华大助学

重难点手册

重难点手册

★九千万学子的制胜宝典

★八省市名师的在线课堂

书业的畅销品牌

新课标

Xinkebiao

SJ

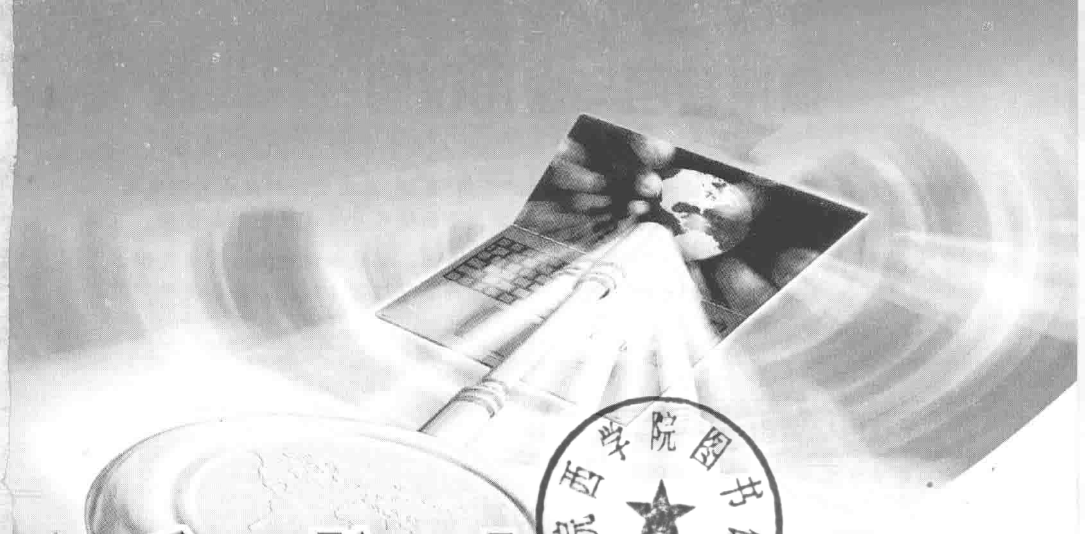
高中数学

选修 2-3

主审 蔡上鹤

主编 汪江松

华中师范大学出版社



重难点手册

新课标
Xinkebiao

SJ

高中数学

选修 2-3

主　审　蔡上鹤
主　编　汪江松

★九千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★二十年书业的畅销品牌

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学 选修 2-3 (SJ)/汪江松 主编．—3 版．—武汉：华中师范大学出版社，2012.12

ISBN 978-7-5622-5797-4

Ⅰ.①重… Ⅱ.①汪… Ⅲ.①数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 252267 号

重难点手册——高中数学 选修 2-3 (SJ)

主编：汪江松　　选题策划：华大鸿图编辑室
责任编辑：陈 梅 涂 庆　　责任校对：程 珏
封面设计：新视点　　封面制作：胡 灿
编辑室：华大鸿图编辑室(027-67867361)
出版发行：华中师范大学出版社 ©
社址：湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号　　邮编：430079
销售电话：027-67867371 027-67865356 027-67867076
传真：027-67865347　　邮购电话：027-67861321
网址：http://press.ccnu.edu.cn　　电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn
印刷：仙桃市新华印务有限公司　　督印：章光琼
字数：300 千字
开本：880mm×1230mm 1/32　　印张：9.5
版次：2012 年 12 月第 3 版　　印次：2012 年 12 月第 1 次印刷
定价：17.80 元

欢迎上网查询、购书

目　录

第 1 章

计数原理

1.1 两个基本计数原理

课程目标点击

1. 理解并掌握分类加法计数原理和分步乘法计数原理.

2. 能根据具体问题,正确地选用分类加法计数原理或分步乘法计数原理进行处理.

3. 在理解两个计数原理的过程中,提高学生的综合、归纳及比较的能力;在运用两个原理解决实际问题的过程中,激发学生学习数学的兴趣,提高学生理性分析问题的能力.

重点难点突破

1. 分类加法计数原理

分类加法计数原理:完成一件事有两类不同方案,在第 1 类方案中有 m 种不同的方法,在第 2 类方案中有 n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.

