

经贸高校统编教材

高等数学

部人教局教材编写组编



对外经济贸易出版社

经贸高校统编教材

高等数学

经贸部高校教材编写组编

对外贸易教育出版社

经贸高校统编教材
高等数学
经贸部高校教材编写组编
责任编辑 梁英世

*

对外贸易教育出版社
北京密云华都印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ ·印张 15.125 390千·字数

1989年12月第一版·1989年12月第一次印刷

印数 1—2000册·定价 3.70元

ISBN 7-81000-306-2/G·110

前 言

《经贸应用数学基础》教材，是由对外经济贸易部教育局组织编写的。参加编写的院校有对外经济贸易大学、上海外贸学院、广州外贸学院、天津外贸学院。

数学在经贸活动中有着广泛的应用，在经贸的理论研究中占有很重要的位置。随着我国对外开放、深化改革形势的发展，从事经贸工作的同志对数学的需求愈来愈迫切。为培养经贸人材具备必要的经贸应用数学基础知识，特编写此教材。

本教材共分四册：（一）高等数学、（二）线性代数、（三）概率论、（四）运筹学。

本册为全书的第一册《高等数学》。主要介绍微积分学、级数、微分方程与差分方程等内容。

本书由徐庆炎（第一、三章）、管韶宁（第二、四、五、六章）、杨静懿（第七、八、九章）、仇己和、徐世贤、刘金贵、梅善武、李俊慧、李冠书、游金福编写。由管韶宁总纂。

本教材除作为经贸部普通高等院校的试用教材外，还可作为财经院校的试用教材和经贸工作者的参考用书。

书中带*号和小字体的内容，可灵活掌握采用。

限于编者的水平，缺点和错误在所难免，欢迎批评指正。

部教育局

1990.1

目 录

第一章 函数	(1)
§1·1 函数的定义	(1)
§1·2 函数的几种性质	(8)
§1·3 初等函数	(11)
§1·4 经济中常用的几个函数	(18)
习题一	(21)
第二章 极限与连续	(24)
§2·1 数列的极限	(24)
§2·2 函数的极限	(27)
§2·3 极限的精确定义	(31)
§2·4 无穷小与无穷大	(40)
§2·5 极限的运算法则	(45)
§2·6 极限存在的准则 两个重要极限	(50)
§2·7 函数的连续性	(60)
习题二	(71)
第三章 导数与微分	(78)
§3·1 函数的增量	(78)
§3·2 导数的概念	(79)
§3·3 导数的基本公式和运算法则	(87)
§3·4 导数在经济上的应用	(98)
§3·5 复合函数的导数	(105)
§3·6 隐函数的导数	(110)
§3·7 高阶导数	(112)
§3·8 函数的微分	(115)
习题三	(127)

第四章 中值定理 导数的应用	(133)
§ 4·1 中值定理	(133)
§ 4·2 罗必塔法则	(139)
§ 4·3 函数的单调性	(148)
§ 4·4 函数的极值	(150)
§ 4·5 经济中最优化问题的举例	(161)
§ 4·6 曲线的凹向和拐点	(170)
§ 4·7 曲线的渐近线	(173)
§ 4·8 函数的作图	(177)
习题四	(179)
第五章 不定积分	(185)
§ 5·1 不定积分的概念	(185)
§ 5·2 不定积分的基本公式	(187)
§ 5·3 不定积分的性质	(189)
§ 5·4 “凑微分”法	(194)
§ 5·5 变量代换法	(199)
§ 5·6 分部积分法	(205)
§ 5·7 有理分式的积分	(208)
§ 5·8 不定积分在经济上的应用	(213)
习题五	(217)
第六章 定积分	(222)
§ 6·1 定积分的概念	(222)
§ 6·2 定积分的基本性质	(227)
§ 6·3 定积分与不定积分的关系	(231)
§ 6·4 定积分的分部积分法与换元积分法	(237)
§ 6·5 定积分的近似计算	(242)
§ 6·6 广义积分	(248)
§ 6·7 定积分的应用	(254)
习题六	(272)
第七章 多元函数	(277)
§ 7·1 空间解析几何简介	(277)

