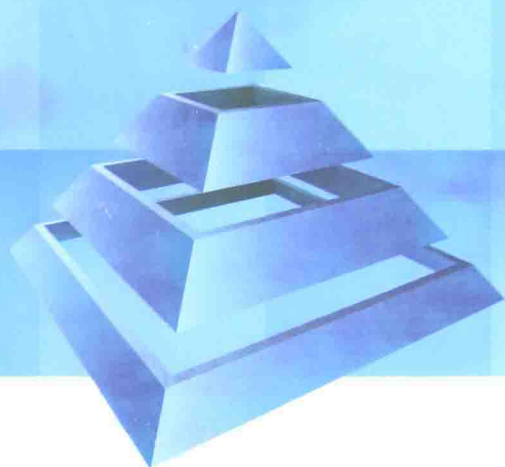




普通高等教育“十二五”规划教材
工 科 数 学 精 品 丛 书
蔡光兴 戴明强 主编
海 军 院 校 重 点 教 材



数学模型 及其应用

第二版

戴明强 宋业新 主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

蔡光兴 戴明强 主编

海军院校重点教材

数学模型及其应用

(第二版)



宋业新 主编

科学出版社

北京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

内 容 简 介

本书主要内容有:绪论、初等模型、微分方程模型、差分方程模型、综合评价模型、线性规划模型、动态规划模型、图论模型、排队论模型、数据的插值与拟合模型、回归分析模型、聚类分析与判别分析模型、中美大学数学建模竞赛真题等,每章后附习题和本章常用词汇中英文对照,完成教学约需40~60学时。

本书可作为理、工、农、医、经、管等专业的数学模型及相关课程教材,也可以作为教研工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学模型及其应用/戴明强,宋业新主编. —2版.

—北京:科学出版社,2015.2

(工科数学精品丛书/蔡光兴,戴明强主编)

普通高等教育“十二五”规划教材 海军院校重点教材

ISBN 978-7-03-043333-6

I.数… II.①戴… ②宋… III.①数学模型—高等学校—教材

IV.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第029399号

责任编辑:王雨舸 / 责任校对:董艳辉

责任印制:高 嵘 / 封面设计:苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年2月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2015年2月第 二 版 印张:21 1/4

2015年2月第一次印刷 字数:416 000

定价:46.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《工科数学精品丛书》序

工科学生毕业多年后时常感言,数学知识很多似乎没有派上用处,但数学训练、数学思想和精神,却无时无刻不在发挥着积极的作用,成为取得成功的最重要因素之一。

数学是一门高度抽象的学科,但是它非人类精神纯粹自由创造和想像,而是源于自然和工程问题,系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任,同时,掌握了数学的思想方法和精神实质,就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论,显示出无穷无尽的威力,工科数学创新教学,增强数学应用背景的讲授,拓宽学生的知识面,了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学与应用的窗口,等等,能培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到工科数学教学的目的。

工科数学精品教材的编写与成熟,在开放的视野与背景下,得到认同,自然成为纸质教材与数字出版的精品,从而得到广泛认可和使用。

在学会、领导和专家的关怀和指导下,本区域若干所全军重点、一本和省重点高校,其工科数学教材,在科学出版社出版和再版,10 余年以来,教学和教材理念从素质教育,到分类分层教学改革,到数学思想、方法与创新教育,历经各校几届班子和责任教授的共同努力,逐渐成熟,成为具有较高质量的核心精品。

慕课来势凶猛,教材转型大趋势赫然在前,教材出版经历新的考验,《工科数学精品丛书》正是按此理念和要求,直面开放的视野与背景,将改革与创新的成果汇集起来,重新审视和操作,精益求精,以赢得内容先机,修订版和新编教材均是如此。

修订和新编的核心理念,一是体现数学思维,将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用;二是深化改革与创新,面向开放和数字出版的大平台,赢得内容先机,营造精品。

《工科数学精品丛书》为工科数学课程教材:高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等,上述各课程大多为省级精品课程和军队优质课程,对应教材获省级教学成果奖和军队各级奖励。

丛书注重质量,讲究适用和教学实践性,体系相对完整与系统,加强应用性,按照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容。

丛书具有明确的指导思想:

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂。

(2) 注重教学创新,加强教学知识与内容的应用性,注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性,增强数学应用背景的介绍,拓宽学生的知识面,了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学与应用的窗口,培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到工科数学教学的目的.