推广到一般:完成一件事有 n 类不同方案,在第 1 类方案中有 m_1 种不同的方法,在第 2 类方案中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类方案中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

解惑·释疑

如何理解分类加法计数原理?

1.明确问题中所指的"完成一件事"是指什么,怎样才算是完成这件事,然后根据问题的特点确定一个分类标准,在这个标准下进行分类.

2."完成一件事有 n 类不同方案"是指完成这件事的所有方法可分为 n 类,即任何一类中的任何一种方法都可以完成任务,而不需要再用到其他方法;每一类没有相同的方法,且完成这件事的任何一种方法都在某一类中.

简单地说,就是应用分类加法计数原理时要做到"不重不漏".

例 1 有三个袋子,分别装有不同编号的红色小球 6 个,白色小球 5 个,黄色小球 4 个.若从三个袋子中任取一个小球,有多少种不同的取法?

思路点拨 要完成的"一件事"是"任取一个小球",这个小球既可以从第一个袋子中取,也可以从第二个袋子中取,还可以从第三个袋子中取,因此它是一个分类问题,应用分类加法计数原理解决.

【解】 有 3 类不同方案:

第 1 类,从第一个袋子中任取一个红色小球,有 6 种不同的取法;

第 2 类,从第二个袋子中任取一个白色小球,有 5 种不同的取法;

第 3 类,从第三个袋子中任取一个黄色小球,有 4 种不同的取法.

其中,从这三个袋子的任意一个袋子中取一个小球都能独立地完成"任取一个小球"这件事,根据分类加法计数原理,不同的取法共有 $6+5+4=15$ 种.

2. 分步乘法计数原理

分步乘法计数原理:完成一件事需要两个步骤,做第 1 步有 m 种不同的方法,做第 2 步有 n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m\times n$ 种不同的方法.

推广到一般:完成一件事需要 n 个步骤,做第 1 步有 m_1 种不同的方法,做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

解惑·释疑

如何理解分步乘法计数原理?

1.明确问题中所指的"完成一件事"是指什么,怎样才算是完成这件事,然后根据问题的特点确定分步标准,标准不同,分步的步骤也会不同.

2."完成一件事需要 n 个步骤"是指完成这件事的任何一种方法,都要分成 n 个步骤,在每一个步骤中任取一种方法,然后相继完成所有这些步骤就能完成这件事.即各步骤是相互依存的,只有每个步骤都完成才能完成这件事.

简单地说,就是应用分步乘法计数原理时要做到"步骤完整".

例2 张老师要从教学楼的底层到三层，已知从底层到二层有4个扶梯可走，从二层到三层有2个扶梯可走，那么张老师从底层到三层有多少种不同的走法?

思路点拨 要完成的"一件事"是"从底层到三层"，即先从底层到二层，再从二层到三层，分两步完成这件事，应用分步乘法计数原理解决.

【解】 第1步，从底层到二层有4种不同的走法；第2步，从二层到三层有2种不同的走法. 根据分步乘法计数原理，张老师从教学楼的底层到三层的不同走法有 $4\times2=8$ 种.

3. 两个计数原理间的关系

分类加法计数原理和分步乘法计数原理，回答的都是有关做一件事的不同方法的种数问题.

区别在于：分类加法计数原理针对的是"分类"问题，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事；分步乘法计数原理针对的是"分步"问题，各个步骤中的方法互相依存，只有各个步骤都完成才算做完这件事.

解惑·释疑

两个基本原理的区别

分类加法计数原理每次得到的是最后结果；分步乘法计数原理每次得到的是中间结果. 如下表：

	加法原理	乘法原理
区别一	完成一件事，共有 n 类办法，关键词是"分类"	完成一件事，共分 n 个步骤，关键词是"分步"
区别二	每类办法都能独立地完成这件事，它是独立的、一次的且每次得到的是最后结果，只需一种方法就可完成这件事	每一步得到的只是中间结果，任何一步都不能独立完成这件事，缺少任何一步也不能完成这件事，只有各个步骤都完成了，才能完成这件事
区别三	各类办法之间是互斥的、并列的、独立的	各步之间是关联的、独立的，"关联"确保不遗漏，"独立"确保不重复

例3 三层书架上，上层放有10本不同的语文书，中层放有9本不同的数学书，下层放有8本不同的外语书.

