Degasperis-Procesi方程的控制问题

宗西举 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

济南大学出版基金资助

Degasperis－Procesi方程的控制问题

宗西举　著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书共7章，系统地介绍了 Degasperis - Procesi 方程的最新控制理论以及指数能稳的结果。内容包括线性无穷维系统的能控性，线性无穷维系统的能稳性，Degasperis - Procesi 方程的能控性和能稳性，二元 Degasperis - Procesi 方程的控制问题，Degasperis - Procesi 方程的最优控制问题等。

本书可作为高等院校自动化以及相关专业师生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

Degasperis - Procesi 方程的控制问题 / 宗西举著.
—北京：国防工业出版社，2014.6
ISBN 978 - 7 - 118 - 09420 - 6

Ⅰ.①D... Ⅱ.①宗... Ⅲ.①自动控制理论 - 研究
Ⅳ.①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 110862 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
北京京华虎彩印刷有限公司
新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 **印张** 16½ **字数** 292 千字
2014 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 **定价** 68.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前 言

无穷维系统现在是一个成熟的研究领域,状态空间理论包含了半群理论,Cauchy 问题,能控性、能观性、能稳性问题,这些与有限维控制系统的理论是非常类似的。本书第一次详细、系统地介绍 Degasperis - Procesi 方程的最新控制理论以及指数能稳的结果。对于常微分方程系统控制理论知识掌握较好的学生,通过仔细阅读本书的定义、主要定理和相关例子,可以从中更好地掌握无穷维系统控制理论的精髓。

笔者最近几年一直关注无穷维控制系统理论的发展,并一直从事无穷维控制系统理论的科学研究,因为许多实际应用中,一大类系统是用无穷维控制系统描述的。

在此感谢济南大学自动化与电气工程学院控制理论与信号处理研究中心提供了宝贵的机会编写本书,感谢跟我们学习的热情的研究生同学们。另外,我们非常难忘 2013 年春季跟研究生们一起度过的美好时光。他们指出了本书练习中的许多错误之处,提出的建设性的建议对本书最终顺利出版给予了极大的推动作用。另外,还要感谢我的同事审阅了本书的原稿,在修订过程中提出了宝贵的建议;衷心地感谢张勇教授、刘希民教授、程新功教授和王中华教授给我的鼓励和支持;感谢我们的学生;最后,感谢我的妻子和儿子,是他们给了我充分的理解和支持,我才顺利完成本书。

我对无穷维控制系统的理解也在不断的深入,也尝试着使用书中提到的方法来指导自己的研究工作,开始了我自己的无穷维控制系统研究之旅。

感谢国防工业出版社,让我们能够有机会出版此书。最后由于水平所限,直到定稿前我们又发现了若干不足之处,相信细心的读者会发现更多问题。若是对此书有任何意见、建议的,可以反馈给我,不胜感激!

国家自然科学基金资助(编号 11201179)。

济南大学出版基金资助。

宗西举

2014 年 2 月于济南

符　号

$\oplus$　$\mathbf{Z}_1 \oplus \mathbf{Z}_2$，$\mathbf{Z}_1$ 和 $\mathbf{Z}_2$ 的直和

$>$　$Q_1 > Q_2$，算子 Q_1 大于算子 Q_2

$\geqslant$　$Q_1 \geqslant Q_2$，算子 Q_1 大于或等于算子 Q_2

$<\cdot,\cdot>$　$<u, v>$，u 和 v 的内积

$\|\cdot\|$　$\|z\|$，z 的范数

$\overline{V}$　V 的闭包

$\perp$　$V^{\perp}$，V 的正交补集，$x \perp y \Leftrightarrow <x, y> = 0$

$*$　$X*$，X 的对偶空间或者对偶算子

$\rightarrow$　$V \rightarrow X$，连续稠密嵌入

$\hat{\mathcal{A}}(\beta)$　$\mathcal{A}(\beta)$ 的 Laplace 变换集

$\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$　所有的 $\beta_1 < \beta_1$ 的 $\mathcal{A}(\beta_1)$ 并集

