1,2)$ 代入 $Ax+By=0$,得所求平面方程为 $x+3y=0$.

例 2 求过点 $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ $(abc\neq0)$ 的圆的方程.

解 设过已知三点、球心在 (x_0,y_0,z_0) 处且半径为 R 的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

将已知三点 $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ 代入上述方程,得

$$\begin{cases}(a-x_0)^2+y_0^2+z_0^2=R^2,\\ x_0^2+(b-y_0)^2+z_0^2=R^2,\\ x_0^2+y_0^2+(c-z_0)^2=R^2,\end{cases}$$

取 $y_0=0$,解得 $x_0=\dfrac{a^2-b^2}{2a}$, $z_0=\dfrac{c^2-b^2}{2c}$, $R^2=\left(\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{c^2-b^2}{2c}\right)^2$,则可求得一个过已知三点的球面方程为

$$\left(x-\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{c^2-b^2}{2c}\right)^2=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2+\left(\frac{c^2-b^2}{2c}\right)^2.$$

而过已知三点的平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. 故所求圆的方程为

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)^2+y^2+\left(z-\dfrac{c^2-b^2}{2c}\right)^2=\left(\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{c^2-b^2}{2c}\right)^2,\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.\end{cases}$$

注 一球面与一平面的交线是一个圆,这是解答本题的一个基本思想,过三点有无穷多个球面,此题取的是 $y_0=0$ 的一个特殊球面,进而使问题得以解决.

题型Ⅱ 求旋转曲面方程

例 3 在 xz 坐标面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为__________.

解 答案:$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$.

题型Ⅲ 常见二次曲面的标准方程及作图问题

例 4 就 p,q 的各种情况说明二次曲面 $z=x^2+py^2+qz^2$ 的类型,并作出简图.

解 此例中图略,读者可参见教材.

(1) 当 $p=q=0$ 时,方程化为 $z=x^2$,此时曲面为抛物柱面.

(2) 当 $q=0,p\neq 0$ 时,方程为 $z=x^2+py^2$. 若 $p>0$,曲面为椭圆抛物面;若 $p<0$,曲面为双曲抛物面.

(3) 当 $p=0,q\neq 0$ 时,若 $q=a^2>0$,则方程可化为$\left(az-\frac{1}{2a}\right)^2-x^2=\frac{1}{4a^2}$,曲面为椭圆柱面;若 $q=-a^2<0$,曲面为双曲柱面.

(4) 当 $p\cdot q\neq 0$ 时,若 $p=a^2>0,q=b^2>0$,则方程可化为 $x^2+a^2y^2+\left(bz-\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{1}{4b^2}$,曲面为椭球面;若 $p=-a^2<0,q=-b^2<0$,则方程可化为 $a^2y^2+\left(bz-\frac{1}{2b}\right)^2-x^2=\frac{1}{4b^2}$,曲面为单叶双曲面;若 $p=a^2>0,q=-b^2<0$,则方程可化为 $x^2+a^2y^2-\left(bz-\frac{1}{2b}\right)^2=-\frac{1}{4b^2}$,曲面为双叶双曲面;若 $p=-a^2<0,q=b^2>0$,则方程可化为 $x^2-a^2y^2+\left(bz-\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{1}{4b^2}$,曲面为单叶双曲面.

注 会识别常用的二次曲面方程,能用截痕法研究二次曲面的性质.

题型Ⅳ 空间曲线的投影柱面和投影曲线

例 5 求椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与抛物柱面 $z=2-x^2$ 的交线关于 xy 坐标面的投影柱面和在 xy 坐标面上的投影曲线的方程.

解 由$\begin{cases}z=x^2+2y^2,\\ z=2-x^2\end{cases}$消去 z,得所求投影柱面方程 $x^2+y^2=1$,从而所求投影曲线为 xy 坐

标面上的一个圆

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

7.1.4 习题 7.1 解析

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(2,3,-1),\quad B(4,-3,5),\quad C(2,-3,-4),\quad D(-2,-3,1),$$

并求点 $A(1,3,-1)$ 分别到(1)坐标原点;(2)各坐标轴;(3)各坐标面的距离.

