布 利 氏

# 新式算學教科書

## 第 二 編

## 第 一 章

## 已授之假設,定理,求作法

### 告 學 生

讀本書第一編之學生。當已知許多幾何學實例。本編將更用之以設立他例。今將已授之假設及定理。詳列於下。以便參考。括弧中之號碼。示第一編初次授此假設或此定理之節目。

凡不用第一編者。可用此表爲綱目。依教員之指導。照括弧內所表示之次序。證解各節。然此項實例。本編作爲假設而論。

### 假 設

1. 經過兩點。祇可有一直線。(20)
2. 直線如有兩點在面內。則全線必在面內。(204)
3. 兩點間最短之線爲直線。(22)
4. 兩直線祇可相交於一點。(25)
5. 一線段或一角。等於其分之和。(33)

6. 一線段或一角。大於其分之任一分。(34)

7. 相等數同加一數。得數相等。(35)

8. 相等數加相等數。得數相等。(36)

9. 相等數同減一數。或同減相等數。較數必等。(41)

10. 等數加不等數。得數不等。兩得數大小之序。以兩不等數而定 (42)

11. 不等數加同序之不等數。得數不等如前序。(43)

12. 等數減不等數。得數不等。其序與前不等數相反。(44)

13. 等數除等數。(除數 0 不在內)商數必等。(78)

14. 相等數同乘一數。或乘相等數。積數相等。(80)

## 角

15. 凡直角皆相等。(118)

16. 等圓心角。在同圓內或等圓內所割之弧必等。弦亦等。(124)

17. 同圓或等圓內。等弧等弦必為等角所割。(125)

18. 凡圓心角。可以所割之弧量之。(126)

19. 兩角之兩邊。兩兩平行。則兩角相等。或互為補角。(197)

20. 若兩接角之和。等於一平角。則兩外邊。必同在一直線內。(177)

21. 直線一旁。同以直角內一點為頂點之諸接角。其和等於一平角。即 180 度。(179)

22. 繞一點全空間諸接角之和。等於一周角。卽 360 度。(180)

23. 兩直線相交。其對頂角必等。(183)

## 三角形之角

24. 三角形三內角之和。等於兩直角。卽 180 度。(112)(198)

25. 於三角形各頂點。取一外角。其和必等於 360 度。(115)

26. 三角形之外角。等於兩內對角之和。(118)(199)

27. 若三角形之三角。各與別三角形之相當角等。則兩形相似。(233)

28. 等腰三角形之兩底角相等。(280)

29. 等邊三角形。亦爲等角三角形。(281)

30. 若三角形內有兩角相等。則此形爲等腰三角形。(281)

31. 直三角形之兩銳角。互爲餘角。(184)

32. 若直三角形之銳角。爲 30° 及 60°。則 90° 角之對邊。爲 30° 角對邊之兩倍。(185)

33. 若三角形之兩邊不等。則所對之兩角亦不等。較大之角。與較大之邊相對。(281)

34. 若三角形之兩角不等。則所對之兩邊亦不等。較大之邊。與較大之角相對。(281)

## 垂　線

35. 一點至一直線之垂線。爲此點距線之最短者。(285)

36. 於已知線內已知之一點。祇可作一垂線。(176)

由已知之一點。至已知之一線。祇可作一垂線。

37. 直線之中點垂線內各點。與直線兩端之距必等。(281)

38. 若線外一點。距線之兩端等遠。則此點必在線之中點垂線內。(283)

39. 若線內有兩點。各與別線內兩點相距等遠。則此兩線必互爲垂線。(283)

## 平行線

40. 平行線。任何點。相距皆等遠。(192)

41. 於線外一點。祇可作一直線與其線平行。(194)

42. 一線割兩線。若同位角等。則兩線平行。(195)

43. 若兩線同爲一線之垂線。則兩線平行。(195)

44. 兩直線爲一直線所割。若兩內錯角等。則兩直線平行。(195)

45. 兩直線爲一直線所割。若割線同旁之兩內角互爲補角。則兩直線平行。(195)