§ 7.2	多元函数的基本概念	(285)
§ 7.3	偏导数	(292)
§ 7.4	全微分	(296)
§ 7.5	复合函数与隐函数的微分法	(300)
§ 7.6	偏导数在经济中的应用	(306)
§ 7.7	二元函数的极值	(312)
§ 7.8	条件极值——拉格朗日乘数法	(316)
§ 7.9	最小二乘法	(320)
§ 7.10	二重积分的概念与性质	(324)
§ 7.11	二重积分的计算	(330)
习题七		(344)
第八章	级数	(352)
§ 8.1	数项级数的概念	(352)
§ 8.2	无穷级数的基本概念	(355)
§ 8.3	正项级数收敛性的判别法	(359)
§ 8.4	任意项级数	(366)
§ 8.5	幂级数	(370)
§ 8.6	幂级数的运算	(375)
§ 8.7	泰勒公式与泰勒级数	(377)
§ 8.8	一些初等函数的展开式	(380)
§ 8.9	幂级数的应用举例	(386)
习题八		(393)
* 第九章	微分方程和差分方程	(398)
§ 9.1	微分方程的一般概念	(398)
§ 9.2	一阶微分方程	(402)
§ 9.3	二阶微分方程的几种简单类型	(411)
§ 9.4	二阶常系数线性微分方程	(416)
§ 9.5	差分方程的一般概念	(423)
§ 9.6	一阶常系数线性差分方程	(426)
§ 9.7	二阶常系数线性差分方程	(436)
习题九		(443)

附录 I	初等数学主要公式	(449)
附录 II	简易积分表	(460)

第一章 函 数

函数是微积分研究的主要对象，函数概念反映着现实世界中事物之间的量的联系和变化规律，它是高等数学中的一个基本概念。因此有必要在中学已经掌握有关初步知识的基础上作进一步的讨论。

§1.1 函数的定义

在观察分析现实世界的各种现象过程中，常常会遇到各种各样的量，有一些量在某一过程中保持同一的数值，这种量称为**常量**。而另一些量可取不同的数值，这种量称为**变量**。

例如，某一商品在销售的某一特定过程中，该商品的单价是一常量，而销售的数量，销售收入则是变量。

但是一个量是常量还是变量并不是绝对的，同一个量在某种情况下可以认为是常量；而在另一情况下可能是变量。

例如，某种外币的兑换价格，在某一天内可看作是常量，但在一个较长的时期内又可能是变量。

变量与变量之间一般都不是孤立的，而是相互联系、相互依赖、相互制约，并循着一定的规律变化着。下面先考察反映两个变量间相依关系的几个实例：

例1 某商品的价格确定为 p 后，商品的销售量 x （单位：吨）与销售收入 y （单位：元）之间的相依关系是：

$$y = px$$

其中 x 的变化范围是 $x \geq 0$

例2 物体作自由落体运动，下降的路程 s 随下落时间 t 的变

化而变化，其相依关系是：

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

其中 g 是重力加速度。假定开始下降时刻为 0 ，着地时刻为 T ，则 t 的变化范围是， $0 \leq t \leq T$ 。

例3 某进出口公司，一年里各月份商品出口总收汇额（单位：万美元）列表如下：

月 份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
收汇额 y	40	27	45	20	15	15	10	18	31	50	43	48

此表反映了收汇额 y 与月份 t 间的相依关系， t 的取值范围是 $1, 2, \dots, 12$ 的正整数集合。

例4 某地区一天中的气温，由自动记录仪所记录的气温变化曲线所表示（图1-1）

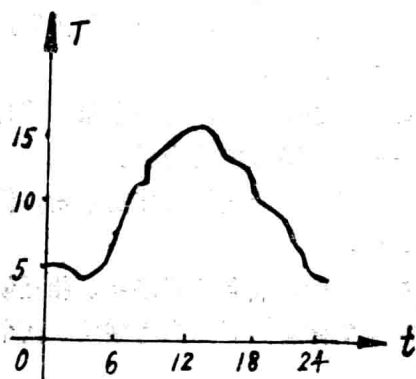


图 1-1

从这曲线可以看出气温 T 与时间 t 的相依关系，每给定一个时刻 t ，就有一个确定的气温 T 与之对应。其中时间 t 的变化范围是 $0 \leq t \leq 24$ 。