(3) 融入现代数学思想(如数学建模),分别将 Mathematic、Matlab、Sas、Sps 等软件的计算方法,恰当地融入课程教学内容中,培养学生运用数学软件的能力.

(4) 强化学生的实验训练和动手能力,可将实验训练作为模块,列入附录,供教学选用或学生自学自练,使用者取舍也方便.

(5) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(6) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样.书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

丛书为科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材.

《工科数学精品丛书》编委会

2014 年 3 月

前 言

数学科学在实际中的重要地位和作用已广泛为人们所认识,它的生命力正在不断地增强,这主要是源于它的应用地位.各行各业和各科学领域都在运用数学,或建立在数学基础之上,正像人们所说的“数学无处不在”已成为无可争辩的事实.运用数学方法解决各种实际问题受到越来越多人们的重视.

用数学方法解决实际问题或者数学渗入其他学科领域乃至与其他学科结合形成交叉学科,首要和关键的一步是用数学的语言描述所研究的对象,即建立数学模型.在高科技特别是计算机技术迅猛发展的今天,计算和建模正成为数学科学技术转化的主要途径.正因为如此,数学建模全面进入大学课堂并逐渐融入主干数学课程教学成为大势所趋.自 1992 年开始的中国大学生数学建模竞赛的蓬勃发展,说明数学建模活动受到广泛的重视,并深刻地影响着大学数学教学,惠及越来越多的学子和科技工作者.

本书是编者在多年从事“数学建模”课程教学和组织指导大学生数学建模竞赛工作的基础上,总结多年教学与竞赛的经验并吸取大量参考资料的长处编写而成,可以作为本科生“数学建模”课程的教材,也可供相关专业研究生和技术人员从事研究工作参考之用.

本书为海军院校重点教材,它的出版得到了海军工程大学各级领导和机关的关心和支持,湖北省数学建模竞赛组委会专家组组长、武汉大学费浦生教授在百忙之中审阅了第 1 版全部书稿,提出许多指导性修改意见,并为书作序.在此,对他们的关心、支持和帮助表示衷心的感谢和敬意.本书参考了许多资料,因此,对于书末所列的参考书目的作者们也要表示真诚的感谢和敬意.

本书第 2 版的主要更新工作是更换了第 2、5 章和附录内容,改编了其他章节的少量内容,更换了部分例题.第 2 版的编写大纲由戴明强、宋业新、金裕红和胡伟文拟定,戴明强、宋业新任主编,胡伟文、金裕红、王胜兵、徐忠昌、黄登斌任副主编,第 1、6 章由戴明强编写,第 2 章由徐忠昌编写,第 3、4 章由王胜兵编写,第 5、7、8 章由宋业新编写,第 9、10 章由金裕红编写,第 11、12 章由胡伟文编写,附录由黄登斌编写,全书由戴明强统稿.

限于编者水平,不足之处在所难免,敬请批评指正.

编 者

2014 年 11 月于武汉

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 数学建模的重要意义	1
1.2 数学建模的基本方法和步骤	5
1.3 数学建模与能力的培养	8
习题 1	9
本章常用词汇中英文对照	10
第 2 章 初等模型	11
2.1 人行走的最佳频率	11
2.2 代表名额的公平分配	13
2.3 称重问题	18
2.4 效益的合理分配	22
2.5 量纲分析和无量纲化	25
习题 2	33
第 3 章 微分方程模型	35
3.1 微分方程有关知识简介	35
3.2 种群的群体增长模型	41
3.3 传染病模型	53
3.4 药物在体内的分布与排除	60
3.5 战争模型	63
3.6 经济增长模型	64
习题 3	67
本章常用词汇中英文对照	68
第 4 章 差分方程模型	69
4.1 差分方程简介	69
4.2 市场经济中的蛛网模型	73
4.3 差分形式的阻滞增长模型	76
习题 4	78
本章常用词汇中英文对照	79
第 5 章 综合评价模型	80
5.1 综合评价指标体系	80
5.2 综合评价数据处理	81