解 A 点在第Ⅴ卦限;B 点在第Ⅳ卦限;C 点在第Ⅷ卦限;D 点在第Ⅲ卦限.

(1) A 到坐标原点的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{14}$.

(2) A 到 x 轴的距离为 $\sqrt{(2-2)^2+(3-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{10}$;

A 到 y 轴的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(3-3)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$;

A 到 z 轴的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{13}$.

(3) A 到坐标面 xy 的距离为 $\sqrt{(2-2)^2+(3-3)^2+(-1-0)^2}=1$;

A 到坐标面 yz 的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(3-3)^2+(-1+1)^2}=2$;

A 到坐标面 xz 的距离为 $\sqrt{(2-2)^2+(3-0)^2+(-1+1)^2}=3$.

2. 求点 $A(3,1,2)$ 关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 关于 xy 坐标面、yz 坐标面、xz 坐标面对称的点的坐标分别为 $(3,1,-2)$,$(-3,1,2)$,$(3,-1,2)$;

(2) 关于 x 轴、y 轴、z 轴的对称点的坐标分别为 $(3,-1,-2)$,$(-3,1,-2)$,$(-3,-1,2)$;

(3) 关于坐标原点的对称点的坐标是 $(-3,-1,-2)$.

3. 在 yz 平面上求与三已知点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解 因为所求点在 yz 平面上,所以设该点为 $M(0,y,z)$,由题意有

$$|MA|=|MB|=|MC|,$$

即

$$\begin{aligned}\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}&=\sqrt{(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2}\\&=\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2},\end{aligned}$$

解得 $y=1,z=-2$,于是所求点为 $M(0,1,-2)$.

4. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心,通过坐标原点的球面方程.

解 球面半径 $R=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$,则球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14,$$

即 $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$.

5. 指出下列各题中平面位置的特点,并画出各平面:

(1) $x=0$;　　(2) $z=1$;

(3) $x-2y=0$;　　(4) $x+2y=3$;

(5) $6x+5y-z=0$;　　(6) $x+y+z=3$.

解 (1) yz 坐标面;　　(2) 平行于 xy 坐标面的平面;

(3) 通过 z 轴的平面;　　(4) 平行于 z 轴的平面;

(5) 通过原点的平面；　(6) 平面在三个坐标轴上的截距都为 3.

图略.

6. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x=1$；　(2) $x^2+y^2=4$；

(3) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$；　(4) $z=y^2$.

解　(1) $x=1$ 在平面解析几何中表示平行于 y 轴且与 y 轴距离为 1 的一条直线；在空间解析几何中表示平行于 yz 坐标面且与 yz 坐标面距离为 1 的平面(图 7.1.1).

(2) $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点且半径为 2 的圆；在空间解析几何中表示以 xy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=4$ 为准线而母线平行于 z 轴的圆柱面(图 7.1.2).

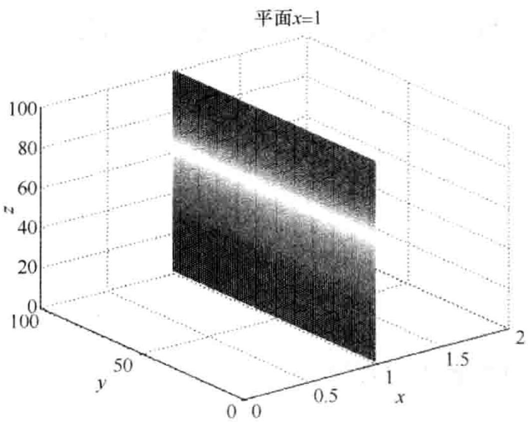


图 7.1.1

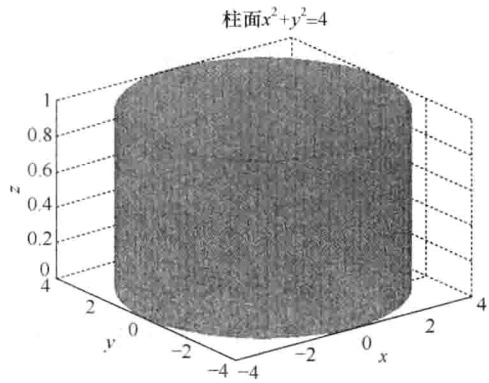


图 7.1.2

(3) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在平面解析几何中表示实半轴长为 3、虚半轴长为 2 的双曲线；在空间解析几何中表示以 xy 坐标面上的双曲线 $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 为准线而母线平行于 z 轴的双曲柱面(图 7.1.3).