46. 若兩線各與一線平行。則兩線必互相平行。(195)

47. 若兩平行線爲一直線所割。則其同位角必等。其內錯角亦等。割線同旁之兩內角。必互爲補角。(196)

## 線段之等比例

48. 任作一線。與三角形之一邊平行。割其餘兩邊。則所割相當之段。比例相等。(244)

49. 平分三角形一角之線。割對邊爲兩段。此兩段之比例。與三角形餘兩邊之比例等。(245)

50. 若三角形之兩邊。依同一之比例截分。則聯兩分點之線。必與第三邊平行。(246)

## 面積與體積

51. 正方形之面積。等於邊之方。(140)

52. 長方形之面積。等於底乘高。(141)

53. 長立方形之體積。等於長乘寬乘高。(145)

54. 立方形之體積。等於邊之立方。(146)

55. 平行四邊形之面積。等於高乘底。(163)

56. 三角形之面積。等於高乘底之半。(164)

57. 兩邊平行四邊形(卽梯形)之面積。等於高乘兩底和之半。(166)

## 面積之等比例

58. 等比例之中項相乘。等於外項相乘。(259)

59. 兩長方形之面積相比。如其長寬相乘之比。(260)

60. 若兩長方形之底等。則兩形相比。如其高相比。(261)

61. 若兩長方形之高等。則兩形相比。如其底相比。(262)

62. 兩平行四邊形之面積相比。如其高與底相乘之比。(263)

63. 兩三角形之面積相比。如其高與底相乘之比(264)

64. 若兩平行四邊形之底等。則兩形相比。如其高相比。(265)

65. 若兩三角形之底等。則兩形相比。如其高相比。(266)

## 相合三角形

66. 兩三角形。若此形之兩邊及其夾角。等於彼形之兩邊及其夾角。則兩形相合。(邊.角.邊.) (274)

67. 兩三角形。若此形之兩角及中間之邊。等於彼形之兩角及中間之邊。則兩形相合。(角.邊.角.) (275)

68. 兩三角形。若此形之三邊。各等於彼形之三相當邊，則兩形相合。(邊,邊,邊.) (283)

69. 兩直三角形。若此形之弦與一邊。各等於彼形之弦與一邊。則兩形相合。(285)

## 相似三角形

70. 兩三角形。若其相當邊之比例等。則兩形相似。(236)

## 軌跡

71. 線之中點垂線。乃距線兩端相等各點所經之路。凡此種爲各點所經之路。名曰軌跡。(284)

72. 角之平分線。爲角內距兩邊等遠各點之軌跡。(304)

## 切　　線

73. 交切點之半徑。必與切線互爲垂線。(308)

74. 一直線。在半徑之外端。與半徑爲垂線。此線必爲圓之切線。(309)

## 派達哥拉士氏定理

75. 凡直三角形。句方股方之和。等於弦方。(402)

# 第二章

# 證題法

## 論理學

76. **理論** 本書第一編中。已將代數與幾何許多有用之法例。以量法尋得及證實之。或以理論法證明之。

吾人處世。幾無日不用理論法推斷事理。例如金屬爲導熱最速之品。鉛爲金屬。於是推斷鉛爲導熱最速之品。或信鐵爲金屬中最有用而價最賤之物。因之遂推斷凡最有用之金屬。亦必爲價格最賤之金屬。

凡無論何種學識。皆有可引人起推想觀念之性質。論理學者。專論此種性質之科學也。蓋人苟不知理論之正當法。卽難免錯誤。惟論理學能指出此種錯誤之點。例如法人皆爲歐產。然歐人未必盡爲法產。其理由可用論理學解之。

**理論之錯誤** 希臘古儒。因理論之錯誤。嘗謂物能自動。爲必無之理。其說曰。物旣能自動。其轉移之方向。必不出二端。一爲本在之地位。一爲非本在之地位。然人未嘗見物能自至其非本在之地位。且物旣動。必不能永居其本在之地位。故物必不能自動。

學生中或有知以下例題之不確者:

無犬有九尾

一犬較無犬多一尾，

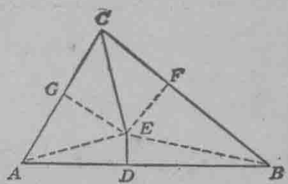
故一犬有十尾。

如此。可知正當之理論法。爲用甚廣。蓋藉此法。苟遇不正之議論。即可指出其弱點。而改正之。

## 幾何學之虛相

77. 用理論解幾何及代數題。有一定之法例。由以下兩題觀之。知解幾何題。須十分留意。

1. 定理：凡三角形皆爲等腰三角形。



第　一　圖

已知三角形 $ABC$，如第一圖。

證 $ABC$ 爲等腰三角形。

證：設 $DE$ 爲 $AB$ 之中點垂線。又 $CE$ 爲 $C$ 角之平分線。而遇 $DE$ 於 $E$。

由 $E$ 作 $EA$ 線，及 $EB$ 線，

作 $EG$ 爲 $AC$ 之垂線。又 $EF$ 爲 $CB$ 之垂線。

於是　$\triangle ADE \cong \triangle BDE$(§69)。

故　$AE=BE$.(因相合三角形之相當邊相等)。

$\triangle CEG \cong \triangle CEF$(§67)。

故　$EG=EF$　又　$CG=CF$.　何故？

故　$\triangle AEG \cong \triangle BEF$.(弦與一邊)(§69)

故　$GA=FB$.

因 $CG=CF.$

所以 $CG+CA=CF+FB.$

或 $CA=CB.$

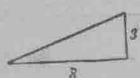
故 $ABC$ 雖非等腰三角形。似可證之爲等腰三角形。

作三角形如第一圖。試求證中之誤點。

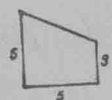
2. 用幾何法證 64=65.

作兩直三角形,令夾直角之兩邊一等於3,

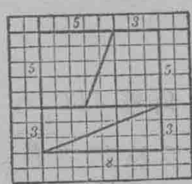
一等於 8.(第二圖)。




第 二 圖



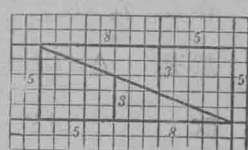

第 三 圖




第 四 圖

作兩四邊形。(第三圖) 令兩對邊平行。此兩對邊。一等於 3。一等於 5。置三角形及四邊形如第四圖。卽得一正方形。其面積等於 8×8=64。

若置三角形及四邊形如第五圖。則得一長方形。其面積等於13×5=65。 ∴64=65。作前圖。試求誤點。




第 五 圖

## 證 題 之 要

**78. 證題之要.** 77節中兩題之錯誤。皆由以大約相似者。視爲確實相似而來。蓋凡事物之似實者。不可卽信

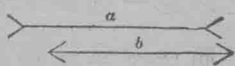
以爲實。而據爲定理也。若一物之外觀如此。即信以爲如此。且從而推論之。以至於錯誤。是謂“直覺”。