$\hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta)$　所有 $\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$ 中的函数构成的集合，通常在 $\overline{\mathbb{C}_\beta^+}$ 中从 0 到 ∞ 有界

$\mathcal{B}^\tau$　$[0, \tau]$ 上的能控性映射

$\mathcal{B}^\infty$　$[0, \infty)$ 上的能控性映射

$\hat{\mathcal{B}}(\beta)$　$\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)[\hat{\mathcal{A}}_\infty(\beta)]^{-1}$ 上的能控性映射

$\mathbb{C}$　复数域

$\mathbb{C}(s)$　复系数有理函数集合

$\mathbb{C}_p(s)$　正则的复系数有理函数集合

$\mathbb{C}_\beta^+$　所有的实部大于 β 的复数集合

$\overline{\mathbb{C}_\beta^+}$　所有的实部大于或者等于 β 的复数集合

$\mathbb{C}_\beta^-$　所有的实部小于 β 的复数集合

$C[0, 1]$　从 $[0, 1]$ 到 $\mathbb{C}$ 上的连续函数集合

$C([a, b]; X)$　从 $[a, b]$ 到 X 上的连续函数集合

$C^1([0, \tau]; Z)$　从 $[0, \tau]$ 到 $\mathbf{Z}$ 上的连续可微的函数集合

$\mathcal{C}^\tau$　$[0, \tau]$ 上的能观性映射

$\mathcal{C}^\infty$　$[0, \infty)$ 上的能观性映射

$\mathbf{D}(T)$　T 的定义域
$\mathbb{D}$　单位圆盘
H_G　符号 G 的 Hankel 算子
$\mathbf{H}_\infty$　定义在$\mathbb{C}_0^+$中取值在$\mathbb{C}$中的正则函数的 Hardy 空间
$\mathbf{H}_\infty(\mathbb{D})$　定义在$\mathbb{D}$中取值在$\mathbb{C}$中的正则函数的 Hardy 空间
$\mathbf{H}_\infty(\mathbb{D};\mathbb{C}^{k\times m})$ 定义在$\mathbb{D}$中取值在$\mathbb{C}^{k\times m}$中的正则函数的 Hardy 空间
$\mathbf{H}_\infty(X)$　定义在$\mathbb{C}_0^+$中取值在 X 中的正则函数的 Hardy 空间
$\mathbf{H}_\infty^-(\beta)$　$\mathbf{H}_\infty$ 的子集
$\mathbf{H}_\infty[\mathrm{H}_\infty]^{-1}$　$\mathbf{H}_\infty$空间的商域
$\mathbf{H}_2$　定义在$\mathbb{C}_0^+$中取值在$\mathbb{C}$中的平方可积函数的 Hardy 空间
$\mathbf{H}_2(\mathbb{D})$　定义在$\mathbb{D}$中取值在$\mathbb{C}$中的平方可积函数的 Hardy 空间
$\mathbf{H}_2(\mathbb{D};\mathbb{C}^m)$ 定义在$\mathbb{D}$中取值在$\mathbb{C}^m$中的平方可积函数的 Hardy 空间
$\mathbf{H}_2(\mathbf{Z})$　定义在$\mathbb{C}_0^+$中取值在 X 中的平方可积函数的 Hardy 空间
I_δ　近似单位算子
$J(z_0;\ t_0,\ t_e,\ u)$　$[t_0,\ t_e]$上的最优性能指标泛函
ker　算子 T 的核
L_B^τ　系统 $\sum(A,B,-)$ 在$[0,\ \tau]$上的能控性 Gram 矩阵
L_C^τ　系统 $\sum(A,-,C)$ 在$[0,\ \tau]$上的能观性 Gram 矩阵
$\mathbf{L}(\Omega;\mathbf{Z})$　从 Ω 到 $\mathbf{Z}$ 的 Lebesgue 可测函数类
$\mathbf{L}_\infty(a,\ b)$　从$[a,\ b]$到$\mathbb{C}$的 Lebesgue 可测函数类
$\mathbf{L}_\infty(\Omega;\mathbf{Z})$　从 Ω 到 $\mathbf{Z}$ 的有界可测函数类
$\mathbf{L}_\infty(\partial\mathbb{D};\mathbb{C}^{k\times m})$　从$\partial\mathbb{D}$到$\mathbb{C}^{k\times m}$的有界可测函数类
$\mathbf{L}_p(a,\ b)$　满足$\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t$ 的 Lebesgue 可测的复值函数类
$\mathbf{L}_p(\Omega;\mathbf{Z})$　满足$\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t$、取值在 $\mathbf{Z}$ 中的 Lebesgue 可测函数类
$\mathbf{L}_2((-j\infty,\ j\infty);\mathbf{Z})$　$\mathbf{L}_p(\Omega;\mathbf{Z}),\ p=2, \Omega=(-j\infty,\ j\infty)$
$\mathbf{L}_2(\partial\mathbb{D})$　$\mathbf{L}_p(\Omega;\mathbf{Z}),\ p=2,\ \Omega=\partial\mathbb{D},\mathbf{Z}=\mathbb{C}$
$\mathbf{L}_2(\partial\mathbb{D};\mathbb{C}^m)$ $\mathbf{L}_p(\Omega;\mathbf{Z}),\ p=2, \Omega=\partial\mathbb{D},\mathbf{Z}=\mathbb{C}^m$
$\mathbf{L}_2^{loc}([0,\infty);\mathbf{U})$　对任意的 $a,\ b\in[0,\infty)\mathbf{L}_2((a,\ b);\mathbf{U})$中的函数类
$\mathcal{L}(\mathbf{X})$　从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{X}$ 的线性有界算子
$\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$　从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的线性有界算子
l_p　满足 $\sum_{n=1}^{\infty} < \infty$ 的复序列