问：从书架上任取两本书，且这两本书属不同的学科，共有多少种不同的取法?

【解】 **方法1** 完成这个事件可分为三种类型：取语文、数学书各一本；取语文、外语书各一本；取数学、外语书各一本.

每一类中，完成事件又分两个步骤，如第一类中先取语文书1本，第二步取数学书1本，依分步乘法计数原理，第一类中有 10×9 种不同的取法；

同理，第二类中有 10×8 种不同的取法；

第三类中有 9×8 种不同的取法.

再依分类加法计数原理知，从书架上任取两本属不同学科的书的方法共有

$$10\times9+10\times8+9\times8=242(\text{种}).$$

方法2　完成这个事件可分为两种类型：取语文书和不取语文书.

取语文书时，可分两步：第一步先取语文书，有10种不同的方法；第二步取数学书或外语书(再次分类)，有 $9+8$ 种方法. 依分步乘法计数原理，有 $10\times(9+8)$ 种不同的方法.

不取语文书时分两步：第一步取数学书，有9种不同的方法；第二步取外语书，有8种不同的方法. 依分步乘法计数原理，有 9×8 种不同的方法.

再依分类加法计数原理，共有方法数为

$$10\times(9+8)+9\times8=242(\text{种}).$$

小结　方法1是先分类，再对每一类中进行分步；方法2也是先分类再分步，但对某些类中的分步过程还得分类. 像这种分类、分步混合题，无论是分类还是分步，必须做到标准明确、不重不漏.

方法技巧点拨

1. 应用分类加法计数原理

例1　书架上层放15本不同的数学书，中层放16本不同的语文书，下层放14本不同的化学书，某人从中取出一本书，有多少种不同的取法？

【解】　要完成"取一本书"这件事有三类不同的取法：第一类，从上层取一本数学书有15种不同的取法；第二类，从中层取一本语文书有16种不同的取法；第三类，从下层取一本化学书有14种不同的取法. 其中任何一种取法都能独立完成"取一本书"这件事，故从中取一本书的方法种数为 $15+16+14=45$ 种.

小结　(1)本题要"完成的一件事"是"从书架中取出一本书"，这本书既可以从上层取，也可以从中层取，还可以从下层取. 因而它是一个分类问题，用分类加法计数原理即可. 因此，对于具体题目，我们应该仔细审题，弄清题目中的"完成一件事"的具体所指，只有这样才能确定该应用什么原理来解题.

(2)对于有些问题，如何分类，题目中已经明确告诉我们了，解题时，我们只要透彻地理解题意即可. 如本例中，书架上有三类不同的书，根据题意分类即可.

变式引申 1　在如图 1-1-1 所示的程序模块中，含有许多沿着线段的箭头方向，从开始直到结束的路线，每一条路线都是一条可执行路径. 请问：在这个模块中，有多少条可执行路径？

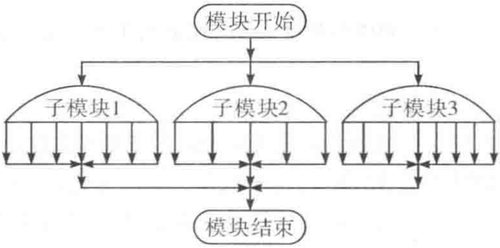


图 1-1-1

例 2　如图 1-1-2 所示的 5×3 个方格中有多少个矩形？

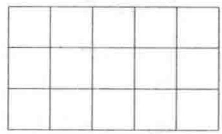


图 1-1-2

【解】　如果直接数图中矩形的个数，则有可能重复或遗漏，而以面积大小作为分类标准就能做到不重不漏.

(1)面积为 1 的矩形有 15 个.

(2)面积为 2 的矩形有两类：一是横向的，有 $4\times3=12$ 个；二是竖向的，有 $2\times5=10$ 个，故共有 $12+10=22$ 个.

(3)面积为 3 的矩形有 $3\times3+5=14$ 个.