下列各題。證幾何學中不可信賴直覺。

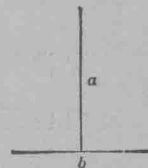
## 習　題

1. 比較第六圖中 $a$ 線及 $b$ 線之長度。先估計。後用界尺量之。

2. 如第一題,比較第七圖中 $a$ 線及 $b$ 線之長度。後用界尺量之。更正前數。

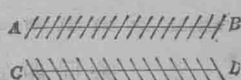



第六圖



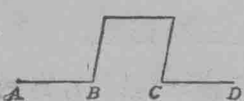

第七圖

3. 第八圖之 $AB$ 及 $CD$ 兩線是否平行? 先口答。後用界尺量兩線之距離以驗之。

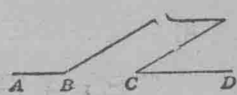



第八圖

4. 第九圖與第十圖之 $AB$ 及 $CD$ 兩線。是否同在一直線內? 用界尺驗之。




第九圖



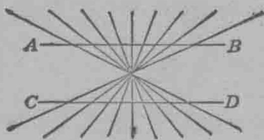

第十圖

5. 第十一圖之諸線。是否皆爲直線? 用界尺驗之。

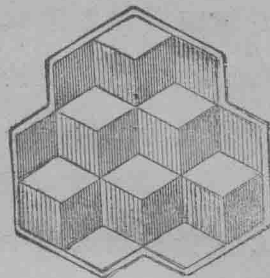
6. 數第十二圖之方塊。再閱之。當多得一塊。或少一塊。

## 證　題　法

**79. 證題法.** 證題無一定之法。惟普通證題法。學



第十一圖


第十二圖

者皆當知之。以免一遇難題。茫無把握。徒耗光陰與精力也。此種普通證題法。本章僅述數則。其餘當於第四章中補論之。

## 80. 普通方法. 假設. 終結.

1. 先詳讀問題。以明題意。證題時。勿忘題意。多數問題。至少須讀兩遍。

2. 若問題爲幾何題。則當作一普通圖形。例如題之所指爲三角形。則作一不等邊三角形。勿作等邊三角形。或等腰三角形。及直三角形。以免錯誤。蓋證等邊三角形之定理。不能用以證等腰三角形。或直三角形也。

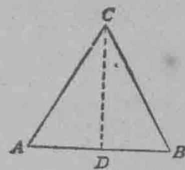
3. 將已知者(假設), 及須證者(終結), 寫於紙上。所陳述者。皆當指所作之圖而言。

4. 設遇難題。一時不能得正當之證。則當從別題上着想。卽求定理之與此題相似者。

如此。若證兩角相等。則自問據何情狀。兩角方能相等。若證兩線平行。則問兩線何時平行。然後選一最相當之定理。

以證所需。故已知之定理。及已解之問題。皆當時常溫習。以備應用。然溫習舊題。必先勉强。而後方成習慣。舊題既熟。則一遇新題。卽知引證矣。

5. 幾何題之終結。有時須於已知圖形上。加作數線。方可得之。例如第十三圖。若 $AC=CB$，則作 $C$ 角之平分線。又證 $\triangle ADC \cong \triangle BDC$。方可證 $\angle A=\angle B$。



第十三圖

81. **疊合證題法.** 此法於§§66, 67中證相合三角形時常用之。其法卽將此形放於彼形之上以指兩形密合。

此法證理簡括。尙合實用然數學家以爲非妥善之法。因證此法之定理。常不詳細。致學者用此法時。常患無條理之病。

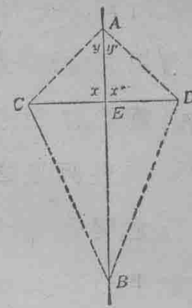
82. **用相合三角形證題法.** 凡證兩邊相等。或兩角相等。有時祇須指此兩邊或兩角。爲兩相合三角形之相當部。卽可證明所需。然欲證兩相合三角形。必先於已知形上。加作助線。使欲證之兩等邊。或等角。皆爲兩相合三角形之相當部。觀下節之題。卽知此法之用意。

83. **定理:** 若已知直線上有兩點。各距兩已知點等。則已知直線必爲兩已知點聯線之中點垂線。

已知直線 $AB$ (第十四圖) 又 $C$ 及 $D$ 兩點。

設 $AC=AD$, $CB=BD$.

證 $x=x'$, $CE=ED$。



第十四圖

**豫先商論：** 若$\triangle CAE\cong\triangle DAE$,則$x=x'$,

但所知者爲$AE=AE$, $CA=AD$,

又$\angle ACB=\angle ADE$,(§28)故無須再求

他部,即知$\triangle CAE\cong\triangle DAE$.