5.3 综合评价方法	88
5.4 层次分析模型	91
5.5 足球比赛的排名问题	102
习题 5	105
本章常用词汇中英文对照	105
第 6 章 线性规划模型	106
6.1 线性规划问题及模型	106
6.2 线性规划模型的求解	108
6.3 整数线性规划的求解	117
6.4 两辆铁路平板车问题的求解	120
6.5 最佳阵容问题	122
习题 6	130
本章常用词汇中英文对照	133
第 7 章 动态规划模型	134
7.1 多阶段决策过程与动态规划模型	134
7.2 动态规划基本方程与求解	139
7.3 背包问题	145
7.4 不确定性采购问题	148
7.5 马氏决策规划简介	150
习题 7	153
本章常用词汇中英文对照	154
第 8 章 图论模型	155
8.1 图与网络的基本概念	155
8.2 网络流问题	157
8.3 欧拉问题和哈密尔顿问题	168
8.4 选矿厂厂址的最佳选择	173
8.5 投资项目分配模型及其网络算法	174
习题 8	178
本章常用词汇中英文对照	180
第 9 章 排队论模型	181
9.1 排队论的基本知识	181
9.2 排队服务系统分类及其主要性质	185
9.3 排队问题的随机模拟求解法	194
9.4 矿石装卸模型的分析与模拟	198
习题 9	205
本章常用词汇中英文对照	205

第 10 章 数据的插值与拟合模型	206
10.1 多项式插值方法	206
10.2 样条逼近方法	208
10.3 水道测量数据分析模型	214
习题 10	217
本章常用词汇中英文对照	219
第 11 章 回归分析模型	220
11.1 一元线性回归	220
11.2 多元线性回归	229
11.3 一元非线性回归	233
11.4 回归模型应用举例	237
习题 11	243
本章常用词汇中英文对照	245
第 12 章 聚类分析与判别分析模型	247
12.1 距离和相似系数	247
12.2 系统聚类法	250
12.3 距离判别法	256
12.4 Fisher 判别法	260
习题 12	264
本章常用词汇中英文对照	266
参考文献	267
附录 A 中国大学生数学建模竞赛本科组题目(1992~2014)	268
附录 B 美国大学生数学建模竞赛题目(2011~2014)	314

第1章 绪 论

随着科学技术对研究对象的日益精确化、定量化、数学化以及电子计算技术的迅猛发展和广泛应用,对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说,数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁.例如,电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型,用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算,才能实现有效的过程控制;气象工作者为了得到准确的天气预报,也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型;生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化数学模型,就可以分析药物的疗效,有效地指导临床用药;城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型,为城市发展规划的决策提供科学根据;厂长经理们根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息,筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型,一定可以获得更大的经济效益;即便在日常活动(如访友、采购)中,人们也会讨论(也即建立数学模型)优化出行的路线等.数学模型业已成为处理科学技术领域中各种实际问题的重要工具,并在自然科学、工程技术科学与社会科学等各个领域中得到广泛应用.

1.1 数学建模的重要意义

1.1.1 什么是数学建模

对数学建模(mathematical modelling)如果一定要下一个定义的话,可以说它是一种数学的思考方法,是“对现实的现象通过心智活动构造出能抓住其重要且有用的特征的表示,常常是形象化的或符号的表示.”从科学、工程、经济、管理等角度看数学建模就是用数学的语言和方法,通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学工具.顾名思义,modelling 一词在英文中有“塑造艺术”的意思,故可以理解从不同的侧面、角度去考察问题就会有不尽相同的数学模型,从而数学建模的创造又带有一定的艺术的特点.而数学建模最重要的特点是要接受实践的检验、多次修改模型使之渐趋完善的过程,这可以用图 1-1 所示的框图来表示.