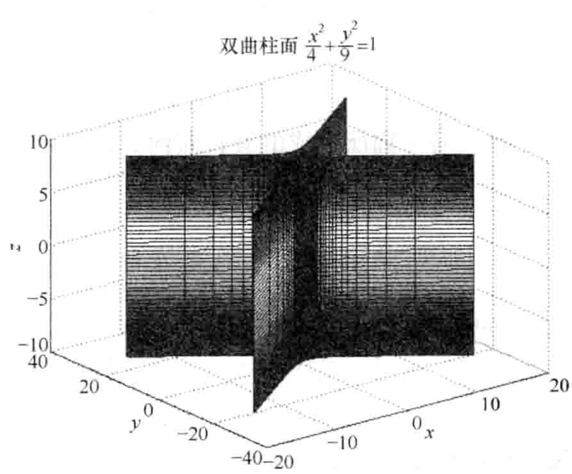


图 7.1.3

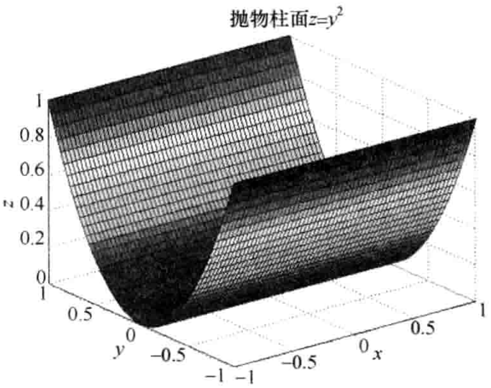


图 7.1.4

(4) $z=y^2$ 在平面解析几何中表示抛物线；在空间解析几何中表示以 yz 坐标面上的抛物线为准线而母线平行于 x 轴的抛物柱面(图 7.1.4).

7. 求下列各题中旋转曲面的方程：

(1) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1,\\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴及 z 轴旋转一周；

(2) $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴及 y 轴旋转一周.

解 (1) 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2}{4}=1,$$

即

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1.$$

椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$\frac{(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1,$$

即

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1.$$

(2) 双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$x^2-(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=1,$$

即

$$x^2-y^2-z^2=1.$$

双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为

$$(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-y^2=1,$$

即

$$x^2-y^2+z^2=1.$$

8. 指出下列方程所表示的曲面的名称，并作简图：

(1) $x^2+2y^2=1$；　　(2) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$；

(3) $2x^2+2y^2=z$；　　(4) $x^2-y^2=z^2$.

解 (1) 平行于 z 轴的椭圆柱面(图 7.1.5)；

(2) 球面(图 7.1.6)；

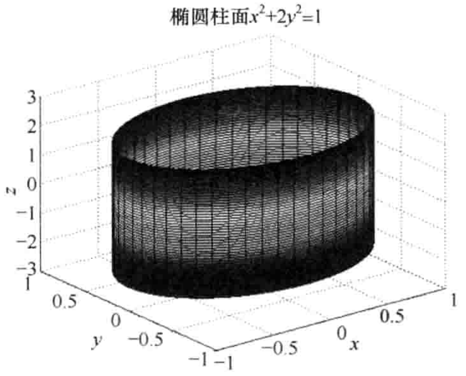


图 7.1.5

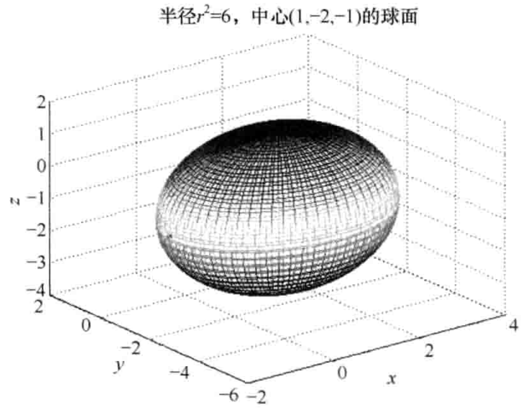


图 7.1.6

(3) 旋转抛物面，由 yz(或 xz)坐标面上的曲线 $z=2y^2$(或 $z=2x^2$)绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面(图 7.1.7)；

(4) 圆锥面，由 xz(或 xy)坐标面上的直线 $z=\pm x$(或 $y=\pm x$)绕 x 轴旋转一周而成(图 7.1.8).