(4)面积为 4 的矩形有：横向的有 $2\times3=6$ 个；竖向的有 $2\times4=8$ 个，共有 $6+8=14$ 个.

(5)面积为 5 的矩形有 3 个.

(6)面积为 6 的矩形有 $3\times2+4=10$ 个.

(7)面积为 8 的矩形有 $2\times2=4$ 个.

(8)面积为 9 的矩形有 3 个.

(9)面积为 10 的矩形有 2 个.

(10)面积为 12 的矩形有 2 个.

(11)面积为 15 的矩形有 1 个.

故共有矩形 $15+22+14+14+3+10+4+3+2+2+1=90$ 个.

小结　对于有些分类加法计数原理的应用问题，题目中并没有明确地进行分类，需要我们借助分类手段来分析、解决问题，在解这类需要我们自己来分类的问题时，一是要准确、透彻地理解题意；二是分类时，必须确定一个分类标准，而分类标准的选择，则需要在仔细分析题意的基础上来确定. 如在本题中，可以用直接法一一地数出这些矩形的个数，但在“数”的过程

中，容易出现重复和遗漏．而在这里以“面积”的大小作为分类标准，就可以避免重复和遗漏，并且它将一个大的计数问题分解成若干个小的计数问题，从而降低了思维难度，简化了解题过程，避免了错误的发生．

变式引申 2　在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数共有多少个？

2．应用分步乘法计数原理

例 3　若某人由广州到北京出差，但途中必须到武汉办一件事，而由广州到武汉的理想路线共有 12 条(包括坐汽车、火车、飞机，以及不同的路线)，由武汉到北京共有 18 条理想路线，则此人由广州到北京共有多少条不同的理想路线？

思路点拨　由于本题中要完成的一件事是“从广州到北京”，而途中又必须经过武汉，因此完成这件事必须分作两个步骤来完成，即第一步由广州到达武汉，第二步由武汉到达北京．

【解】　完成这件事，分作两步：第一步，从广州到武汉，有 12 种走法；第二步，由武汉到北京，有 18 种走法．由分步乘法计数原理可知，此人由广州到北京共有 $12\times18=216$ 条不同的理想路线．

点评　分步就是做完每个步骤中的某种方法，并不能完成整个事件，而只有当它依次完成所有步骤时，才能完成整个事件．有时在具体问题中就明确地告诉了我们完成这个事件的步骤(如本例)，解答这类问题时，只需认真审题，透彻理解题意即可．

变式引申 3　从$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中，任取 3 个不同的数作为抛物线的方程 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的系数，使抛物线过原点，且顶点在第一象限，这样的抛物线共有多少条？

例 4　将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法总数是多少？

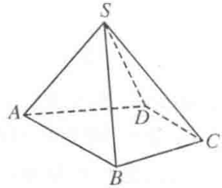


图 1-1-3

【解】　方法 1　如图 1-1-3 所示，设五种颜色分别为 1，2，3，4，5．由题设四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点 S、A、B 所染色互不相同，它们共有 $5\times4\times3=60$ 种染色方法．当 S、A、B 已染色时，不妨设其颜色分别为 1，2，3，则 C 可染颜色 2，4，5，若 C 染颜色 2，则 D 可染颜色 3，4，5 中任一种，有 3 种染法；若 C 染颜色 4，则 D 可染颜色 3 或 5，有 2 种染法；若 C 染颜色 5，则 D 可染颜色 3 或 4，也有 2 种染法．可

见，当 S、A、B 已染好时，C 与 D 还有 7 种染法. 从而，染色方法总数为 $60\times7=420$ 种.

方法 2　要完成题目中要求的染色问题，可先分类为使用 5 种，4 种，3 种颜色. 设定每种方法的染色步骤为 S-A-B-C-D.

第一类，使用 5 种颜色，则 S 可染 5 种颜色，A 可染 4 种颜色，B 可染 3 种颜色，C 可染 3 种颜色，D 可染 1 种颜色，第一类中有 $5\times4\times3\times2\times1=120$(种)分法.

