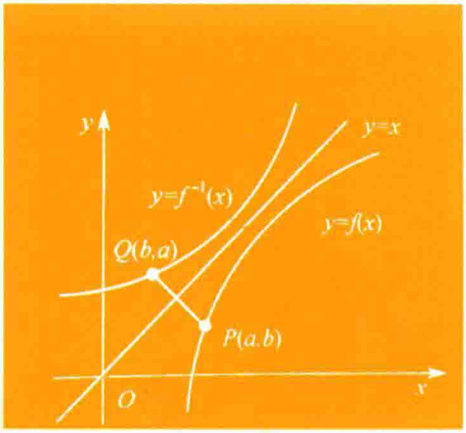
全国普通高等院校应用型"十二五"规划教材



高等数学应用教程

GAODENG SHUXUE

YINGYONG JIAOCHENG

◎ 主编 张丽凤 高 巍

中国商业出版社

全国普通高等院校应用型“十二五”规划教材

高等数学应用教程

主　编　张丽凤　高　巍
副主编　王　琳　陈晓玉　贾艳梅　冯玉泉
高　平　张素芬　石瑞平　康丽杰

中国商业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学应用教程／张丽凤、高巍主编．—北京：中国商业出版社，2014.10

ISBN 978－7－5044－8535－9

Ⅰ．①高… Ⅱ．①张…②高… Ⅲ．①高等数学－高等职业教育－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 118801 号

责任编辑：蔡凯

中国商业出版社出版发行

010－63180647　www.c－cbook.com

（100053　北京广安门内报国寺 1 号）

新华书店总店北京发行所经销

北京高岭印刷厂有限公司印刷

*　*　*　*　*

787×1092 毫米　16 开　11.5 印张　260 千字

2014 年 10 月第 1 版　2014 年 10 月第 1 次印刷

*　*　*　*

定价：29.80 元

前　言

本书根据高职高专院校理工类专业高等数学课程的最新教学大纲编写而成，包括函数与极限、微分学及其应用、积分学及其应用、多元函数微积分、微分方程、傅里叶级数等方面的知识。

根据高职高专教育人才培养目标，《高等数学应用教程》这本教材力图体现以下特色。

1. 精选内容，构架新的课程体系。注重数学概念的实际背景与几何直观的引入，强调数学建模的思想和方法，紧密联系实际，服务专业课程，在内容的选取上注重基本概念、基本理论及基本方法，精选了许多实际应用案例并配备了相应的应用习题，增强学生用定性与定量相结合的方法处理问题的初步能力。

2. 新的课程体系充分体现“以应用为目的”的要求。以培养高等职业教育面向生产、建设、服务和管理第一线需要的高技能应用型专门人才为根本任务，遵循工学结合和校企深度融合的高职教育规律。在课程的教学过程中，通过大量新颖的数学应用例题，通过各个教学环节逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力、综合解题能力、数学建模与实践能力以及自学能力，着力培养学生实际使用数学的能力，使学生体会到数学的抽象美及其现实的应用性，明确学习数学的目的，对学生的终身教育及可持续发展具有重要作用，让学生在未来的职业生涯中能够受益。

本教材由张丽凤、高巍任主编，王琳、陈晓玉、贾艳梅、冯玉泉、高平、张素芬、石瑞平、康丽杰任副主编。

本教材是我们在高职数学课程教学改革方面进行的一次探索和尝试，是企业专家和一线教师共同努力的结果，倾注了编者大量的心血和汗水。但由于水平有限，其中难免会有不当之处，真诚地希望各位专家和读者批评指正，谢谢！

编者

2014 年 10 月

目 录

第 1 章

函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．本章在复习函数基本知识的基础上，主要学习函数的极限和函数的连续性等基本概念、性质与运算．