数学建模并不是新事物,只是在过去很长时间这一术语用得很少而已.可以说有了数学并要用数学去解决实际问题就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画该实际问题,而这种刻画的数学描述就是一个数学模型,其过程就是数学建模的过程.两千多年以前创立的欧几里得几何,17 世纪发现的牛顿万有引力定律,都是科

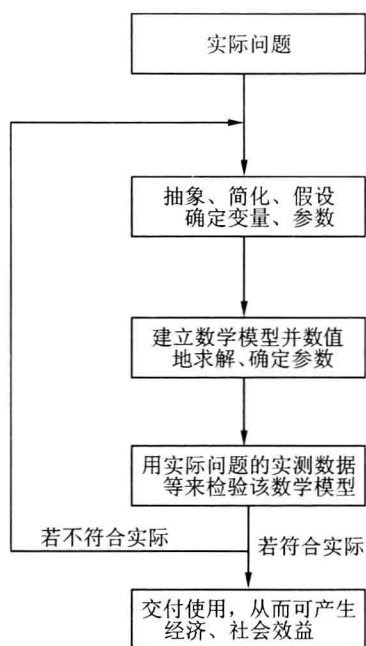


图 1-1 数学建模流程图

学发展史上数学建模的著名范例.

1.1.2 数学建模示例

如何控制并预测人口的发展是当前众多发展中国家面临的重要问题之一,因而对人口的控制和预测方面的研究工作越来越受有关政府和社会的重视.影响今后人口总数的因素很多,一般来说,要预测今后某时刻人口的总数是一个很复杂的问题.长期以来人们在这方面作了不少工作,下面介绍两个最基本的人口模型.

1. 指数增长模型

最简单的人口增长模型是人所共知的:记某年人口数为 x_0 , k 年后人口数为 x_k , 年增长率为 r , 则

$$x_k = x_0(1+r)^k \quad (1-1)$$

显然,这个公式的基本条件是年增长率 r 保持不变.

200 多年前英国人口学家马尔萨斯 (Malthus, 1766~1834) 调查了英国一百多年的人口统计资料,得出了人口增长率不变的假设,并据此建立了著名的人口指数增长模型.

记时刻 t 的人口数为 $x(t)$, 当考察一个国家或一个较大地区的人口数时, $x(t)$ 是一个很大的整数.为了利用微积分这一数学工具,将 $x(t)$ 视为连续、可微的函数.记初始时刻 ($t=0$) 的人口数为 x_0 , 假设人口增长率为常数 r , 即单位时间内 $x(t)$ 的增量等于 r 乘以 $x(t)$, 考虑 t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口数的增量,显然有

$$x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 得到 $x(t)$ 满足微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0 \quad (1-2)$$

由这个方程很容易解出

$$x(t) = x_0 e^{rt} \quad (1-3)$$

$r > 0$ 时, 式(1-3)表示人口数将按指数规律随时间无限增长, 称为指数增长模型. 式中的参数 r 和 x_0 可用历史数据进行估计.

历史上, 指数增长模型与 19 世纪以前欧洲一些地区人口统计数据可以很好地吻合, 迁往加拿大的欧洲移民后代人口数也大致符合这个模型. 另外, 用它作短期人口预测可以得到较好的结果. 显然, 这是因为在这些情况下, 模型的基本假设——人口增长率是常数——大致成立.

但是从长期来看,任何地区的人口数都不可能无限增长,即指数模型不能描述、也不能预测较长时期的人口演变过程.这是因为,人口增长率事实上是在不断地变化着.排除灾难、战争等特殊时期,一般说来,当人口数较少时,增长较快,即增长率较大;人口数增加到一定数量以后,增长就会慢下来,即增长率变小.

看来,为了使人口预报特别是长期预报更好地符合实际情况,必须修改指数增长模型关于人口增长率是常数这个基本假设.