第二类，使用 4 种颜色，则 S 可染 5 种颜色，A 可染 4 种颜色，B 可染 3 种颜色，此时 C 的选择又分两类，一为 C 与 A 染同色时，D 可染 2 种颜色，二为 C 与 A 不染同色时，C 可染 2 种颜色，D 可染 1 种颜色，第二类中有 $5\times4\times3\times(1\times2+2\times1)=240$(种)方法.

第三类，使用 3 种颜色，则 S 可染 5 种颜色，A 可染 4 种颜色，B 可染 3 种颜色，C、D 各可染 1 种颜色，第三类中有 $5\times4\times3\times1\times1=60$(种)方法. 从而染色方法总数为 $120+240+60=420$ 种.

点评　在这里，先把问题分成两大步骤：第一步，给 S、A、B 染色，在给 S、A、B 染色时，由于这三点的颜色互不相同，因而又分作三步来完成；第二步，给 C、D 染色，在给 C、D 染色时，又需要分作三类，即 C 可分别染色 2、4、5.

像本题这类问题，如何分步，题目并没有具体确定，其分步方法需要我们自己来确定. 解答这类问题时，需要在透彻理解题意的基础上来确定分步方法，同时还要善于抓住问题的主要矛盾，并建立相应模型来解决问题. 如在本例中，由题意知任意三点间的颜色互不相同(这是问题的主要矛盾)，因此我们不妨先给其中三点 S、A、B 染色(作为第一步)；再给 C、D 染色. 在给 C、D 染色时，不妨假设 S、A、B 三点依次染色为 1、2、3，则 C 可供染色的颜色只有 2、4、5，于是 C、D 的染色就能顺理成章地进行. 亦可用方法 2 先分类再分步.

变式引申 4　集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$.

(1)从集合 A 到集合 B 可以建立多少个不同映射？

(2)从集合 A 到集合 B 的映射中，若要求集合 A 中元素对应的集合 B 中的元素不同，这样的映射有多少个？

3. 两个计数原理的综合应用

例 5　设有 5 幅不同的国画，2 幅不同的油画，7 幅不同的水彩画.

(1)从中任选一幅画布置房间，有几种不同的选法？

(2)从国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间，有几种不同的选法？

思路点拨 (1)任选一幅画,有 3 种画(国画、油画、水彩画)可供选择,因此可用分类加法计数原理.(2)从 3 种画中各选一幅要分 3 步进行.

【解】 (1)要完成的“一件事”是“任选一幅画”.分 3 类:

第 1 类,从国画中选,有 5 种不同的选法;

第 2 类,从油画中选,有 2 种不同的选法;

第 3 类,从水彩画中选,有 7 种不同的选法.

而每种选法都能独立完成“任选一幅画”这件事,根据分类加法计数原理,共有 $5+2+7=14$ 种不同选法.

(2)要完成的“一件事”是“从现有的三种画中各选一幅画”.分 3 步:

第 1 步,从 5 幅不同的国画中选 1 幅,有 5 种选法;

第 2 步,从 2 幅不同的油画中选 1 幅,有 2 种选法;

第 3 步,从 7 幅不同的水彩画中选 1 幅,有 7 种选法.

而只完成其中一步并不能完成这件事,只有这 3 个步骤都完成了才能完成这件事.根据分步乘法计数原理,共有 $5\times2\times7=70$ 种不同选法.

变式引申 5 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种,分别种在不同土质的三块土地上,其中黄瓜必须种植,不同的种植方法有________.

4. 合理选用“树形图”与“表格法”

对于既要用分类加法计数原理,又要用分步乘法计数原理的较为复杂的问题,可以根据题意合理地画出“树形图”或列表格,使问题的解决更直观、更方便.

例 6 同室四人各写一张贺年卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡,则四张贺年卡不同的分配方法有多少种?

思路点拨 可用“树形图”直观分析,并考虑一题多解.

【解】 **方法 1** 将四张贺卡分别记为 A,B,C,D.由题意,某人(不妨设 A 卡的供卡人)取卡的情况有 3 种,据此将卡的不同分配方式分为三类,对于每一类,其他人依次取卡分步进行.为了避免重复或遗漏现象,用“树形图”表示如下:

B—A—D—C
B—C—D—A
B—D—A—C

C—A—D—B
C—D—A—B
C—D—B—A

D—A—B—C
D—C—A—B
D—C—B—A

故共有 9 种不同的分配方法.