§1.1　函　数

一、函数及其性质

1. 函数的概念

例 1　自由落体

某物体在时刻 $t = 0$ 时从高度为 h_0 处自由落下，设在时间 t 时落下的距离为 s，由 s 与 t 建立的对应关系可构成如下函数：$s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$，其中 g 是重力加速度，求定义域和值域．

解：定义域 $D_f = \left[0,\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right]$，值域 $M_f = [0,h_0]$

此题给出了距离与时间的关系，即表明了两个变量在变化过程中的对应关系．

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则 f 总有惟一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$，$x \in D$，其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域．对 $x_0 \in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0（或记为 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值．因变量与自变量的这种相依关系通常称为函数关系．

注：函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素．两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同．

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体决定．如果讨论的是纯数学问题,则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域,这种定义域又称为函数的自然定义域．

在求函数定义域时,一般需要考虑以下几个方面:

(1)分式的分母不能为零;

(2)开偶次方时,被开方部分非负;

(3)对数函数中真数部分大于零;

(4)含反三角函数 $\arcsin x$ 或 $\arccos x$,要满足 $|x| \leqslant 1$．

若函数同时含有以上几种情况,则取其交集．

例 2 求函数 $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{1-x}$ 的定义域．

解 要使函数有意义,必须 $\begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

所以函数的定义域为 $[-2,1) \cup (1,+\infty)$．

例 3 求函数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{(x-1)\ln(x+3)}$ 的定义域．

解 应使

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x-1 \neq 0, \\ \ln(x+3) \neq 0, \\ x+3 > 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq -2, \\ x > -3. \end{cases}$$

所以此函数的定义域为 $[2,+\infty)$.

函数的常用表示方法有三种:表格法(优点是直观、精确)、图像法(优点是直观、通俗、容易比较)、解析法(又称公式法,优点是便于数学上的分析和计算).

2. 函数的性质

(1)有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在正数 M,使得对于任意的 $x \in I$,都有 $|f(x)| \leqslant M$,则称在区间 I 上有界．

例如,$y = \sin x$,当 $x \in (-\infty,+\infty)$ 时,恒有 $|\sin x| \leqslant 1$,则 $\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数, $\cos x$ 也有界. $y = \arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\arctan x| < \dfrac{\pi}{2}$,则有界．$y = \dfrac{1}{x}$ 在(0,1)内无界,(1,2)内有界．这说明对于同一个函数来说可能在定义域的某一部分有界,而在另一部分无界,所以要求在说函数有界还是无界时,应指明自变量的范围．

(2) **单调性**

设函数$f(x)$在区间I上有定义,若对于区间I内任意两点x_1、x_2,当$x_1 < x_2$时,有$f(x_1) < f(x_2)$,则称$f(x)$在区间I上单调增加,区间I称为单调增区间;当$x_1 < x_2$时,有$f(x_1) > f(x_2)$,则称$f(x)$在区间I上单调减少,区间I称为单调减区间;单调增区间和单调减区间统称为函数的单调区间.

例如,函数$f(x) = x^2$在区间$(0, +\infty)$内单调增加,在区间$(-\infty, 0)$内单调减少.

(3) **奇偶性**

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称,如果对于任意$x \in D$,都有$f(-x) = f(x)$,则称$f(x)$为偶函数;若$f(-x) = -f(x)$,则称$f(x)$为奇函数. 根据奇偶函数的定义,我们可以得到:偶函数图像关于y轴对称,奇函数图像关于坐标原点对称.

例如,函数$f(x) = 2x^3 + x$为奇函数;函数$f(x) = 2^x + 2^{-x}$为偶函数;$y = \cos x + \sin x$是非奇非偶函数.

注:1. 偶函数的图形是关于y轴对称的,奇函数的图形是关于原点对称的.

2. 若$f(x)$是奇函数,且$0 \in D$,则必有$f(0) = 0$。

3. 两偶函数的和为偶函数;两奇函数的和为奇函数;两偶函数的积为偶函数;两奇函数的积也为偶函数;一奇一偶的积为奇函数.

