

題解中心

代數學辭典

索引

上海

代 數 學 辭 典

(索 引)

第一 整式之部

1. 求 值

- 設 $a=9, b=12, c=15, s=18$ 時, 則式 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 之值如何? ... 3
- 設 $a=9, b=12, c=15$, 及 $2s=a+b+c$ 時, 則 $\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ 之值如何? ... 4
- 設 $a=1, b=-2, c=-1$, 又 $a=-2, b=-1, c=-3$, 則 $-a+b-c$ 之值如何? ... 9
- 設 $a=-2, b=-3, c=-5$. 求 $-a+(-b)-(-c)$ 之值. ... 10
- 設 $a=-1, b=-2, c=-3$, 則 $\{a-(b-c)\}^2+\{b-(c-a)\}^2+\{c-(a-b)\}^2$ 之值如何? ... 11
- 設 $3y=x+2z$, 則 $x^3-27y^3+8z^3+18xyz$ 之值如何? ... 146
- 設 $3x=a+b+c$, 求下式之值: $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)$ 157
- 設 x^2+7x+c 得以 $x+4$ 整除之, 則 c 之值如何? 200
- 欲使 $a^3+b^3+c^3-mabc$ 得以 $a+b+c$ 整除, 則 m 之值, 必須如何? ... 201
- 設 $6x^2+(a+3)x-8$, 可以 $2x+3$ 整除之, 則 a 之值如何? ... 217
- $x^4+4x^3+3x^2+px+q$ 及 x^3+3x^2+2x+1 同以 x^2+2x+1 除之, 而得同樣之剩餘時, p 及 q 之值若何? 221

- 設 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + lx + m$, 得爲 $x^2 - 5x + 6$ 所整除, 則 l , m 之值若何? ... 222
- 設 $n=7$, $x=3$, 則 $x+2x^2+3x^3+\dots+nx^n$ 之值如何? ... 233
- 設 $(a-3)x^3+(2a-3b+5)x^2+(3a+2b-4c)x+ac-bd+7$ 與 x^3+7x^2+4x+5 , 不問 x 之值如何, 而恆相等, 則 a, b, c, d 之值如何? ... 248
- 設 $(a-b)x^4+(a+b)x^3+(3b-c)x^2+(ab-cd+9)x+de-c$ 等於 $2x^3-2x^2+1$, 而無關 x 之值時, 則 a, b, c, d, e 之值若何? ... 249
- $4x^4-15x^3+11x^2-7x+3$, 得爲 $x-3$ 所整除, 其商以 ax^3+bx^2+cx+d 表之, 試以除數乘商等於被除數之定律, 求 a, b, c, d 之值. ... 250
- 設 $(x+1)(x^2+Ax+1)=x^3+1$, 求 A 257
- 設 $(x^2+x+2)(x^2-2x+1)-(Ax^2+Bx+C)=x^4-x^3+x+1$, 求數字係數 A, B, C 258
- 根據析因數法, 求 (1) $(575)^2-(425)^2$, (2) $(8133)^2-(8131)^2$, (3) $(10001)^2-1$ 之值. ... 310
- $6x^2-11xy-10y^2-19y+\lambda$ 得分解爲兩個一次整數因數時, λ 之值若何? ... 394
- 二數之和爲 45, 最小公倍數爲 168, 求二數. ... 519
- 有二數, 最大公約數爲 7, 最小公倍數爲 105, 求二數. ... 520
- 二數之最大公約數爲 16, 最小公倍數爲 192, 求二數, 但二數之一, 不等於 16. ... 521
- x 須有若何之值, 方能令 $6x^3+37x^2+41x-18$ 與 $15x^3+34x^2+5x-6$ 二式同時爲零? ... 523
- 設 x^2-x-a 及 x^2+x-a 有公約數時, 則 a 之值如何? ... 526
- 已知 a, b 之積, 而求 $a+1$ 與 $b+1$ 之積, 當用何法? 又已知 $47796 \times 28534 = 1363811064$, 根據求得之方法, 求 47797×28535 265

