经贸高校统编教材

高等数学

部人教局教材编写组编

對外貿易教育出版社

经贸高校统编教材

高等数学

经贸部高校教材编写组编

对外贸易教育出版社

经贸高校统编教材
高等数学
经贸部高校教材编写组编
责任编辑　梁英世
*
对外贸易教育出版社出版
北京密云华都印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
*
开本850×1168 1/32·印张　15.125　390千·字数
1989年12月第一版·1989年12月第一次印刷
印数　1—2000册·定价　3.70元
ISBN 7-81000-306-2/G·110

前　言

《经贸应用数学基础》教材，是由对外经济贸易部教育局组织编写的。参加编写的院校有对外经济贸易大学、上海外贸学院、广州外贸学院、天津外贸学院。

数学在经贸活动中有着广泛的应用，在经贸的理论研究中占有很重要的位置。随着我国对外开放、深化改革形势的发展，从事经贸工作的同志对数学的需求愈来愈迫切。为培养经贸人材具备必要的经贸应用数学基础知识，特编写此教材。

本教材共分四册：（一）高等数学、（二）线性代数、（三）概率论、（四）运筹学。

本册为全书的第一册《高等数学》。主要介绍微积分学、级数、微分方程与差分方程等内容。

本书由徐庆炎（第一、三章）、管韶宁（第二、四、五、六章）、杨静懿（第七、八、九章）、仉已和、徐世贤、刘金贵、梅善武、李俊慧、李冠书、游金福编写。由管韶宁总纂。

本教材除作为经贸部普通高等院校的试用教材外，还可作为财经院校的试用教材和经贸工作者的参考用书。

书中带*号和小字体的内容，可灵活掌握采用。

限于编者的水平，缺点和错误在所难免，欢迎批评指正。

部教育局

1990.1

目　　录

第一章　函　　数

函数是微积分研究的主要对象，函数概念反映着现实世界中事物之间的量的联系和变化规律，它是高等数学中的一个基本概念。因此有必要在中学已经掌握有关初步知识的基础上作进一步的讨论。

§1.1　函数的定义

在观察分析现实世界的各种现象过程中，常常会遇到各种各样的量，有一些量在某一过程中保持同一的数值，这种量称为**常量**。而另一些量可取不同的数值，这种量称为**变量**。

例如，某一商品在销售的某一特定过程中，该商品的单价是一常量，而销售的数量，销售收入则是变量。

但是一个量是常量还是变量并不是绝对的，同一个量在某种情况下可以认为是常量；而在另一情况下可能是变量。

例如，某种外币的兑换价格，在某一天内可看作是常量，但在一个较长的时期内又可能是变量。

变量与变量之间一般都不是孤立的，而是相互联系、相互依赖、相互制约，并循着一定的规律变化着。下面先考察反映两个变量间相依关系的几个实例：

例1　某商品的价格确定为p后，商品的销售量x（单位：吨）与销售收入y（单位：元）之间的相依关系是：

$$y = px$$

其中x的变化范围是$x\geqslant 0$

例2　物体作自由落体运动，下降的路程s随下落时间大的变

化而变化，其相依关系是：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中g是重力加速度。假定开始下降时刻为0，着地时刻为T，则t的变化范围是，$0\leqslant t\leqslant T$。

例3 某进出口公司，一年里各月份商品出口总收汇额（单位：万美元）列表如下：

月　份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
收汇额　y	40	27	45	20	15	15	10	18	31	50	43	48

此表反映了收汇额y与月份t间的相依关系，t的取值范围是1，2，…，12的正整数集合。

例4 某地区一天中的气温，由自动记录仪所记录的气温变化曲线所表示（图1-1）

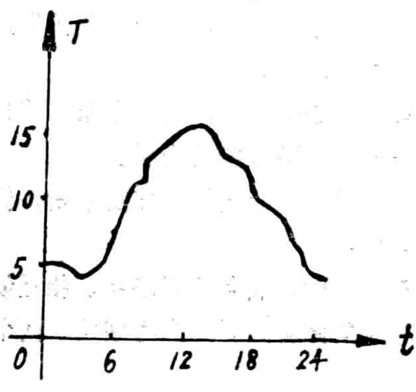

图 1-1

从这曲线可以看出气温T与时间t的相依关系，每给定一个时刻t，就有一个确定的气温T与之对应。其中时间t的变化范围是$0\leqslant t\leqslant 24$。