以上几个实例，虽然具体内容不相同，表示的方法也不同，但都反映了两个变量之间的相依关系。都给出了某一对应规律，根据这一

对应规律，当其中一个变量在某一范围内取某一数值时，另一变量就相应地有唯一确定的值与之对应，这种对应关系就是函数关系。

一、函数的定义

定义1-1：在某一变化过程中有两个变量 x 、 y ，如果对于变量 x 在它的变化范围内所取的每一个值，依照某一对应规律，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数。记为：

$$y = f(x)$$

其中变量 x 称为**自变量**。变量 y 称为**因变量**。自变量 x 的变化范围称为函数的**定义域**。相应的函数 y 的变化范围称为此函数的**值域**。

根据这个定义，对于自变量每取定一个值，因变量只有唯一确定的值与之对应，所以此定义指的是**单值函数**。如果对于自变量的一个值，因变量 y 有多个确定的对应值时，则称此函数为**多值函数**。如 $y = \pm \sqrt{x}$ 便是多值函数。对于多值函数，如无特别说明，本书不作讨论。

另外，定义中并没有要求自变量变化时，对应的函数值也一定要变，因此 $y = c$ (c 是常数) 也可以看作是自变量 x 的函数。因为无论 x 取什么值，函数 y 总有一个确定的 c 值与之对应。

从定义可知，构成函数有两个要素：一是对应规律；二是函数的定义域。只有两个要素都相同时，才算是同一函数，否则不是相同的函数。例如 $y = \log_a x^2$ 与 $y = 2 \log_a x$ 虽然它们所反映的对应规律相同，但是由于它们的定义域不同，因而不能看作是相同的函数。

函数 $y = f(x)$ ，括号前面的字母“ f ”表示其对应规律，它表明 y 和 x 存在着的某一对应关系，至于这种对应关系具体是什么，则由具体问题所决定。如例2中，其对应关系就是 $s = \frac{1}{2} g t^2$ 。

符号“ f ”是可被任意采用的，但是，在同时考察几个不同的函数时，为了回避混淆，就必须用不同的符号，如“ φ ”“ f ”，“ g ”，“ F ”…等去表示。

如果对于自变量 x 所取的某一数值 x_0 ，依照某一对应法则，函

数有确定值和它对应，那么就称函数在 x_0 处有定义。当 $x=x_0$ 时因变量 y 的对应值称为函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值。记为 $f(x_0)$ 或 $y_{x=x_0}$ 。

例如，函数 $y = x^2 - 2x + 3$

当 $x=0$ 时，其函数值是 $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 3 = 3$

当 $x=1$ 时，函数值 $y|_{x=1} = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$

当 $x=a+1$ 时，函数值是 $f(a+1) = (a+1)^2 - 2(a+1) + 3$
 $= a^2 + 2$

二、函数的定义域

函数的定义域是指自变量的变化范围。随着定义域和对应规律的确定，函数的值域也将确定。一般地，函数的定义域和值域均是某些实数组成的集合，我们常用区间来表示。下面，在讨论如何确定函数定义域之前，先介绍区间的概念。

1. 区间

对于两个实数 a 和 b （设 $a < b$ ），我们把一切满足 $a \leq x \leq b$ 的实数 x 组成的集合，称为闭区间。表示为 $[a, b]$ ，如图1-2(a)。其中 a, b 为区间的端点。

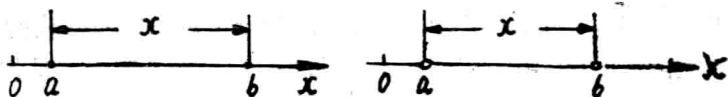


图 1-2

一切满足 $a < x < b$ 的实数 x 组成的集合，称为开区间。表示为 (a, b) 如图1-2(b)。

一切满足 $a \leq x < b$ 和 $a < x \leq b$ 的实数 x 组成的集合，分别用半开区间 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 表示。

除了上述有限区间外，还有如下多种无限区间：我们把整个实数集记为开区间 $(-\infty, +\infty)$ ，符号“ $-\infty$ ”和“ $+\infty$ ”分