l_∞　有界复序列

$\mathcal{M}\mathcal{A}$　元素在 $\mathcal{A}$ 中的矩阵集合

$\mathcal{M}\hat{\mathcal{A}}(\beta)$　元素在$\hat{\mathcal{A}}(\beta)$中的矩阵集合

$\mathcal{M}\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$　元素在$\hat{\mathcal{A}}_-(\beta)$中的矩阵集合

$\mathcal{M}\hat{\mathcal{B}}(\beta)$ 元素在$\hat{\mathcal{B}}(\beta)$中的矩阵集合

$\mathbf{M}_2([-h_p, 0];\mathbb{C}^n)$　$\mathbb{C}^n\oplus\mathbf{L}_2((-h_p, 0);\mathbb{C}^n)$

$\mathbb{N}$　正整数集

$\mathbf{P}(\Omega;\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2))$ 从 Ω 到 $\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)$的弱可测函数类

$\mathbf{P}_p(\Omega;\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2))$　从 Ω 到 $\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)$的弱可测函数类

$\mathbf{P}(\Omega;\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2))$　满足$\int_\Omega \| F(t) \|^p < \infty$,$\mathbf{P}_p(\Omega;\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2))$ 中的函数类

$\mathbf{P}_\infty(\Omega;\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2))$ 从 Ω 到 $\mathcal{L}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)$的有界弱可测函数类

$\mathbf{P}_\infty((-j\infty, j\infty);\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{Y}))$　从$(-j\infty, j\infty)$到 $\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{Y})$的有界弱可测函数类