以上几个实例，虽然具体内容不相同，表示的方法也不同，但都反映了两个变量之间的相依关系。都给出了某一对应规律，根据这一对应规律，当其中一个变量在某一范围内取某一数值时，另一变量就相应有唯一确定的值与之对应，这种对应关系就是函数关系。

一、函数的定义

定义1-1 在某一变化过程中有两个变量 x、y，如果对于变量x在它的变化范围内所取的每一个值，依照某一对应规律，变量y都有唯一确定的值与之对应，则称变量y是x的函数。记为：

$$y = f(x)$$

其中变量x称为**自变量**．变量y称为**因变量**．自变量x的变化范围称为函数的**定义域**．相应的函数y的变化范围称为此函数的**值域**．

根据这个定义，对于自变量每取定一个值，因变量只有唯一确定的值与之对应，所以此定义指的是**单值函数**．如果对于自变量的一个值，因变量y有多个确定的对应值时，则称此函数为**多值函数**．如$y = \pm\sqrt{x}$便是多值函数。对于多值函数，如无特别说明，本书不作讨论．

另外，定义中并没有要求自变量变化时，对应的函变值也一定要变，因此$y = c$（c是常数）也可以看作是自变量x的函数。因为无论x取什么值，函数y总有一个确定的c值与之对应．

从定义可知，构成函数有两个要素：一是对应规律；二是函数的定义域．只有两个要素都相同时，才算是同一函数，否则不是相同的函数．例如$y = \log_a x^2$与$y = 2\log_a x$虽然它们所反映的对应规律相同，但是由于它们的定义域不同，因而不能看作是相同的函数。

函数$y = f(x)$，括号前面的字母"f"表示其对应规律，它表明y和x存在着的某一对应关系，至于这种对应关系具体是什么，则由具体问题所决定。如例2中，其对应关系就是 $s = \frac{1}{2}gt^2$。

符号"f"是可被任意采用的，但是，在同时考察几个不同的函数时，为了免避混淆，就必须用不同的符号，如"φ""f"，"g"，"F"…等去表示。

如果对于自变量x所取的某一数值x_0，依照某一对应法则，函

数有确定值和它对应，那么就称函数在x_0处**有定义**。当$x=x_0$时因变量y的对应值称为函数$y=f(x)$当$x=x_0$时的**函数值**。记为$f(x_0)$或$y_{x=x_0}$

例如，函数　$y=x^2-2x+3$

当$x=0$时，其函数值是$f(0)=0^2-2\times0+3=3$

当$x=1$时，函数值$y|_{x=1}=1^2-2\times1+3=2$

当$x=a+1$时，函数值是$f(a+1)=(a+1)^2-2(a+1)+3$

$$=a^2+2$$

二、函数的定义域

函数的定义域是指自变量的变化范围。随着定义域和对应规律的确定，函数的值域也将确定。一般地，函数的定义域和值域均是某些实数组成的集合，我们常用区间来表示。下面，在讨论如何确定函数定义域之前，先介绍区间的概念。

1.区间

对于两个实数a和b（设$a<b$），我们把一切满足$a\leqslant x\leqslant b$的实数x组成的集合，称为**闭区间**。表示为$[a, b]$，如图1-2(a)。其中a，b为区间的端点。

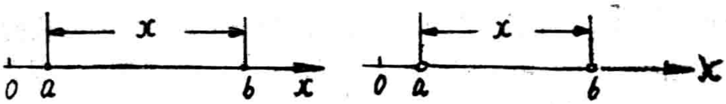

图　1-2

一切满足$a<x<b$的实数x组成的集合，称为**开区间**。表示为(a, b)如图1—2(b)。

一切满足$a\leqslant x<b$和$a<x\leqslant b$的实数x组成的集合，分别用半开区间$[a, b)$和$(a, b]$表示。

除了上述有限区间外，还有如下多种无限区间：我们把整个实数集记为开区间$(-\infty, +\infty)$，符号“$-\infty$”和“$+\infty$”分