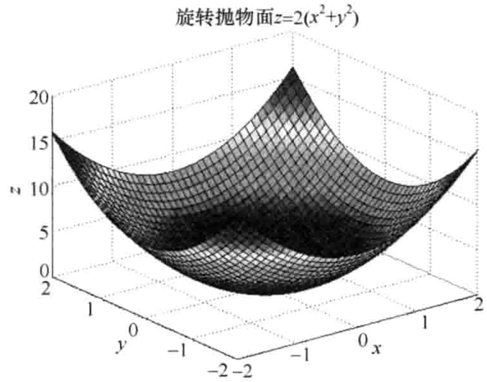


图 7.1.7

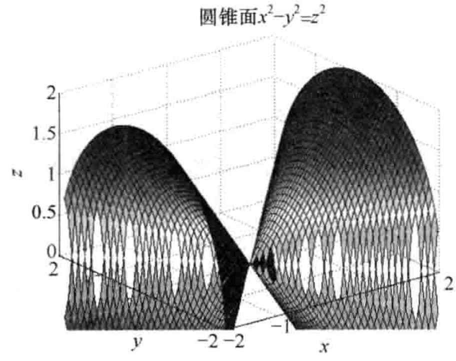


图 7.1.8

9. 求下列各题中曲线在指定坐标面上的投影曲线的方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ y=x \end{cases}$ 在 xy 坐标面、yz 坐标面；

(2) $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 在 yz 坐标面、zx 坐标面.

解 (1) $\begin{cases} y=x, \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} z=2y^2, \\ x=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3y^2-z^2=16, \\ x=0, \end{cases}$ $|z|\leqslant 4$; $\begin{cases} 3x^2+2z^2=16, \\ y=0. \end{cases}$

10. 描绘下列各组曲面在第Ⅰ卦限内所围成的立体的图形：

(1) $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$；

(2) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$.

解　(1)题图形如图 7.1.9 所示,(2)题图形如图 7.1.10 所示.

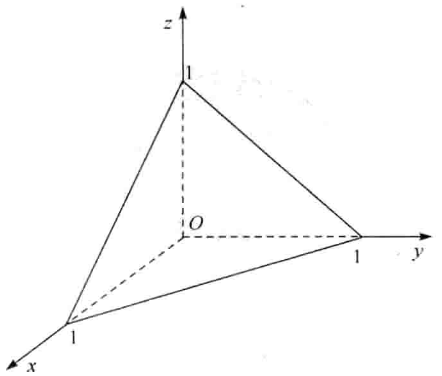


图 7.1.9

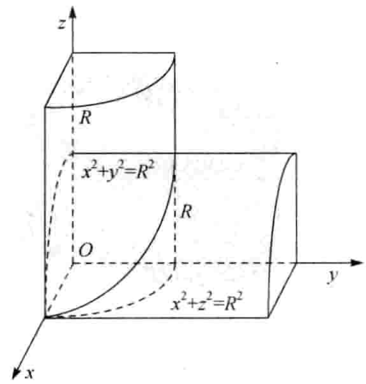


图 7.1.10

11. 由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和圆锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成一个立体,求它在 xy 面上的投影曲线.

解　将上半球面和圆锥面的方程联立得到方程组

$$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

在该方程组中,消去 z,得到 $x^2+y^2=1$. 这是准线为 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 且母线平行于 z 轴的柱面,且它在 xy 面上的投影是 xy 面上的一个圆,所以两个已知曲面围成的立体在 xy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

7.2　多元函数的基本概念

本节教材知识结构