$\mathbb{R}$　实数集

$\mathcal{R}$　能达集

$\mathcal{R}(\beta)$　β-稳定的、正则有理函数集

$\mathcal{R}^r(\beta)$　β-稳定的、实的、正则有理函数集

$\mathcal{R}_\infty(\beta)$　β-稳定的、双正则有理函数集

$\mathcal{R}^r_\infty(\beta)$　β-稳定的、实的、双正则有理函数集

$\mathbb{R}(s)$　实的有理函数

$\mathbb{R}_p(s)$　实的、正则有理函数

$\mathrm{ran}T$　算子 T 的值域

$r_\sigma(T)$　算子 T 的谱半径

$u^{\min}(\cdot;z_0, t_0, t_e)$　最优控制输入轨迹

$y^{\min}(\cdot;z_0, t_0, t_e)$　最优输出轨迹

$\mathbb{Z}$　整数集

$z^{\min}(\cdot;z_0, t_0, t_e)$　最优状态轨迹

$\partial\mathbb{D}$　单位圆盘

$\vec{\delta}_T(G,G_\Delta)$　有向分叉

$\Delta(\lambda)$　时滞微分系统的特征函数

Γ_h　与脉冲响应 h 相关的 Hankel 算子

$\rho(A)$　算子 A 的预解集

$\rho_\infty(A)$　$\rho(A)$包含区间$[r,\infty)$, $r\in\mathbb{R}$ 的部分

$\sum(A,B,C,D)$　状态线性系统

$\sum(A,B,C)$　状态线性系统，$D=0$

$\sum(A,B,-)$　状态线性系统，C 未定义

$\sum(A,-,C)$　状态线性系统，B 未定义

$\sum_d(A,B,C,D)$　离散状态线性系统

$\sigma(A)$　算子 A 的谱

$\sigma_c(A)$　算子 A 的连续谱

$\sigma_p(A)$　算子 A 的纯点谱

$\sigma_r(A)$　算子 A 的残谱(剩余谱)

$\sigma_\delta^+(A)$　$\sigma(A)\cap\overline{\mathbb{C}_\delta^+}$

$\sigma_\delta^-(A)$　$\sigma(A)\cap\mathbb{C}_\delta^-$

目　录

第1章　引　言

最近，Degasperis 和 Procesi 在研究一类非线性色散偏微分方程

$$u_t - \alpha^2 u_{txx} + c_0 u_x + \gamma u_{xxx} = (c_1 u^2 + c_2 u_x^2 + c_3 u u_{xxx})_x \tag{1.1}$$

（其中，α、γ、c_0、c_1、c_2 和 c_3 是任意的实常数）时发现，只有当 α、c_0、c_1、c_2 和 c_3 满足三种情况时，方程(1.1)才是渐近可积的。

当取 $\alpha = c_2 = c_3 = 0$ 时，方程(1.1)是著名的 Korteweg - de Vries 方程（K - dV方程）：

$$u_t + c_0 u_x + \gamma u_{xxx} = c_1 u_x^2 \tag{1.2}$$

式中：$u = u(x,t)$ 表示高出水平面浅水的自由表面的水波的高度；x 表示传播方向上的位移；t 表示时间。K - dV 方程是描述只在重力作用下的浅水自由表面波传播的数学模型。K - dV 方程最重要的性质：K - dV 方程是一个完全可积的无穷维 Hamilton 系统，它具有孤立子解。人们通过研究和实验发现浅水波理论中的另一个非常重要现象：在有限时间内浅水波会有爆破现象，即解本身连续有界，但它的斜率有奇性且在有限时间内无界。周期或非周期情形 K - dV 方程的初值问题（Cauchy 问题）已得到了广泛的研究。然而，K - dV 方程不能描述浅水波爆破现象，这是因为只要初始值 $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$，K - dV 方程的解将全局存在。

当取 $c_1 = -\dfrac{3c_3}{2\alpha^2}$ 和 $c_2 = \dfrac{c_3}{2}$ 时，方程(1.1)是 Camassa - Holm 方程（C - H 方程）：

$$u_t - u_{txx} + 2\omega u_x + 3uu_{xx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{1.3}$$

式中：$u = u(x,t)$ 表示 t 时刻 x 位置的浅水波的流速（或高出水平面的水波高度）；ω 是与浅水波的临界速度有关的常数；c_0 是和临界波速有关的非负参数。C - H 方程也是描述只在重力作用下的浅水自由表面波传播的另一种数学模型。另外，Dai[131] 用 Camassa - Holm 方程描述一个超弹性杆的振动模型。事实上，C - H 方程最早是由 Fuchssteiner 和 Fokas 用递归算子导出并作为一个抽象的具有双 Hamilton 结构的方程。Camassa 和 Holm 在建立浅水波的数学模型时导出了 C - H 方程，除了给出一个物理解释外，他们还观察到了 C - H 方程有

peakon 解,同时发现这些 peakon 解是孤立子,数值模拟支持他们的结果。因为 peakon 的孤立子能同时描述孤立子和波的爆破现象,所以,C – H 方程是第一个被发现能同时描述这两个现象的可积浅水波方程。