- 設 $x=a+1, y=a-2$, 求 $x^2+y^2-4x+6y+3$ 之值. 271
- $A=BQ+R$ 中, 設 $A=x^3+6x^2y-8xy^2+21y^3, B=x^2-2xy+4y^2, R=2x^2y-3y^3$, 求 Q 279
- 設 x^2+px+q 除以 $x-1$, 得剩餘 6, 除以 $x+1$, 得剩餘 2. 求 p 及 q 之值. ... 286
- $a-b-c$ 除何式可得商 $a^2+b^2+c^2+ab+ac+2bc$, 剩餘 $3bc(b+c)$ 288

2. 求 和

- 求 $a^3-a^2+a, a^2-a+1, a^4-a^3-1$ 三式之和. ... 18

3. 求 差

- 自 $2n-(3n-\overline{2m-n})$ 減去 $2m-(3m-\overline{2n-m})$ 24

4. 求 積

- 求 x^4-2x^2+x-3 與 x^4-x^3-x-3 之積. ... 29
- 求 x^4+x^2+1 與 x^4-x^2+1 之積. ... 30
- 求 $a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2, a+b+c$ 二式之積. 31
- 求 $4a^2+9b^2+c^2+3bc+2ca-6ab, 2a+3b-c$ 二式之積 ... 32
- 試以 $x^5+a^5-ax(x^3+a^3)$ 乘 $x^3+a^3-ax(x+a)$ 33
- 求 $ax^2+(a+b)x+(a^2+ab+b^2)$ 與 $bx^2-(a-b)x+(a^2-ab+b^2)$ 之積. ... 34
- 計算 $(b+c)(c+a)(a+b)$... 35
- 計算 (1) $(x+a)(x+b)$, (2) $(x+a)(x+b)(x+c)$ 36
- 計算 $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)$ 37
- 求 x^4+1, x^2+1, x^2-1 之積. ... 38
- 求 $x^4+16y^4, x^2+4y^2, x+2y, x-2y$ 四式之積. ... 39
- 求 a^2+ab+b^2 與 a^2-ab+b^2 之積. ... 40
- 求 $x^2-x+1, x^2+x+1, x^4-x^2+1$ 之連乘積. ... 41
- 求 $a^2-2ab+4b^2, a^2+2ab+4b^2, a^4-4a^2b^2+16b^4$ 之連乘積. ... 42

- 求 $(x-y)^2$, $(x+y)^2$, $(x^2+y^2)^2$ 之連乘積. ... 43
- 求 $a^2+2ab+b^2-c^2$, 與 $a^2+2ab-b^2+c^2$ 之積. ... 44
- 求 $a+b+c$, $a+b-c$, $a+c-b$, 及 $b+c-a$ 之連乘積. 45
- 求下式各積. (1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$, (2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 46
- 求 $a+b+c+d+\dots$ 之平方. ... 47
- 求 x^3+x^2+x+1 之平方. ... 48
- 求 $a+b$ 及 $a-b$ 之立方. ... 49
- 求 $a+b+c$ 之立方. ... 50
- 求 $(x^2+1)^3$, $(x+1)^3$, $(x-1)^3$ 之連乘積. ... 51
- 計算 $\{(a-b)x^2+(b-c)x+(c-d)\}(x-1)$ 52
- 求 $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd$ 乘 $a+b+c+d$ 之積. ... 53
- 有四多項式, $A=a+b+c+d$, $B=a+b-c-d$, $C=a-b+c-d$, $D=a-b-c+d$, 求 $AB(A^2+B^2)+CD(C^2+D^2)$ 之量. ... 77
- 根據未定係數法, 計算下式: (1) $(a+b)^3$, (2) $(a+b+c)^3$, (3) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ 138
- $(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$ 之結果如何? ... 140
- 求 $\{a^2+a(b-c)\}\{b^2+b(c-a)\}\{c^2+c(a-b)\}$ 之結果. ... 141
- 求表示 $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\dots(x+a_n)$ 結果之公式, 並根據此公式, 計算以下二題: (1) $(x+1)(x-1)(x+2)$, (2) $(x+b-c)(x+c-a)(x+a-b)$ 142
- 求表示 $(A_1x+a_1)(A_2x+a_2)(A_3x+a_3)\dots(A_nx+a_n)$ 結果之公式, 並據此計算下式: $(ax+b-c)(bx+c-a)(cx+a-b)$ 144
- 求以下各積:
- (1) $(x^2-2x+7)(x^2-2x-3)$.
- (2) $(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$.
- (3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 266
- 求以下各積:

- (1) $(x^{m+1}-4)(x^{m+1}-7)$.
 (2) $(2a^{2m-1}-b^{m+1})(2a^{2m-1}+3b^{m+1})$.
 (3) $(2a^m x^{n-1}-a^{m-1}x^n)(5a^2 x^n-2a^m x^2)$.
 (4) $(\frac{2}{3}a^{m+1}b^{n-1}-\frac{1}{5}a^{n-2}b^{m+2})(\frac{1}{2}a^n b^{m+1}+a^{m+1}b^n)$.
 (5) $(a^m+b^m)(a^n+b^n)(a^p-b^p)$.
 (6) $(a^{3x}-a^{2x}+a^x-1)(a^x+1)$ 268

5. 求 商

- 試以 $x+1$ 除 x^3+1 163
 ● 試以 $3x+2y$ 除 $27x^3+8y^3$ 164
 ● 試以 $4y+3x$ 除 $27x^3+64y^3$ 165
 ● x^4+1 除以 $x+1$, 所得之商爲 $x^3-x^2+x-1+\frac{2}{x+1}$. 試
 立式表示之. 166
 ● 試以 $a+b$ 除 a^5+b^5 167
 ● 求 x^2-9y^2 除以 $x+3y$ 之商. 168
 ● 求 $64x^5-y^5$ 除以 $2x-y$ 之商. 169
 ● 試將 $a^2+3ab+4b^2$ 依 (1) a 之降冪排列, (2) b 之降冪排
 列, 除以 $a+b$ 170
 ● 求 $acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc$ 除以 $ax-b$ 之結
 果. 171
 ● 求 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 除以 $a+b$ 之結果.
 172
 ● 求 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$ 除以 x^2+y^2 之商.
 173
 ● 求 $a^{4n}-a^{3n}b^m+a^n b^{3m}-b^{4m}$ 除以 a^n-b^m 之商. 174
 ● 求 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 除以 $a+b+c$ 之結果 ... 175
 ● 求 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 除以 $a+b+c$ 之結果; 並據此以求
 $8x^3+8y^3+z^3-12xyz$ 除以 $2x+2y+z$ 之商, 但不准實行
 除法. 176
 ● 求 $a^3+8b^3+27c^3-18abc$ 除以 $a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca$
 $-2ab$ 之結果. 177
 ● 求 $a^2(b+c)-b^2(a+c)+c^2(a+b)+abc$ 除以 $a-b+c$ 之

- 結果. ... 178
- 求 $xy^3 + 2y^3z - xy^2z + xy^2x^2 - x^3y - 2yx^3 + x^2z - xz^3$ 除以 $y + z - x$ 之結果. ... 179
- 求 $x^4 + 1$ 除以 $x^2 + x\sqrt{2} + 1$ 之結果. ... 180
- 求 $(b-c)a^3 + (c-a)b^3 + (a-b)c^3$ 除以 $a^2 - ab - ac + bc$ 之結果. ... 181
- 求 $a^{3x} - a^{2x} + a^x - 1$ 除以 $a^x + 1$ 之結果. ... 182
- 求 $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ 除以 $a^2 - b^2 + c^2 + 2bc$ 之結果. ... 183
- 求 $2a^2(b+c)^{2n} - \frac{1}{2}$ 除以 $a(b+c)^n + \frac{1}{2}$ 之商. ... 184
- 求 $x^n - 2x + 1$ 除以 $x - 1$ 之結果. ... 185
- 求 $2a^2x^2 - 2(b-c)(3b-4c)y^2 + abxy$ 除以 $ax + 2(b-c)y$ 之結果. ... 186
- 求 $(a-b)x^3 + (b^3 - a^3)x + ab(a^2 - b^2)$ 除以 $(a-b)x + a^2 - b^2$ 之結果. ... 187
- 求 $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$ 除以 $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ 之結果. ... 188
- 求 $b(x^3 - a^3) + ax(x^2 - a^2) + a^3(x-a)$ 除以 $(a+b)(x+a)$ 之結果. ... 189
- 求 $ax^2 - ab^2 + b^2x - x^3$ 除以 $(x+b)(a-x)$ 之結果. 190
- 求 $a^2b - bx^2 + a^2x - x^3$ 除以 $(x+b)(a-x)$ 之結果. 191
- 求 $(a^3 + a^2 - a - 1)x^3 + (2a^4 + a^3 - a - 2)x^2 + (2a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 2)x + a^6 + a^4 - a^2 - 1$ 除以 $(a^2 - 1)x^2 + (a^3 - 1)x + a^4 - 1$ 之結果. ... 192
- 用分離係數法, 求 $2x^6 - 7x^5 + 5x^4 + 3x^2 - 3x^2 + 4x - 4$ 除以 $2x^3 - 3x^2 + x - 2$ 之結果. ... 193
- 求 $x^7 + x^6 + x^2 + 1$ 除以 $x^3 + x^2 - 1$ 之結果. ... 194
- 求 $(a^2 - b^2)x^{2m} + 2(a^3 + b^3)x^{2m-1} + 3(a^4 - b^4)x^{2m-2} + 4(a^5 + b^5)x^{2m-3} + \dots$ 除以 $(a+b)x^m + (a^2 - b^2)x^{m-1} + (a^3 + b^3)x^{m-2} + (a^4 - b^4)x^{m-3} + \dots$ 之結果. ... 195
- 求 $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13$ 除以 $x^2 - 3x + 2$ 所得之商及剩餘. ... 196