(4) **周期性**

设函数$f(x)$的定义域为D,如果存在正数T,使得对于任意$x \in D$,都有$f(x + T) = f(x)$,则称其为周期函数,T为函数的周期. 通常周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数$f(x) = \sin x$是以2π为周期的周期函数;函数$f(x) = \tan x$是以π为周期的周期函数.

3. **反函数**

设函数$y = f(x)$的定义域为D,值域为M,如果对于M中的每个数y,在D中都有惟一确定的数x与之对应,且使$y = f(x)$成立,则确定了一个以y为自变量,x为因变量的函数,称为函数$y = f(x)$的反函数,记为$x = f^{-1}(y)$,其定义域为M,值域为D.

由于习惯上用x表示自变量,y表示因变量,因此将反函数中的x与y互换位置,即记为$y = f^{-1}(x)$,$x \in M$.

求反函数的步骤为:由方程解出x,得到$x = f^{-1}(y)$;将函数$x = f^{-1}(y)$中的x和y对换,这样就得到反函数$y = f^{-1}(x)$.

相对于反函数$y = f^{-1}(x)$来说,原来的函数$y = f(x)$称为直接函数. 把直接函数$y = f(x)$的图形与反函数$y = f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线$y = x$对称. 如图1-1所示.

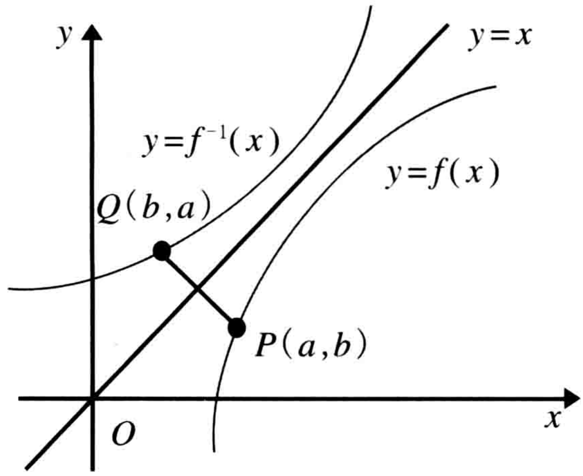


图 1－1

二、初等函数

1. 基本的初等函数

(1)幂函数 $y = x^{\mu}$ $(\mu \in R)$

(2)指数函数 $y = a^{x}$ $(a > 0$,且 $a \neq 1)$

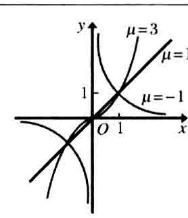
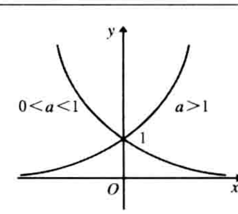
(3)对数函数 $y = \log_{a}x$ $(a > 0$,且 $a \neq 1)$

(4)三角函数 $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \tan x$ $y = \cot x$ $y = \sec x$ $y = \csc x$

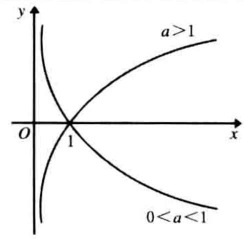
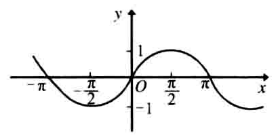
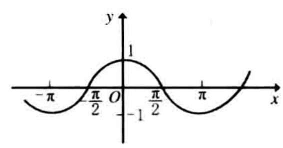
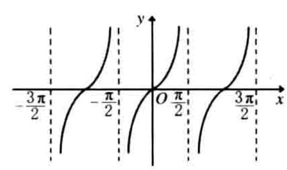
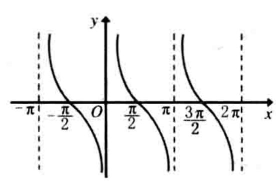
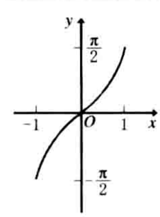
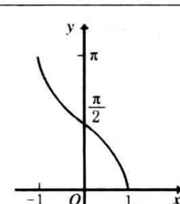
(5)反三角函数 $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \arctan x$ $y = \operatorname{arccot} x$

它们的定义域、值域和图像见表 1－1.