如果 $c_0>0$,C – H 方程(1.3)的孤立波是光滑的;如果 $c_0=0$,C – H 方程(1.3)的孤立波是尖峰孤立子,并且这些尖峰孤立子是轨道稳定的。总之,C – H 方程(1.3)仅有尖峰孤立子解和周期尖峰孤立子解,没有激波解和周期激波解。目前,C – H 方程(1.3)的初值问题(Cauchy 问题)、初边值问题(Initial – boundary Problem)的可解性、解的爆破(Blow – up)、孤立子和周期解的存在性问题等得到了极大的关注:2001 年 Rodriguez – Blanco[18]、2003 年 Danchin[19]、2004 年 McKean[20]、2004 年 Molinet[21]等分别研究了 C – H 方程初值问题的局部强解的适定性、强解的爆破和全局存在性。2007 年,Bressan 和 Constantin[22]证明了 C – H 方程初值问题的能量守恒全局弱解的存在和唯一性。在文献[23]中,作者在系统介绍能控性和渐近能稳性定义的基础上,详细介绍了在非线性系统能控性研究中常用的方法:返回(returning)方法,并在此基础上研究了 C – H 方程在分布控制作用下的能控性和渐近能稳性。Perrollaz[24]研究了有界区域上 C – H方程的边界控制作用下的渐近能稳性。2003 年郭柏灵和杨灵娥[25]、2004 年丁时进等[26]分别研究了半无界直线上 C – H 方程初边值问题的强解的局部适定性、强解的爆破和全局存在性。2004 年周勇[27]、2005 年殷朝阳[28]分别研究了 C – H 方程的周期情形下的初值问题解的爆破。Liu 等[29]研究了 C – H 方程初值问题的强解的全局存在性。2008 年,Escher 和 Yin[30]研究了 C – H 方程的带 Dirichlet 边界条件的初边值问题的强解的局部适定性、强解的爆破和全局存在性。2009 年,田立新等[31]研究了具有黏性项的 C – H 方程的最优控制的存在性问题。2010 年,田立新等[32]研究具有黏性项的 C – H 方程周期 peakon 解的轨道稳定性。殷朝阳等[33,34]研究了一类二元 Camassa – Holm 方程整体弱解的存在和整体解的爆破机制。2011 年,殷朝阳等[35]又给出了一定的条件下二元 Camassa – Holm 方程整体弱解的存在性。已经证明:如果初始值 $u_0\in H^r(\mathbb{R})$,$r>\dfrac{3}{2}$,Camassa – Holm 方程的解是局部适定的。

当取 $c_1=-2\dfrac{c_3}{\alpha^2}$和 $c_2=c_3$ 时,方程(1.1)是 Degasperis 和 Procesi 方程(D – P 方程):