别读作负无穷大和正无穷大，把一切满足$x \geqslant a$，$x > a$及$x < b$、$x \leqslant b$的实数组成的集合，分别表示为区间$[a, +\infty)$、$(a, +\infty]$及$(-\infty, b)$、$(-\infty, b]$。

另外，在研究函数时，我们还常要用到与区间有关的邻域概念。

2．邻域

对于两个实数a与δ，且$\delta > 0$，我们把一切满足不等式$|x-a| < \delta$的实数x所组成的集合，称为a的δ**邻域**，点a是这邻域的中心，δ是这邻域的半径。由于不等式$|x-a| < \delta$等价于不等式$a-\delta < x < a+\delta$，所以点a的δ邻域可以表示为开区间$(a-\delta, a+\delta)$，它是一个以点a为中心，长度为2δ的开区间（图1-3(a)。

例如　$|x-3| < \frac{1}{5}$，即为点$a=3$的$\frac{1}{5}$邻域，也就是开区间$(2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{5})$。

有时也要用到不含中心点a的δ邻域，它是一切满足不等式$0 < |x-a| < \delta$的实数x所组成的集合，这一邻域可表示为开区间$(a-\delta, a)$或$(a, a+\delta)$图1-3(b)

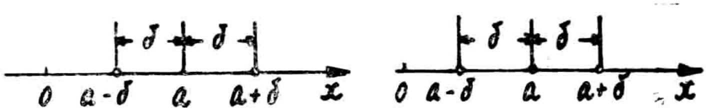

图　1-3

3．求函数定义域

求函数定义域时，如果所考察的函数由数学式子给出，那么它的定义域就是能使这函数表达式有意义的所有实数x的集合；对于实际问题来说，它的定义域，根据考察的问题的实际意义来确定。如例1中，$y=px$的定义域是非负实数。即区间$(0, +\infty)$；又如例2中，$S=\frac{1}{2}gt^2$的定义域是闭区间$[0, T]$。

例5 求函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域

解 要使函数有意义

必须 $x^2-x-2>0$

解之得 $x>2$或$x<-1$

故函数定义域为 $(-\infty, -1)$ 或 $(2, +\infty)$

例6 求函数 $y=lg(|x-a|-b)$ $(b>0)$的定义域

解 要使y有意义，必须$|x-a|-b>0$ 即 $|x-a|>b$

$x-a>b$或$x-a<-b$

$x>a+b$或$x<a-b$

故函数定义域为 $(-\infty, a-b)$ 或 $(a+b, +\infty)$。

三、函数的表示法

函数通常有如下三种方法表示：

1．列表法 将一系列的自变量的值与其对应的函数值列成表。如例3所表示的函数，又如对数表，三角函数表，银行的外汇兑换表等均属此类。

2．图象法 把自变量x与因变量y当作直角坐标平面内点的坐标，y与x的函数关系就可用这平面内的曲线表示。如例4所示。图象法比较直观，我们常常借助这直观性常助理解数学概念和方法。

3．解析法 就是将自变量与因变量间的函数关系用数学式子表示，并注明函数的定义域。如例1中变量y与x的函数关系由式子 $y=px$ $[0, +\infty]$ 给出。

例2中变量s与t的函数关系由式子

$s=\dfrac{1}{2}gt^2$ $[0, T]$ 给出。

值得注意的是，我们也会遇到用几个式子表示一个函数关系的情况：

例7 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x^2+1 & x>0\end{cases}$$

它是定义在（$-\infty$，$+\infty$）上，由三个不同的式子分段表示的一个函数。如图1-4当x分别取1，0，-2时，其对应的函数值分别是：$f(1)=1^2+1=2$（将1代入第三个表达式）