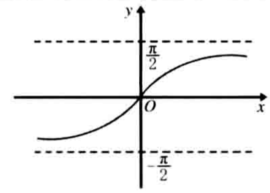
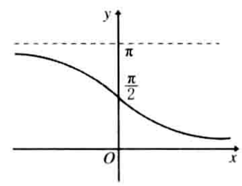
表 1－1

函数名称		图 像
幂函数	$y = x^{\mu}$ （μ 是常数）	
指数函数	$y = a^{x}$ （a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$） 定义域 $x \in (-\infty, +\infty)$ 值域 $y \in (0, +\infty)$	

续表

函数名称		图　像
对数函数	$y=\log_a x$ （a 是常数且 $a>0$，且 $a\neq 1$） 定义域 $x\in(0,+\infty)$ 值域 $y\in(-\infty,+\infty)$	
三角函数	正弦函数　$y=\sin x$ 定义域　$x\in(-\infty,+\infty)$ 值域　$y\in[-1,1]$	
	余弦函数　$y=\cos x$ 定义域　$x\in(-\infty,+\infty)$ 值域　$y\in[-1,1]$	
	正切函数　$y=\tan x$ 定义域　$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$ 值域　$y\in(-\infty,+\infty)$	
	余切函数　$y=\cot x$ 定义域　$\{x\mid x\neq k\pi,k\in Z\}$ 值域　$y\in(-\infty,+\infty)$	
反三角函数	反正弦函数　$y=\arcsin x$ 定义域　$x\in[-1,1]$ 值域　$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	
	反余弦函数　$y=\arccos x$ 定义域　$x\in[-1,1]$ 值域　$y\in[0,\pi]$	

续表

函数名称		图　像
反三角函数	反正切函数　$y = \mathrm{arcan}x$ 定义域　$x \in (-\infty, +\infty)$ 值域　$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数　$y = \mathrm{arccot}x$ 定义域　$x \in (-\infty, +\infty)$ 值域　$y \in (0, \pi)$	

2. 复合函数

定义 1.2　如果 y 是 u 的函数:$y = f(u)$,u 又是 x 的函数:$u = \varphi(x)$,且与 x 对应的 u 值能使 y 有定义,则称 y 通过 u 是 x 的复合函数,记作 $y = f[\varphi(x)]$,其中 u 叫做中间变量.

例 4　下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

(1)$y = (\sin x)^3$　　(2)$y = \cos\sqrt{x+1}$

解　(1) $y = (\sin x)^3$ 是由 $y = u^3$、$u = \sin x$ 两个简单函数复合而成的.

(2) $y = \cos\sqrt{x+1}$ 是由 $y = \cos u$、$u = \sqrt{v}$、$v = x + 1$ 三个简单函数复合而成的.

注:(1)利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数,还可以把一个较复杂的函数分解成几个简单的函数,这对于今后掌握微积分的运算是很重要的.

(2)并非任何两函数都可以复合的,例如:$\arcsin u$ 和 $u = 2 + x^2$ 不能复合;$y = \sqrt{u}$ 和 $u = -1 - x^2$ 也不能复合.

3. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次复合运算所构成的并可用一个式子来表示的函数称为初等函数.

例如:$y = \ln\cos x$,$y = \log_3 x + 5^x - \dfrac{x^2}{\sin x}$ 等都是初等函数.

4. 分段函数

当定义域内自变量取不同的值时,函数 $f(x)$ 要用两个或两个以上的表达式表示,这类函数称为分段函数.