2. 阻滞增长模型(Logistic 模型)

分析人口数增长到一定数量后增长率下降的主要原因,人们注意到,自然资源、环境条件等因素对人口数的增长起着阻滞作用,并且随着人口数的增加,阻滞作用越来越大.所谓阻滞增长模型就是考虑到这个因素,对指数增长模型的基本假设进行修改后得到的.

阻滞作用体现在对人口增长率 r 的影响上,使得 r 随着人口数量 x 的增加而下降,若将 r 表示为 x 的函数 $r(x)$,则它应是减函数,于是方程(1-2)可写作

$$\frac{dx}{dt} = r(x)x, \quad x(0) = x_0 \quad (1-4)$$

对 $r(x)$ 的一个最简单的假定是,设 $r(x)$ 为 x 的线性函数,即

$$r(x) = r - sx \quad (r > 0, s > 0) \quad (1-5)$$

这里 r 称固有增长率,表示人口数很少时(理论上是 $x=0$)的增长率.为了确定系数 s 的意义,引入自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量 x_m ,称人口容量.

当 $x = x_m$ 时人口数不再增长,即增长率 $r(x_m) = 0$,代入式(1-5)得 $s = \frac{r}{x_m}$,于是式(1-5)可改为

$$r(x) = r \left(1 - \frac{x}{x_m} \right) \quad (1-6)$$

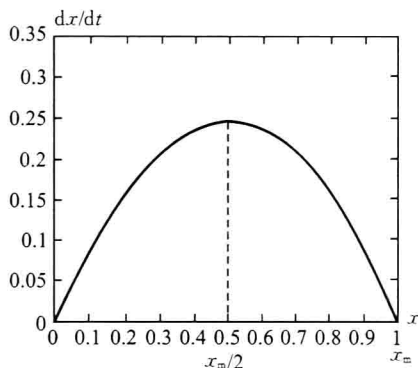
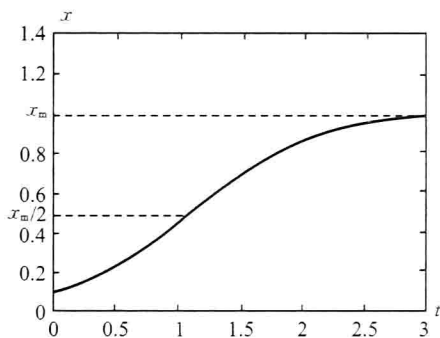
式(1-6)的另一种解释是,增长率 $r(x)$ 与人口数尚未实现部分的比例 $\frac{x_m - x}{x_m}$ 成正比,比例系数为固有增长率 r .

将式(1-6)代入方程(1-4),得

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{x_m} \right), \quad x(0) = x_0 \quad (1-7)$$

方程(1-7)右端的因子 rx 体现人口数自身的增长趋势,因子 $\left(1 - \frac{x}{x_m} \right)$ 则体现了资源和环境对人口增长的阻滞作用.显然, x 越大,前一因子越大,后一因子越小,人口增长是两个因子共同作用的结果.

如果以 x 为横轴、 $\frac{dx}{dt}$ 为纵轴作出方程(1-7)的图形(图 1-2),可以分析人口增长速度 $\frac{dx}{dt}$ 随着 x 的增加而变化的情况,从而大致地看出 $x(t)$ 的变化规律.

图 1-2 Logistic 模型 $\frac{dx}{dt} \sim x$ 曲线图 1-3 Logistic 模型 $x \sim t$ 曲线

实际上,方程(1-7)可以用分离变量法求解得到

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}} \quad (1-8)$$

读者可以用计算机画出式(1-8)的图形,它是一条 S 形曲线(图 1-3), x 的增加先快后慢, $t \rightarrow \infty$ 时 $x \rightarrow x_m$,拐点在 $x = \frac{x_m}{2}$.