故必先證$\triangle ACB\cong\triangle ADB$,方得$y=y'$.

| 證： | 理由： |
|---|---|
| $AC=AD$, $CB=BD$。 | 設想. |
| $AB\equiv AB$。 | $\triangle$s $ACB$, $ADB$之公共邊. |
| 故$\triangle ACB\cong\triangle ADB$ | 邊、邊、邊、(68). |
| 故$y=y'$. | 相合三角形之相當部相等. |
| $AE\equiv AE$ | 公共邊. |
| $AC=AD$ | 假設 |
| 故$\triangle ACE\cong\triangle ADE$ | 邊.角.邊.(67) |
| 故$x=x'$ | 相合三角形之相當部相等. |

**84. "故"與"因"之記號.** $\therefore$即爲故,而$\because$即爲因。

**85. 定理之習慣處置法.** 證定理之格式。可分三大部。即假設,終結,及證論是也。證論之下。須將理由註明。所謂理由者。不出下列四項：(1)定義。(2)假設。(3)公理。(4)已證之定理。※ 證題末句。須與"終結"之句語同。†

**86. 温習.** 常温舊題。獲益良多。温題之法。但將圖形及證理之大綱。記憶可也。如此。則每日僅費數分鐘之温習。

而較諸全章讀畢時。或臨考試時。始行補溫。可事半功倍。

*郝波克萊士(Hippocrates)(生於紀元前470年)創用引定理以證定理之法。

證定理之法。爲希臘人所發明。埃及人始創幾何學。然祇求合於日用。不求進步。但知定理之眞確而已。以後。希臘人將此項實例。用科學名詞名之。用證理註之。又因幾何學中。不能全用證理。故設假定理以代之。

凡數學,不用證理,而人皆信其理之眞確者。近世數學家名之曰公理。歐几利得,(Euclid)(生於紀元前300年)名之曰公意。例如"等數加等數。其和必等。"此爲公理。因無論算學,代數,或幾何中。其理皆同也。

近世數學。凡公理之特別屬於幾何者。稱爲"假定公理"。例如"兩點定一直線。"是爲假定公理。別書著作家。有仍以公理二字,表示假定公理者。

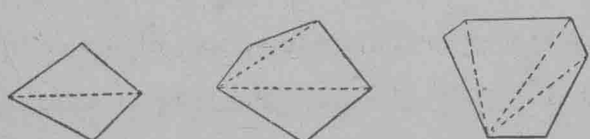
因有不能詳證之命題。故有不能解釋之名詞。如點,線,等類是也。派司區(Pasch)(生於1881年)嘗承認幾何學中不能全用證理之說。

## 87. 推論法.

數學實例。有時可用推論法求得之。其法即推想他項實例多種。俾知無論何種實例中。皆含一普通之法例。下列之題。指此法之意。

問題:　三角形三內角之和爲180°。問四邊形,五邊形,及各種多邊形,諸內角之和爲幾度?

求多邊形諸內角之和。須先作對角線。令多邊形成諸三角形。



第十五圖　　第十六圖　　第十七圖

例如四邊形,可分作兩三角形。(第十五圖)五邊形可分作三三角形。(第十六圖)六邊形可分作四三角形。(第十七圖)餘推類。

下列之表。詳載各種多邊形諸內角之和。

多邊形內三角形之數目。與邊之數目。作何比較?

諸內角之和。與邊之數目。作何比較?

$n$ 邊形諸內角之和為幾度?

試填相當之數目於表內空格。

| 多邊形之邊數 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 15 | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 三角形之數目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 諸內角之和 | 180° | $2\times180°$ | $3\times180°$ | $4\times180°$ | $5\times180°$ | | | |

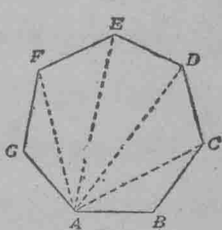
可知推論法。但示數學之實例。未嘗證其理由。

已知 $n$ 邊形諸內角之和為 $(n-2)180°$。今當證其是否眞確。證理列后。

88. 定理: $n$ 邊形諸內角之和為 $(n-2)180°$。或 $(n-2)$ 平角。

已知多邊形 $ABCD$ …… 共有 $n$ 邊 (第十八圖)。

證此形諸內角之和為 $S$; $S=(n-2)180°$。



第十八圖

**證:** 從 $A$, 作對角線至別角頂。遂分原形作 $(n-2)$ 三角形。何故?