方法 2 将同室四人分别记为 A,B,C,D,然后利用四个人取卡的情况分步来确定.

第一步,四个人中的任意一人(例如 A)先取一张,则由题意知共有 3 种取

法；第二步，由第一人取走的贺卡的供卡人取，也有3种取法；第三步，由剩余的两个中的任一人取，只有一种取法；第四步，最后一人取，只有一种取法. 由分步乘法计数原理，共有 $3\times3\times1\times1=9$(种)不同的分配方法.

方法3 设四人 A、B、C、D 所写的贺年卡分别是 a、b、c、d. 当 A 拿贺年卡 b 时，则 B 可拿 a、c、d 中任何一张，即 B 拿 a，C 拿 d，D 拿 c；或 B 拿 c，C 拿 d，D 拿 a；或 B 拿 d，C 拿 a，D 拿 c，所以 A 拿 b 时有三种不同的分配方法，同理 A 拿 c，d 时都各自有三种不同的分配方法，这时对 A 的分类完成. 用分类加法计数原理，共有 $3+3+3=9$(种)不同的分配方法.

5. 模型法的灵活运用

模型法就是通过构造图形，利用形象、直观的图形帮助我们分析、解决问题的方法. 模型法是解决计数问题的重要方法.

例7 3个人要坐在一排8个空座位上，若每个人左右都有空座位，不同的坐法有多少种？

【解】 3个人在一排8个空座位上坐下后，只剩下5个空座位，我们可以构造这样的解题过程，依次将3个人连同他的座位逐个地插入5个空座位形成的“空”当中去. 由于每人左右都要有空位子，因此将第一个人连同他的座位插入时，不能插在两边，所以有4种插法[如图1-1-4中的(1)到(2)]；然后将第二个人连同他的座位插入时，只有3种插法了[如图1-1-4中的(2)到(3)]；最后将第三个人连同他的座位插入时，只有2种插入的方法了[如图1-1-4中的(3)到(4)]. 这时，我们再根据分步乘法计数原理，可以得到插入的不同的方法共有 $4\times3\times2=24$ 种.

(1)○○○○○　　(3)○○□○○□○

(2)○○□○○○　　(4)○□○□○○□○

(○表示没有坐人的空位　□表示已经坐人的位置)

图 1-1-4

小结 本题用“○”表示没有坐人的空位，用“□”表示已经坐人的位置，画图分析为我们构建分步乘法计数原理的模型铺平了道路. 模型法就是通过构建相关图形，利用形象、直观的图形来构建两个原理的模型. 模型法不仅可以帮助我们准确理解题意，而且还可以帮助我们有效地分析问题，从而建立起两个原理的模型，使问题顺利地解决.

变式引申6 三人传球，由甲开始发球，并作为第1次传球，经过5次传球后，球仍回到甲手中，则不同的传球方式共有多少种？

6. 简单的涂色问题

(1)图形涂色问题是利用两个原理处理的一种对能力要求较高的问题，需要特别关注图形的特征，有多少块，用多少种颜色.

(2)如果图形不是很规则，往往从某一块出发进行分步涂色，从而选用分步乘法计数原理；如果图形具有一定的对称性，那么先对涂色方案进行分类，每一类再进行分步.

(3)分类和分步都必须仔细，不重、不漏.

例 8　如图 1-1-5，用 5 种不同的颜料给 4 块区域(A、B、C、D)涂色，要求共边两块颜色互异，求有多少种不同的涂色方案？

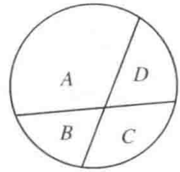


图 1-1-5

【解】　**方法 1**　按涂色种类进行分类.

第一类：涂 4 种颜色，接下来分步，分四步：A 有 5 种涂法，B 有 4 种涂法，C 有 3 种涂法，D 有 2 种涂法.

∴共有 $5\times4\times3\times2=120$(种).

第二类：涂 3 种颜色，则 A、C 颜色相同或 B、D 颜色相同.