使用这个模型预测美国的人口数,从 1820~1930 年,计算结果与实际结果都比较相符,但后来出现的误差越来越大,主要原因是 1960 年后的美国实际人口数就已经超过了过去确定的最大人口数量 x_m .这个模型的不足之处在于 x_m 不易确定.通常 x_m 的值应随生产力的发展和其他环境的改善而增加.

由方程(1-7)表示的阻滞增长模型,是荷兰生物数学家 Verhulst 于 19 世纪中叶提出的,它不仅能够大体上描述人口数及许多物种数量(如森林中的树木、鱼塘中的鱼群等)的变化规律,而且在社会经济领域也有广泛的应用,如耐用消费品的销售量就可以用它来描述.基于这个模型能够描述一些事物符合逻辑的客观规律,人们常称它为 Logistic 模型,本书以后的章节将多次用到它.

用数学工具描述人口变化规律,关键是对人口增长率作出合理、简化的假定.阻滞增长模型就是将指数增长模型关于人口增长率是常数的假设进行修正后得到的.可以想到,影响增长率的出生率和死亡率与年龄有关,所以,更合乎实际的人口模型应该考虑年龄因素.

参数估计和模型检验是建模的步骤,线性最小二乘法是参数估计(如果是基于数据的,又称数据拟合)的基本方法,读者应该知道它的原理,并掌握它的软件实现.

1.1.3 数学建模的重要意义

进入 20 世纪以来,随着数学以空前的广度和深度向一切领域渗透以及电子计

算机的出现和飞速发展,数学建模越来越受到人们的重视.从以下两个方面可以看出数学建模的重要意义.

1. 数学建模是众多领域发展的重要工具

当前,在国民经济和社会活动的诸多领域,数学建模都有非常深入、具体的应用.例如,分析药物的疗效;用数值模拟设计新的飞机翼型;生产过程中产品质量预报;经济增长预报;最大经济效益价格策略;费用最少的设备维修方案;生产过程中的最优控制;零件设计中的参数优化;资源配置;运输网络规划;排队策略;物质管理等.数学建模在众多领域的发展中扮演着重要工具的角色.即便在一般的工程技术领域,数学建模仍然大有可为.在以声、光、电机、土木、水利等工程技术领域中,虽然基本模型是已有的,但由于新技术、新工艺的不断涌现,产生了许多需要数学方法解决的新问题,而由于计算机的快速发展,使得过去某些即使有了数学模型也无法求解的问题(如海量数据的问题)也有了求解的可能.随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等众多所谓和物理领域的渗透,用数学方法研究这些领域中的内在特征成为关键的步骤和这些学科发展与应用的基础.在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度的模型的余地相当大,数学建模的重要工具和桥梁作用得到进一步体现.

2. 数学建模促进对数学科学重要性的再认识

从某种意义上讲,说明数学科学的重要性是件容易的事情,可以举出许多例子(从日常生活到尖端技术)说明数学为什么是必不可少的,但常常会发现许多人虽然不反对所列举的例子,可还是认为数学没有多大用处或者说数学与其生活和工作没有多大关系.这不仅仅是由于数学的语言比较抽象不容易掌握,还有传统数学教育重知识传授轻实际应用以及其他原因.传统的数学教学比较形式、抽象,只见定义、定理、推导、证明、计算,很少讲与我们周围的世界以至日常生活的密切联系,使得数学的重要性变得很空泛.随着计算机革命引起的深刻变化,数学与实际问题的结合,变得更为密切和广泛,数学建模进入研究生、大学生乃至中学生的学习内容,其思想逐渐融入数学主干课程的教学内容中,数学学科的重要性也显得更实在、更具体.数学建模在众多学科领域乃至日常生活中的广泛应用促使更多人认识到数学科学的重要性.

1.2 数学建模的基本方法和步骤

数学建模面临的实际问题是多种多样的,建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同,所得模型的类型也就不同,不能指望归纳出若干条准则,适用于一切实际问题的数学建模方法.因而,所谓的基本方法主要是从方法论的意义上讲的.