$$u_t-u_{txx}+2\omega u_x+4uu_{xx}=3u_xu_{xx}+uu_{xxx} \tag{1.4}$$

式中:表示 t 时刻 x 方向浅水波的流速(或高出水平面的水波高度),是一个与浅水波的临界速度有关的常数。D – P 方程也是描述只在重力作用下的浅水自由表

面波传播的另一种数学模型。Degasperis、Holm 和 Hone[1]精确地构造了它的 Lax 对,证明了 D－P 方程是完全可积的,而且利用可逆变换揭示了 D－P 方程同 Kaup－Kupershmidt 机制中非负流的关系,得到了无穷多个守恒量。另外,Degasperis、Holm 和 Hone[1]证明方程(1.4)具有和 C－H 方程(极限情形)一样形式的 peakon 解,而且数值计算证明方程(1.4)的两个或多个 peakon 解相互作用后,它们仍保持原有各自的形状和大小,即具有孤立子现象。这表明方程(1.4)具有与 C－H 方程一样的孤立子和波的爆破两个重要性质。Lundmark 和 Szmigielski[2]利用反散射方法计算了 D－P 方程的 n－peakon 解。Vakhnenko[3]研究了方程(1.4)的周期解和孤立子解。Mustafa[4]证明了 D－P 方程的光滑解具有无限传播速度,即解在瞬间就失去了具有紧支集这一性质。Degasperis 和 Procesi[5]证明了 D－P 方程有非光滑解,而且这些解是由多个孤立子重叠产生的。Degasperi 还详细描述了 D－P 方程可积的有限维孤立子的动态特征,这一点是和 C－H 方程的多孤立子动态系统的不同之处。Yin[6-9]考虑了一系列关于特定初始条件的 D－P 方程的 Cauchy 问题的适定性。Liu 等[10]继续讨论了D－P方程解的爆破问题,给出了解的爆破机制的详细刻画。Coclite 和 Karlsen[11]研究了 D－P 方程的熵弱解(entropy weak solution)的存在性问题。Coclite 和 Karlsen 证明了至少存在一个弱解满足熵(entropy)不等式,并且把这些结果推广到广义的 D－P 方程[11,12]。在初始条件满足一定熵的条件下,Coclite 和 Karlsen 证明了相应弱解的整体存在性和唯一性,并给出了数值模拟[13]。Wazwaz[14]利用双曲函数方法研究了浅水波方程的贝壳状的孤波解。最近,浅水波方程 D－P 方程的研究推广到二元(2－component)D－P 方程的研究:

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + 4uu_x - 3u_x u_{xx} - uu_{xxx} + k_3 \bar{\rho}\bar{\rho}_x = 0 \\ \bar{\rho}_t + k_2 \bar{\rho}_x u + (k_1 + k_3)\bar{\rho} u_x = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

M. Yuen[15]研究了二元 D－P 方程的自相似爆破解的存在性。Jin 和 Guo 考虑了弱耗散的二元 D－P 方程解的爆破、整体存在性和无限传播性质。田立新等人研究了二元 D－P 方程的孤立子解(Soliton)、kink 解和 antikink 解,并考虑了二元 D－P 方程行波解的分叉问题[46]。最近,文献[48,49]研究了二元 D－P 方程的 Cauchy 问题,并给出了二元 D－P 方程解的局部存在性和强解的爆破判据。

实际上,浅水波不仅能产生在浅底的河流中,也可产生在深底的海洋中。海洋中最重要的浅水波是海啸,海啸是由巨大的初始干扰(如地震)产生的波长很大(大约几百千米)而高度很小的海洋波(参见文献[16])。海啸可对近海岸产生非常大的撞击和破坏,造成大量的人员伤亡和巨大的经济损失。例如2004 年

12 月印度洋海底地震引发了历史上导致人口死亡最多的大海啸,同时这次海啸也给全球的科学家提出了新的挑战:研究如何有效地进行监控、预报海啸,如何有效地控制海啸,以减少海啸给人们带来的损失。对海啸的整个过程的模拟,涉及到许多方面的问题和物理模型,比较著名的模型是 MOST 模型。目前许多国家的科学家开展了对海啸的模拟研究,多数对海啸问题的描述是采用长波的浅水波方程或经过修正的浅水波方程去近似,例如 Boussinesq 近似[17]、二维或三维的 Navier – Stock 近似。海啸对近海岸的撞击和破坏,相应于浅水波的爆破现象(强解的爆破)(参见文献[17])。由于系统是能量守恒的,浅水波的爆破现象实际上相当于在极短的时间内释放出大量的能量,会对水面上的漂浮物体(船只、海上石油勘探平台等)或者对海岸线上的建筑物造成严重破坏。因而,对海啸进行监测、预测和控制是非常必要和重要的,这对人类有效抵抗自然灾害有着深远的意义和不可估量的价值。