例如:符号函数

$$y = \mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$ 就是定义在$(-\infty, +\infty)$内的分段函数.

狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

注:(1)分段函数仍旧是一个函数,而不是几个函数,分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

(2)分段函数一般不是初等函数,如$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 1. \end{cases}$不能用一个式子表示.但少数例外,如绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 1 \end{cases}$是初等函数.

例 5 某运输公司规定货物的吨公里运价为:在 $a$km 以内,每公里 k 元;超过 $a$km,超过部分每公里为$\frac{4}{5}k$ 元.求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解:由题意知,里程不同,运价不同

当$0 < s \leqslant a$ 时,$m = ks$

当 $s > a$ 时,$m = ka + \frac{4}{5}k(s-a)$

则运价 m 和里程 s 之间的函数关系为

$$m = \begin{cases} ks & 0 < s \leqslant a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a) & a > s \end{cases},\text{定义域为}(0, +\infty).$$

注:在解决某些实际问题时,通常要找出这个问题所涉及的一些变量之间的关系,也就是建立函数关系式.

四、函数模型建立

数学模型方法(Mathematical Modeling Method),是利用数学模型解决问题的一般数学方法,简称 MM 方法.

研究数学模型,建立数学模型,进而借鉴数学模型,解决具体的实际问题.

建立函数模型的步骤一般可分为:

(1)分析问题中的变量与常量,分别用不同的字母表示;

(2)根据所给条件,运用数学或其它知识,确定各量之间的关系;

(3)具体写出解析式 $y = f(x)$,并指明函数的定义域.

实例 1 18 世纪,东普鲁士有个城市叫哥尼斯堡,城内有一条普雷格尔河,这条河有两条支流,在城中心汇合成大河,河中间有一小岛,河上有七座桥,如图 1-2 所示.每天傍晚,人们总要在这七座桥之间散步.很多人总想一次不重复地走过这七座桥,再回到出发点.这就是数学史上著名的哥尼斯堡七桥问题.可是试来试去总是办不到,于是有人写信给当时著名的数学家欧拉.欧拉于 1736 年建立了一个数学模型解决了这个问题,他把岛和陆地抽象成一个点,把每座桥抽象成一条线,如图 1-3 所示.

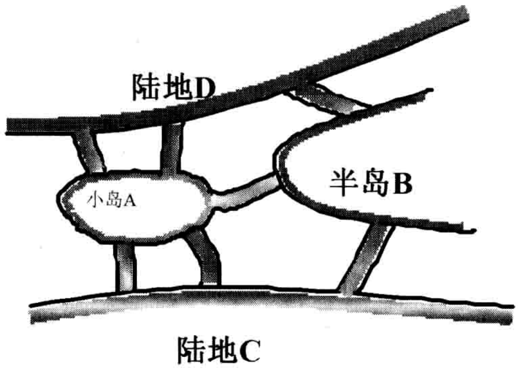


图 1－2

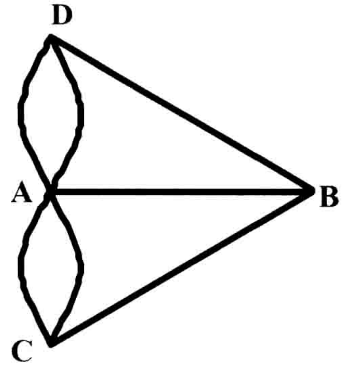


图 1－3

这样七桥问题，就抽象成一笔画问题，即从现实原型转化为数学模型．在一笔画的模型里，只保留了桥与地点的连接方式，而其它一切属性则完全抛弃了．对于一笔画问题，欧拉经过分析和逻辑推理后指出，作一笔画时，除起点和终点外，其余点总是一进一出，即该点总是与偶数条线相连．由于图中的四个点都与奇数条线相连，所以这个图不能一笔画出．由此可知，哥尼斯堡七桥问题无解，即一次无重复地经过七座桥是不可能的．

实例 2　设有一块边长为 a 的正方形薄板，将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一只无盖盒子，试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数．

解　设剪去的小正方形的边长为 x，盒子的体积为 v，则盒子的底面积为 $(a-2x)^2$，高为 x，因此所求的函数关系为 $V = x(a-2x)^2,\ x \in (0,\dfrac{a}{2})$.