1.2.1 数学建模的基本方法

数学建模方法大体上可分为机理分析和测试分析两种.机理分析是根据对客观事物特性的认识,找出反映内部机理的数量规律,建立的模型常有明确的物理或现实意义,前面的示例用的即是机理分析.测试分析将研究对象看作一个“黑箱”系统(即它的内部机理看不清楚),通过对系统输入、输出数据的测量和统计分析,按照一定的准则找出与数据拟合得最好的模型.

一般来说,如果掌握了实际问题的一些内部机理的知识,模型也要求反映其内在特征,那么,建模就应以机理分析为主;而如果研究对象的内部规律不清楚,模型也不需要反映内部特征,则可以用测试分析.对于许多实际问题常常将两者结合起来建模,即用机理分析建立模型的结构,用测试分析确定模型的参数.

机理分析通常针对具体对象进行,主要通过案例研究来学习;而测试分析有完整的数学方法,本书第 11 章的回归分析就是其中之一.我们日常所说的数学建模主要指机理分析.

1.2.2 数学建模的一般步骤

数学建模的步骤并没有一定的模式,常因问题性质、建模目的等而异.下面介绍的是用机理分析建模的一般步骤,如图 1-4 所示.

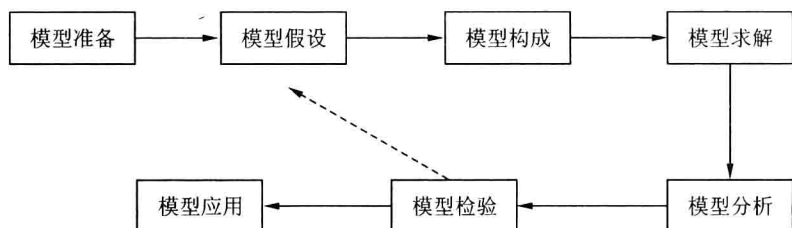


图 1-4 数学建模步骤示意图

模型准备 了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集必要的信息(如现象、数据等),尽量弄清对象的主要特征,形成一个比较清晰的“问题”,由此初步确定用哪一类模型.

模型假设 根据对象的特征和建模目的,抓住问题的本质,忽略次要因素,作出必要的、合理的简化假设.

模型构成 根据所做的假设,用数学的语言、符号描述对象的内在规律,建立包含常量、变量等的数学模型,如优化模型、微分方程模型、差分方程模型、图的模型等.建模时应遵循的一个原则是:尽量采用简单的数学工具,因为你的模型总是希望更多的人了解和使用,而不是只供少数专家欣赏.

模型求解 可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数

学方法,特别是数学软件和计算机技术.

模型分析 对求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性分析、对假设的强健性分析等.

模型检验 把求解的分析结果翻译回到实际问题,与实际的现象、数据比较、检验模型的合理性和适用性,如果结果与实际不符,应该修改、补充假设,重新建模,如图 1-4 中的虚线所示.

模型应用 应用的方式与问题性质、建模目的及最终的结果有关,一般不属于本书讨论的范围.

应当指出,并不是所有问题的建模都要经过这些步骤,有时各步骤之间的界限也不那么分明,建模时不要拘泥于形式上的按部就班,本书的实例就采取了灵活的表述形式.

1.2.3 几个需要注意的方面

对于给定的实际问题(原型),为了建立合理的模型,需要注意以下几个方面:

(1) 根据需要对原型作一些合理的假设.一个原型,常有众多的特性,这些特性所具有的数量特征,常与众多的因素有关.在一定条件下,有的因素是主要的和本质的;有的因素是次要的和非本质的;有的因素与我们所考虑的特征的数量特征之间遵循某种理论规律(如物理学中的定律);有些因素却没有理论规律可以遵循(如地面上运动物体的速度与空气阻力之间的关系).为了获得可靠的并且通过计算机可以得到必要解答的数学模型,必须对原型作出适当的假设.例如,为了突出主体,可以略去那些次要的非本质的因素,达到简化的目的;又如,将那些没有理论规律可以遵循的关系,作出明确的假设,达到确定化目的.但所有假设都必须合理的,即符合或近似地符合自然规律.