目前,对浅水波方程 D – P 方程(1.4)以及二元 D – P 方程(1.5)初值问题(Cauchy 问题)、初边值问题(Initial – boundary Problem)的可解性、解的爆破(Blow – up)、孤立子和周期解的存在性问题等经典问题已经得到深入和广泛的研究。爆破的产生会带来很大的危害,如何对 D – P 方程(1.4)以及二元 D – P 方程(1.5)解的爆破进行有效的控制显然更有理论价值和指导意义,这就促使我们有必要进一步考虑 D – P 方程(1.4)以及二元 D – P 方程(1.5)的控制问题。关于 D – P 方程(1.4)以及二元 D – P 方程(1.5)的能控性和渐近能稳性,即如何有效地控制 D – P 方程(1.4)以及二元 D – P 方程(1.5)解的爆破现象产生,是尚未解决的问题。

所以,本书拟对 D – P 方程(1.4)以及二元 D – P 方程(1.5)的能控性和渐近能稳性方面的一些新问题和未解决问题进行广泛深入的研究,如对 D – P 方程分布控制的能控性问题、定义在有限区域上的 D – P 方程边界控制的能控性、在某个静态反馈控制律的控制作用下闭环系统在某个平衡点处的全局渐近能稳性问题以及控制系统解的长时间性态(解的全局存在性和轨道稳定性)的研究,不仅有数学理论上的价值,也有重要的现实意义。

近来在数学与流体物理等方面的专著中,有很多作者研究浅水波方程C – H 方程和 D – P 方程的相关问题,包括初值问题(Cauchy 问题)、初边值问题(Initial – boundary Problem)的可解性、解的爆破(Blow – up)、孤立子和周期解的存在性问题等[2,6 – 10,18 – 22,25 – 30,32 – 34,41 – 49]。到目前为止,关于浅水波方程的研究大多关注经典的方程理论,对浅水波方程 C – H 方程和 D – P 方程的控制问题只有少数研究结果。近十几年,国外对 C – H 方程(1.3)的研究现状如下:

2004 年,Vakhnenko[12]研究了方程(1.4)的周期解和孤立子解。Yin[6]研究

了定义在整个实数轴上的 D－P 方程的 Cauchy 问题。殷朝阳[7]研究单位圆上 D－P 方程的 Cauchy 问题的适定性,得到关于初始条件局部适定性结果,以及最大存在时间的估计。另外,如果初始条件函数是奇函数且不变号,对应的 D－P 方程的 Cauchy 问题的强解在有限时间会发生爆破,否则,对应的 D－P 方程的 Cauchy 问题具有唯一的全局的强解。殷朝阳在他的另一篇文章[8]中考虑了D－P方程整体弱解的存在性与适定性问题。2006 年,Liu 和 Yin[10]研究了方程(1.4)初值问题的全局强解的全局存在性和爆破现象。殷朝阳[36]研究了方程(1.4)周期情形下的初值问题的局部强解的适定性、爆破和全局存在性。2006 年,田立新等[37]研究了方程(1.4)的 peakon 解和系统的分叉现象。2007 年,Yin、Escher 和 Liu[13]研究了方程(1.4)的周期情形下初值问题的强解的爆破。Escher 等[47]分别就 D－P 方程的局部强解爆破率(blow－up rate)问题和周期的 D－P 方程的爆破集刻画问题给出了详细阐述。宗西举[38]研究了方程(1.4)的周期情形在分布控制作用下问题强解的能稳性。2008 年,田立新等[39]考虑了具有黏性项的 D－P方程整体吸引子的存在性问题。2009 年,田立新等[40]研究了带有黏性项的 D－P 方程的边界控制问题。F. Guo[51,52]和 Z. Guo[43]分别研究了带有黏性强弱耗散项的 D－P 方程解的性质,讨论了局部解的存在性及爆破问题,给出了整体解存在的充分条件,并得到了 D－P 方程解的传播速度问题的结果。2010 年,Shen 和 Gao[44]研究了带有黏性弱耗散项的 D－P 方程最优控制问题解的存在性问题。2010 年,田立新等[46]考虑了二元 D－P 方程的孤立子解、kink 解和 antikink解以及二元 D－P 方程行波解的分叉问题。2011 年,田立新等[45]研究了广义的周期 D－P 方程解低正则性。Yuen[15]研究了二元 D－P 方程的自相似爆破解的存在性。L. Jin 和 Z. Guo[48]研究了二元 D－P 方程解的爆破机制、行波解和性质保持特性等。最近,殷朝阳等[49]研究了二元 D－P 方程的 Cauchy 问题,给出了非齐次 Besov 空间中解的局部适定性结果,并给出了两个新的二元 D－P 方程强解的爆破结果和精确爆破率结果。