实例 3　如图 1－4 所示的电路中，合上开关 S 后的充电电流为

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}}$$

试作出该电流的图像。

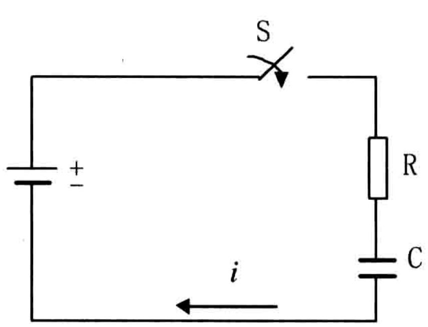


图 1－4

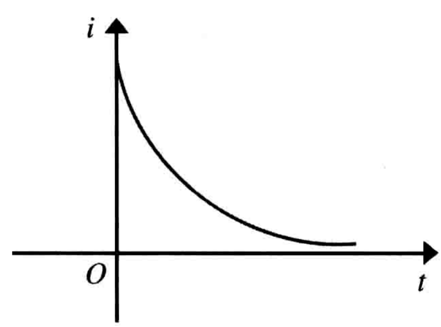


图 1－5

解　$i = \dfrac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}}$ 是时间指数函数，底数为 $\dfrac{1}{e} < 1$，所以电流曲线与 $y = e^{-x}$ 的曲线类似，

如图1－5所示．

应当注意：

(1)因为 $t>0$，所以只取第一象限的部分．

(2)当 $t=0$ 时(开关刚闭合的瞬间)，电容器两端电压 uc =0(相当于电容器短路)，此时充电电流为最大，其值为

$$i(0)=\frac{E}{R}e^{0}=\frac{E}{R},$$

所以，图1－2所示的充电电流曲线 ic 过点 $A(0,\frac{E}{R})$.

(3)随着时间 t 的增加，函数 $i=\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}}$ 将逐渐减小，所以图1－8所示充电电流曲线逐渐下降，渐趋于零．

实例4 已知一个RC电路，如图1－6. 先将开关合在a端，给电容器C充电，充电完毕后($U_c=E$)，再将开关合向b端，则电容器通过电阻R进行放电．电工学理论分析指出，电容器在放电过程中，电容两端电压 U_c 随时间按指数规律衰减，变化曲线如图1－7所示，函数关系是：$U_ce^{-\frac{t}{\tau}}$．其中，把R和C的积称为时间常数，用 τ 表示．$\tau=RC(s)$ 时间常数是电容器充放电速度的电路参数．