(2) 恰当地使用数学方法.很多数学方法可以用来建立实际问题的数学模型.然而,对于一个给定的原型,并非一切数学方法都是适用的.一般说来,对于不确定性问题常适宜于用概率统计等数学方法;对于确定性问题常适宜于用微分方程或代数方程等数学方法.例如,我国 1992 年大学生数模竞赛中的 A 题——施肥效果分析,因为所给实验数据具有随机性,只宜建立不确定性模型,如使用回归分析方法等;其 B 题——实验数据分解,应建立确定性模型.因此,在建立数学模型之前,对原型作确定性与非确定性判断,再确定数学方法是非常重要的.此外,变量取连续值的模型,称为连续性模型;变量取离散值的模型称为离散性模型.因为计算机的发展,直接以原型建立起离散模型(如差分方程方法)或对已建立的连续性模型寻找合理的离散方法,达到能使用计算机进行计算的目的,已成为当今科学计算方面的一个热门课题.

(3) 对建立起来的模型进行必要的分析和检验.怎样判断在建模过程中所作的假设是合理的,使用的数学方法也是恰当的呢?一种有效的方法就是对建立起

来的模型进行分析检验.当使用不确定性数学方法建模时,方法本身的适用性要进行检验.例如,使用层次分析法建立模型时,需要作一致性检验;在进行回归分析时,要作回归效果的显著性检验;在作判别分析时要作判别效果的检验等.在使用确定性方法建模时,通常并没有完整的适用性检验方法,但仍需对所得结果进行分析,看是否与实际情况相符.例如,在使用微分方程或差分方程建立数学模型时,常希望某些平衡解能具有稳定性,这需要对平衡解作稳定性分析.总之,任何一个数学模型,都应进行分析和检验,以确定它是否确能反映现实原型的有关特征.

1.3 数学建模与能力培养

数学建模活动要求大学师生对范围并不固定的各种实际问题予以阐明,分析并提出解法,鼓励师生积极参与并强调实现完整的模型构造的过程.这种贴近实际的教学活动形式对传统的教学模式形成了巨大的冲击,对现时期的数学教学改革产生了深远的影响.教学中应更加重视学生在教学活动中的学习主体地位,充分发挥学生的主观能动性,通过学生的积极参与来完成学生的能力培养和更高的教学目标的实现.在启发式教学的基础上,进一步强调教学过程中的交互活动,通过提升学生在教学活动中的主动性实现教学活动的有效性.自学加串讲、“研讨式”教学、学生专题报告等多种教学形式都可以引入教学过程中,各种教学方法的综合使用能提升教学的针对性.多媒体等现代化手段的使用以及数学软件的结合确保数学建模教学活动的有效性和完整性.

在数学建模教学中,要注意对以下能力的培养:

(1) “翻译”能力.即把经过一定抽象、简化的实际问题用数学的语言表达出来形成数学模型(即数学建模的过程),对应用数学的方法进行推演或计算得到的结果,能用“常人”能懂的语言“翻译”(表达)出来.在美国大学生数学建模竞赛的问题中曾经有这样的要求,MCM93 问题 A 中就明确提出,“除了按竞赛规则说明中规定的格式写的技术报告外,请为餐厅经理提供一页长的用非技术术语表示的实施建议.”

(2) 综合应用与分析能力.应用已学到的数学方法进行综合应用和分析,并能理解合理的抽象和简化,特别是进行数学分析的重要性.因为在数学建模中数学是我们的工具,要在数学建模中灵活应用,发展使用这个工具的能力.有了数学知识,并不意味着你就自动会使用它,更谈不上能灵活地、创造性地使用它,只有多加练习,多方思考才能逐步提高运用能力.

(3) 联想能力.因为对于许多完全不同的实际问题,在一定的简化层次下,它们的数学模型是相同的或相似的,这正是数学的应用广泛性的表现.这就是要培养学生有广泛的兴趣,多思考,勤奋踏实工作,通过熟能生巧而逐步达到触类旁通的境界.