若 A、C 颜色相同，有 5 种涂法；B 有 4 种涂法，D 有 3 种涂法.

∴共有 $5\times4\times3=60$(种).

若 B、D 颜色相同，同理也有 60 种不同涂法.

∴共有 $60+60=120$(种).

第三类：涂 2 种颜色，则 A、C 颜色相同且 B、D 颜色也相同.

∴A、C 有 5 种涂色方法，B、D 有 4 种涂色方法.

∴共有 $5\times4=20$(种).

根据分类加法计数原理，共有 $120+120+20=260$(种)不同涂色方案.

方法 2　按 A、C 颜色相同或不同进行分类.

(1)若 A、C 颜色相同：A 有 5 种涂色方法，B 有 4 种涂色方法，D 有 4 种涂色方法，故共有 $5\times4\times4=80$(种).

(2)若 A、C 颜色不同，A 有 5 种涂色方法，C 有 4 种涂色方法，B 有 3 种涂色方法，D 有 3 种涂色方法，故共有 $5\times4\times3\times3=180$(种).

∴根据分类加法计数原理，共有 $80+180=260$(种).

答：共有 260 种不同的涂色方案.

点评　这里涉及的是简单的涂色问题，根据不同要求(一般配图)可以采用分类法，也可以采用分步法，往往两种方法同时运用. 因此，一定要处理好“类中有步”，“步中有类”的关系.

高考真题链接

例1 (2011·北京)用数字2,3组成四位数,且数字2,3至少都出现一次,这样的四位数共有________个.(用数字作答)

【解】 因为四位数的每个数位上都有两种可能性,其中四个数字全是2或3的情况不合题意,所以适合题意的四位数有 $2^4-2=14$ 个.

答案 14.

例2 (2010·上海)从集合 $U=\{a,b,c,d\}$ 的子集中选出4个不同的子集,需要同时满足以下两个条件:

(1)$\varnothing$,U 都要选出;

(2)对选出的任意两个子集 A 和 B,必有 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$.

那么共有________种不同的选法.

思路点拨 由(1)知只需考虑另外两个子集的选法,再依其中一个子集分别含一个元素和两个元素的情况进行讨论,综合运用分类与分步的原理.

【解】 因为 $\varnothing$ 为任何集合的子集,其余任何子集为 U 的子集,故只需考虑另外两个子集也满足两个条件的选法.

若 A 中只有一个元素,有4种选法.不妨取其中一种情况 $A=\{a\}$,则 B 有 ab,ac,ad,abc,abd,acd 计6种选法,依乘法原理,共 $4\times6=24$ 种选法.

若 A 中含有两个元素,有 ab,ac,ad,bc,bd,cd 计6种选法.不妨取其中一种情况 $A=\{a,b\}$,则 B 可为 $\{a,b,c\}$,$\{a,b,d\}$ 两种.依乘法原理,共 $6\times2=12$ 种选法.

依加法原理共 $24+12=36$ 种选法.

答案 36.

例3 (2011·广东)某通讯公司推出一组手机卡号码,卡号的前七位数字固定,从"×××××××0000"到"×××××××9999"共10000个号码.公司规定:凡卡号的后四位带有数字"4"或"7"的一律作为"优惠卡",则这组号码中"优惠卡"的个数为________.

思路点拨 可考虑用"排除法".

【解】 卡号后四位每位上数字从0～9有10种选择,其中不带"4"且不带"7"的有8种.依分步乘法计数原理知,卡号后四位不带"4"且不带"7"的共有 $8\times8\times8\times8=4096$(个),所以符合"优惠卡"条件的号码个数为 $10000-4096=5904$(个).

答案 5904.

例 4 (2010·江西)某人有 4 种颜色的灯泡(每种颜色的灯泡足够多),要在如图 1-1-6 所示的 6 个点 A、B、C、A_1、B_1、C_1 上各装一个灯泡,要求同一条线段两端的灯泡不同色,则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有________种.(用数字作答)

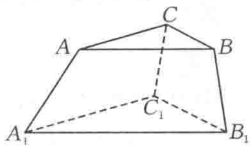


图 1-1-6

思路点拨 将图中 A_1A 剪开后展平,再分类求解.