别读作负无穷大和正无穷大，把一切满足 $x \geq a$, $x > a$ 及 $x < b$, $x \leq b$ 的实数组成的集合，分别表示为区间 $[a, +\infty)$ 、 $(a, +\infty]$ 及 $(-\infty, b)$ 、 $(-\infty, b]$ 。

另外，在研究函数时，我们还常要用到与区间有关的邻域概念。

2. 邻域

对于两个实数 a 与 δ ，且 $\delta > 0$ ，我们把一切满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的实数 x 所组成的集合，称为 a 的 δ 邻域，点 a 是这邻域的中心， δ 是这邻域的半径。由于不等式 $|x - a| < \delta$ 等价于不等式 $a - \delta < x < a + \delta$ ，所以点 a 的 δ 邻域可以表示为开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ ，它是一个以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间（图1-3(a)）。

例如 $|x - 3| < \frac{1}{5}$ ，即为点 $a = 3$ 的 $\frac{1}{5}$ 邻域，也就是开区间 $(2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{5})$ 。

有时也要用到不含中心点 a 的 δ 邻域，它是一切满足不等式 $0 < |x - a| < \delta$ 的实数 x 所组成的集合，这一邻域可表示为开区间 $(a - \delta, a)$ 或 $(a, a + \delta)$ 图1-3(b)

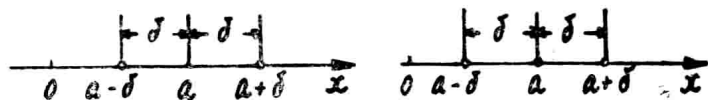


图 1-3

3. 求函数定义域

求函数定义域时，如果所考察的函数由数学式子给出，那么它的定义域就是能使这函数表达式有意义的所有实数 x 的集合；对于实际问题来说，它的定义域，根据考察的问题的实际意义来确定。如例1中， $y = px$ 的定义域是非负实数。即区间 $(0, +\infty)$ ；又如例2中， $S = \frac{1}{2}gt^2$ 的定义域是闭区间 $[0, T]$ 。

例5 求函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ 的定义域

解 要使函数有意义

必须 $x^2 - x - 2 > 0$

解之得 $x > 2$ 或 $x < -1$

故函数定义域为 $(-\infty, -1)$ 或 $(2, +\infty)$

例6 求函数 $y = \lg(|x - a| - b)$ ($b > 0$) 的定义域

解 要使 y 有意义, 必须 $|x - a| - b > 0$ 即 $|x - a| > b$

$x - a > b$ 或 $x - a < -b$

$x > a + b$ 或 $x < a - b$

故函数定义域为 $(-\infty, a - b)$ 或 $(a + b, +\infty)$ 。

三、函数的表示法

函数通常有如下三种方法表示:

1. 列表法 将一系列的自变量的值与其对应的函数值列成表。如例3所表示的函数, 又如对数表, 三角函数表, 银行的外汇兑换表等均属此类。

2. 图象法 把自变量 x 与因变量 y 当作直角坐标平面内点的坐标, y 与 x 的函数关系就可用这平面内的曲线表示。如例4所示。图象法比较直观, 我们常常借助这直观性常助理解数学概念和方法。

3. 解析法 就是将自变量与因变量间的函数关系用数学式子表示, 并注明函数的定义域。如例1中变量 y 与 x 的函数关系由式子 $y = px$ $[0, +\infty]$ 给出。

例2中变量 s 与 t 的函数关系由式子

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad [0, T] \text{ 给出。}$$

值得注意的是, 我们也会遇到用几个式子表示一个函数关系的情况:

例7 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

它是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 由三个不同的式子分段表示的一个函数。如图1-4当 x 分别取1, 0, -2时, 其对应的函数值分别是: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ (将1代入第三个表达式)

$$f(0) = 0$$

$$f(-2) = (-2) - 1 = -3$$

(将-2代入第一个表达式)

在 x 的不同范围内, 如果函数分别由几个不同的表达式所表示, 这种函数就称为分段函数。

分段函数在实际中也经常出现:

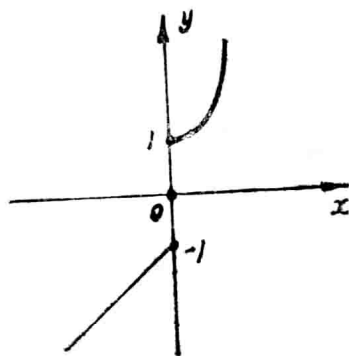


图 1-4

例8 某公司销售某种商品1000吨, 每吨定价120元, 为了多销, 商品公司规定: 销售量如果不超过100吨, 按原价出售, 销售量如果超过100吨, 超过的部分按9折优惠出售, 试将此销售收入与销售量间的函数关系表示出来。

解 设销售收入为 y (单位: 元), 销售量为 x (单位: 吨) 依题意可得 y 与 x 的函数关系为:

$$y = \begin{cases} 120x & 0 < x \leq 100 \\ 120 \times 100 + 120 \times \frac{9}{10} (x - 100) & 100 < x \leq 1000 \end{cases}$$

可见, 它的函数关系也是分段函数。

函数的形式是多种多样的, 又如有些函数的因变量 y , 不是由自变量 x 的数字式子直接表示, 而是由一个方程 $F(x, y) = 0$ 表

示, 如 $ax + by + c = 0$, $y = \cos(x + y)$, $x^2 + y^2 = 1$

这种由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数 (没有就 y 解出时), 称为隐函数. 如就 y 解出, 隐函数就变成显函数. 由上例也可看出并不是每一个隐函数都能变成显函数的.

隐函数的性质

§1.2 函数的几种性质

一、函数的奇偶性

定义1.2 如果函数 $y = f(x)$, 对于定义域内的所有 x 都满足 $f(-x) = f(x)$, 则称这个函数为偶函数. 如果满足 $f(-x) = -f(x)$ 则称这个函数为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 如图1-5(a).

奇函数的图形关于原点对称, 如图1-5(b).

函数的性质

1. 偶函数

2. 奇函数

3. 周期函数

4. 有界函数

5. 单调函数

6. 连续函数

7. 可导函数

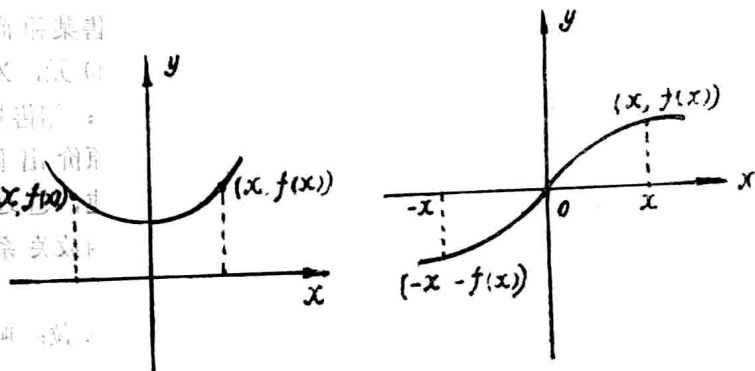


图 1-5

例1 判断下列函数的奇偶性

1) $y = \cos x$

2) $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$

3) $y = x^3 + 1$

解1) 因为 $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$
所以 $y = f(x) = \cos x$ 是偶函数。

$$\begin{aligned}\text{解2)} \quad \text{因为 } f(-x) &= \lg \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \lg \frac{1+x}{1-x} \\ &= \lg \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} \\ &= -\lg \frac{1-x}{1+x} = -f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 是奇函数

解3) 因为 $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$
它既不等于 $f(x) = x^3 + 1$, 也不等于 $-f(x) = -x^3 - 1$
所以 $y = f(x) = x^3 + 1$ 是非奇非偶函数。

二、函数的单调性

定义1.3 如果函数 $y = f(x)$ 对于区间 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加。当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调减少。

单调增加函数的图形,

沿 x 轴正方向上升。(图1-6(a))。

单调减少函数的图形, 沿 x 轴正方向下降。(图1-6(b))。

例2 讨论 $y = x^2$ 的单调性。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \text{任给 } x_1 < x_2 \quad & \text{则 } f(x_1) - f(x_2) \\ &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

在 $(-\infty, 0)$ 内有 $x_1 + x_2 < 0$