$$f(0)=0$$

$$f(-2)=(-2)-1=-3$$

（将-2代入第一个表达式）

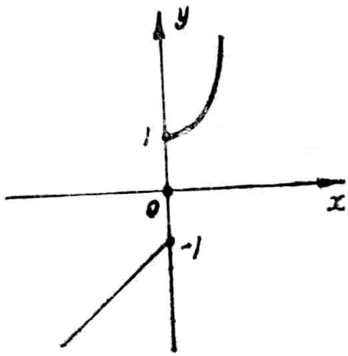

图 1-4

在x的不同范围内，如果函数分别由几个不同的表达式所表示，这种函数就称为**分段函数**。

分段函数在实际中也经常出现：

例8 某公司销售某种商品1000吨，每吨定价120元，为了多销，商品公司规定：销售量如果不超过100吨，按原价出售，销售量如果超过100吨，超过的部分按9折优惠出售，试将此销售收入与销售量间的函数关系表示出来。

解　设销售收入为y（单位：元），销售量为x（单位：吨）依题意可得y与x的函数关系为：

$$y=\begin{cases}120x & 0<x\leqslant 100\\ 120\times 100+120\times\dfrac{9}{10}(x-100) & 100<x\leqslant 1000\end{cases}$$

可见，它的函数关系也是分段函数。

函数的形式是多种多样的，又如有些函数的因变量y，不是由自变量x的数字式子直接表示，而是由一个方程$F(x,y)=0$表

示，如　$ax+by+c=0$，　$y=\cos(x+y)$，　$x^2+y^2=1$

这种由方程$F(x, y)=0$所确定的函数（没有就y解出时），称为**隐函数**。如就y解出，隐函数就变成**显函数**。由上例也可看出并不是每一个隐函数都能变成显函数的。

§1.2　函数的几种性质

一、函数的奇偶性

定义1.2　如果函数$y=f(x)$，对于定义域内的所有x都满足$f(-x)=f(x)$，则称这个函数为**偶函数**。如果满足$f(-x)=-f(x)$则称这个函数为**奇函数**。

偶函数的图形关于y轴对称，如图1-5(a)。

奇函数的图形关于原点对称，如图1-5(b)。

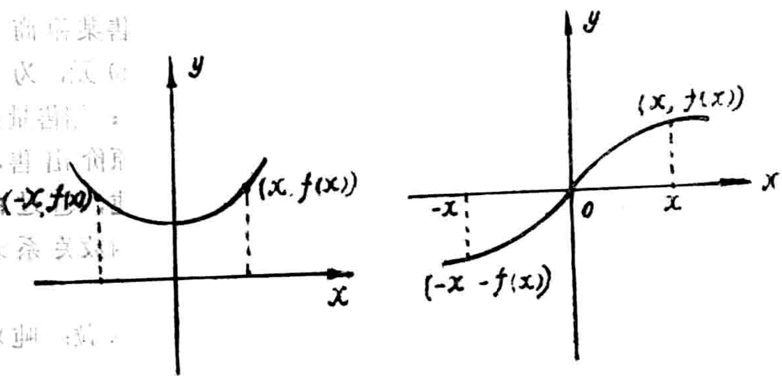

图　1-5

例1　判断下列函数的奇偶性

1) $y=\cos x$

2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$

3) $y=x^3+1$

解1)　因为$f(-x)=cos(-x)=cosx=f(x)$

所以$y=f(x)=cosx$是偶函数。

解2)　因为$f(-x)=lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=lg\frac{1+x}{1-x}$

$$=lg(\frac{1-x}{1+x})^{-1}$$

$$=-lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以$f(x)=lg\frac{1-x}{1+x}$是奇函数

解3)　因为$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$

它既不等于$f(x)=x^3+1$，也不等于$-f(x)=-x^3-1$

所以$y=f(x)=x^3+1$是非奇非偶函数。

二、函数的单调性

定义1.3　如果函数$y=f(x)$对于区间（a、b）内任意两点x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间（a、b）内是**单调增加**。当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间（a、b）内单调减少。

单调增加函数的图形，

沿x轴正方向上升。（图1-6(a)）。

单调减少函数的图形，沿x轴正方向下降。（图1-6(b)）。

例2　讨论$y=x^2$的单调性。

解　任给$x_1<x_2$　　则$f(x_1)-f(x_2)$

$$=x_1^2-x_2^2$$

$$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

在$(-\infty,0)$内有$x_1+x_2<0$