试求：电容器上电压衰减到3V所需要的时间是多少？

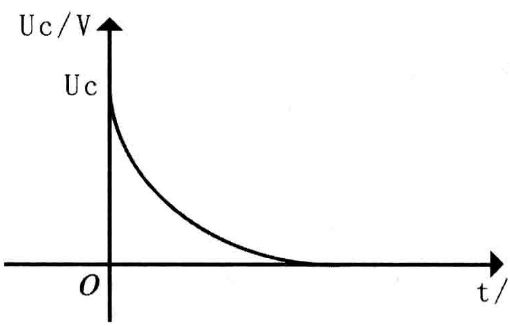


图1－6

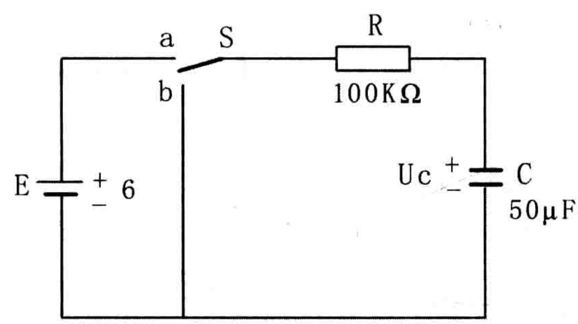


图1－7

解：根据题意得，$U_c=E=6V,\tau=RC=100\times10^{3}\times50\times10^{-6}=5(s)$，由函数关系得 $3=6e^{-\frac{t}{5}}$，即 $e^{-\frac{t}{5}}=0.5$，

则 $t=-5\ln0.5\approx-5\times(-0.69)=3.45(s)$.

故电容器上电压衰减到3V所需的时间是3.45s.

分贝 在电学里，分贝是利用常用对数，表示前后级电路之间，或在一个电路中的不同部分之间的功率、电压、电流等的增益(增加)或衰减(减少)而使用的单位，用dB表示．规定：

(1)功率增益为 $A_p=10\lg\frac{p_0}{p_i}(dB)$ 其中 p_0 为输出功率，p_i 为输入功率

(2)电压增益为 $A_u=20\lg\frac{u_0}{u_i}(dB)$ 其中 u_0 为输出电压，u_i 为输入电压

(3)电流增益为 $A_i = 20\lg\frac{i_0}{i_i}$(dB)　其中 i_0 为输出电流，i_i 为输入电流

实例5　一扩音机输入功率为0. 112 ×10^{-5}W，输出功率为15. 1W，试问该扩音机的增益为多少 dB?

解　由定义可知，放大器的功率增益为 $A_p = 10\lg\frac{p_0}{p_i}$(dB)　其中 p_0 为输出功率，p_i 为输入功率，则

$$A_p = 10\lg\frac{15.1}{0.112\times10^{-5}} = 10\lg(1.35\times10^{7})$$

$$= 10(\lg1.35+\lg10^{7}) = 10(0.1303+7) = 71.303(\text{dB})$$

即该扩音机的增益为71. 303dB.

习题 1. 1

一、求下列函数的定义域.

1. $f(x) = \sqrt{2x-3}+2$　　2. $f(x) = \ln\frac{1}{1-x}$

3. $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$

二、下列函数是由哪几个简单函数复合而成的.

1. $y = e^{\frac{x}{2}}$　　2. $y = \sin(1+2x)$　　3. $y = \sqrt{1+x^2}$

4. $y = \cos x^5$　　5. $y = \sqrt{\log_a^{(\sin x++2^x)}}$

三、有一个26dB 电压增益放大器，对它输入2V 电压，求输出电压为多少伏.

四、一组电势 $E = 24$V，内阻 $r = 0.2\Omega$ 的蓄电池组，当它处于向负载 R_1 供电的状态时，如图1－8所示，试将电池组端电压 U 表示成供电电流 I 的函数.

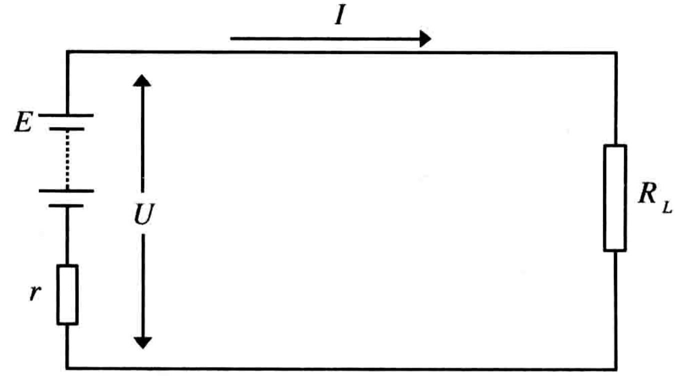


图1－8