【解】 把图中 A_1A 剪开后展平的示意图为图 1-1-7.

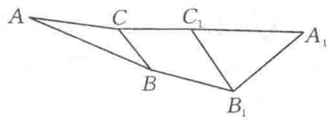


图 1-1-7

同一线段两端灯泡颜色不同且 A_1 与 A 也不同,按下面顺序装灯泡:

$$A—C—B_1—B—C_1—A_1.$$

情形 1:B_1 同 C 颜色,方法有 $4\times3\times1\times2\times3\times1=72$(种);

情形 2:B_1 同 A 颜色,方法有 $4\times3\times1\times2\times2\times2=96$(种);

情形 3:B_1 不同于 A、C 颜色,方法有 $4\times3\times2\times1\times2\times1=48$(种).

所以共有 $72+96+48=216$(种)不同方法.

答案 216.

探究创新拓展

例 1 (1)5 名学生从 3 项体育项目中选择参赛,若每一名学生只能参加一项,则有多少种不同的参赛方法?

(2)若 5 名学生争夺 3 项比赛冠军(每一名学生参赛项目不限),则冠军获得者有几种不同情况(没有并列冠军)?

思路点拨 本题关键在于搞清楚要以谁为主来研究问题.(1)中完成的事件是 5 名学生从 3 项体育项目中选择一项参赛.应以"学生"为主,即每名学生都有 3 种选择(即他可以选择 3 项体育项目中的任何 1 项);(2)中完成的事件是 5 名学生争夺 3 项比赛冠军,这里,每名学生能获几项比赛冠军不确定,但这每一项比赛的冠军都可以由 5 名学生中的 1 人获得,故应以"冠军"为主,即把"冠军"作为位置,由 5 名学生去占 3 个位置.

【解】 (1)每名学生都可从 3 项体育项目中选 1 项,有 3 种选法,故 5 名学生的参赛方法有 3^5 种;(2)每个冠军皆有可能被 5 名学生中任 1 人获得,3 个冠军依次被获得的不同情况有 5^3 种.

点评　解决这类问题，切忌死记公式“m^n”或“n^m”，而应弄清楚哪类元素必须用完，就以它为主进行分析，再用分步计数原理来求解．

例 2　用 6 种不同的颜色为如图 1-1-8 所示的广告牌涂底色，要求相邻的区域用不同的颜色，共有多少种不同的涂法？

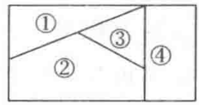


图 1-1-8

【解】　第一步涂区域①，有 6 种涂法；第二步涂区域②，有 5 种涂法；第三步涂区域③，有 4 种不同的涂法；第四步涂区域④，有 4 种不同的涂法（④与②③不同色）．

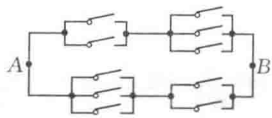
依分步乘法计数原理知，有 $6\times5\times4\times4=480$（种）不同的涂法．

点评　像这类问题就不宜用树形图一一列举，其关键是运用分步计数原理作理性分析．

三级题型测训

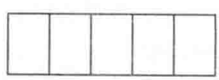
Ⅰ 夯实基础

1. 某班进行班干部选举，从甲、乙、丙、丁四人中选出三人分别担任班长、副班长、团支书，规定上届任职的甲、乙、丙三人不能连任原职，则不同的任职方案有________种．
2. 直线方程 $Ax+By=0$，若从 0，1，2，3，5，7 这六个数字中每次取两个不同的数作为 A、B 的值，则表示不同直线的条数是________．
3. 一种号码锁有 4 个拨号盘，每个拨号盘上有从 0 到 9 共 10 个数字，这 4 个拨号盘可以组成的四位数字号码有________个．
4. 如图，一条电路在从 A 处到 B 处接通时，可以有________条不同线路．



第 4 题图

5. 电视台连续播放 6 个广告，其中含 4 个不同的商业广告和 2 个不同的公益广告，要求首尾必须播放公益广告，则共有________种不同的播放方式．（结果用数值表示）
6. 将 3 种作物种植在如图所示的 5 块试验田里，每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物，不同的种植方法共有________种．


第 6 题图