相对于经典的方程理论,能控性与渐近能稳性的概念不仅能够刻画系统定性的行为,而且具有较强的实用性。因此,浅水波方程的控制问题得到了人们的重视和进一步的发展。目前,国内外对浅水波方程控制问题的研究已取得了不少结果,例如,已有学者尝试研究 K－dV 方程在分布控制和边界控制问题,得到许多结果,可参见文献[50,56]。针对 C－H 方程,已有学者尝试研究分布控制和边界控制问题,得到了初步的结果,可参见文献[23,24]。但是涉及 D－P 方程或者二元 D－P 方程的控制问题的结果并不多见,针对 D－P 方程或者二元 D－P方程仍然有如下控制方面的问题需要进一步研究:

(1) D－P 方程(1.4)在分布控制、边界控制作用下的能控性与渐近能

稳性；

(2) 有限区域[0,1]上 D－P 方程(1.4)在分布控制、边界控制作用下的能控性与渐近能稳性；

(3) 二元 D－P 方程(1.5)在分布控制、边界控制作用下的能控性与渐近能稳性。

首先，研究 D－P 方程(1.4)在分布控制作用下的能控性问题，并讨论在初始值属于合适的 Banach 空间时受控系统解的适定性。其次，研究有限区域[0,1]上方程(1.4)分别在不同的边界反馈控制作用下的渐近能稳性问题。然后，研究二元 D－P 方程(1.5)在分布控制作用下的能控性与渐近能稳性问题，并讨论在初始值属于合适的 Banach 空间时受控系统解的适定性。研究二元 D－P 方程(1.5)在不同的边界反馈控制作用下的能控性与渐近能稳性问题。对D－P 方程(1.4)和二元 D－P 方程(1.5)上述问题的研究，也构成了本书的主要依据和内容。总之，该项目不仅使我们在研究所需的数学理论和方法上有一定的创新，同时在方程的物理意义和分布参数控制系统的控制理论和方法上也将有一定的突破。因此，进一步深入研究浅水波方程的控制问题，不仅具有十分重要的数学理论意义，也具有潜在的现实和社会价值。

本书的主要内容：①D－P 方程(1.4)在分布控制作用下的能控性与渐近能稳性结果；②如果存在能够使系统在某个平衡点处是全局渐近稳定的 Dirichlet 边界反馈控制律，并从理论上给出证明，进一步研究合适 Neumann 边界控制闭环系统在某个平衡点处是全局渐近稳定的，在此基础上对施加控制作用后系统的解有较好的数值模拟，对控制算法的有效性进行验证。③二元 D－P 方程(1.5)在分布控制、边界控制作用下的能控性与渐近能稳性。

在研究分布控制作用下系统的能控性问题时，主要应用返回(returning)方法。返回方法是法国数学家 Jean－Michel Coron 研究有限维控制系统时提出的，其主要思想是寻找系统的一个特殊解，特别是那些从某一个平衡状态出发又回到某一个平衡状态的特殊解，在这些特殊解的附近，系统的线性化系统具有较好的能控性。自然地想到从 0 出发又回到 0 的特殊解，但是 D－P 方程在附近的线性化系统是不能控的，因为 D－P 方程在附近的线性化系统和 Benjamin－BonaMahony 方程在附近的线性化系统是一样的，而 Benjamin－Bona－Mahony 方程在附近的线性化系统是不能控的。那么就要寻找系统的一个特殊解，从 0 出发又回到 0 的特殊解，且在这些特殊解附近系统的线性化系统具有较好的能控性。考虑到 Galilean 变换，只要能选择一个合适的具有紧支撑在控制区域中的，而且可以 D－P 方程在分布控制器的作用下具有一个可以到达控制区域的特征线，那么这样的特殊解就是要找的，在附近系统的线性化系统具有较好的能