- 求 $6a^5 + 5a^4b - 8a^3b^2 - 6a^2b^3 - 6ab^4$ 除以 $2a^3 + 3a^2b - b^3$, 至得四項之商為止. ... 197
- 用未定係數法, 求 (1) $(x^9 - 2x^8 + 2x^6 - x^5 - x^3 + x^2 + 3x - 4) \div (x^2 - 2x + 1)$, (2) $(x^7 + x^5 + x + 1) \div (x^3 + x^2 + x + 1)$ 之商, 並以分數表其剩餘. ... 224
- 用未定係數法, 求 $x^5 + 7x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 17x + 1$ 除以 $x^3 - 5x + 2$ 之結果. ... 225
- 求 $(x + y + z)^3 + (x - y + z)^3$ 除以 $x + z$ 之結果. 226
- 求以下各商:
- (1) $\frac{(x^{12} - 1)(x^2 - 1)}{(x^6 - 1)(x^4 - 1)}$.
- (2) $\frac{b(x^3 - a^3) - ax(x^2 - a^2) - a^3(x - a)}{(b - a)(x - a)}$.
- (3) $\frac{a^8 - b^8 + a^2b^2(a^4 - b^4)}{a^6 - b^6}$.
- (4) $\frac{(x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3}{(x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2}$.
- (5) $\{x^3 + y^3 + z^3 - x^2(y + z) - y^2(z + x) - z^2(x + y) - 6xyz\} \div (x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy)$.
- (6) $\frac{(x + y)^7 - x^7 - y^7}{x^2 + xy + y^2}$ 280
- 求下列各式之商:
- (1) $(x^4 - 1) \div (x + 1)$, (2) $(x^6 - y^6) \div (x + y)$.
- (3) $(x^{30} - 1) \div (x^5 + 1)$ 281
- 求 $1 + x^7$ 除以 $1 + x^2$ 四項之商及剩餘, 依 x 之降幕排列之, 而書爲一等式. ... 282
- 求 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 除以 $x - 1$ 之商及剩餘, 並將計算之結果, 書爲一等式. ... 283
- 求下列各式之商:
- (1) $\frac{x^{2n} - 1}{x^n + 1}$, (2) $\frac{x^{4m} + x^{2m} + 1}{x^{2m} - x^m + 1}$ 284
- 簡化 $(a - bc)(b - ca)(c - ab) + (1 + a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)$, 復以 $1 - abc$ 除其結果. ... 285
- 整式 A , 除以整式 B , 得商 p , 剩餘 C . B 除以 C , 得商

- q , 剩餘 D . C 除以 D , 得商 r , 而無剩餘. 求 A 及 B 除以 D 之商. ... 289
- 證 $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ 之整多項式, 得以 $(x-1)^2$ 整除之, 並求其商. ... 296

6. 求 剩 餘

- 求 $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13$ 除以 $x^2 - 3x + 2$ 所得之商及剩餘. ... 196
- 任意之整數函數 $f(x)$, 除以 $(x-a)(x-b)$, 則所得之剩餘爲 $[f(b) - f(a)]x + [bf(a) - af(b)] \div (b-a)$. 試證之. 又 $x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 3$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 之剩餘若何? ... 215
- 設 $A = a_2x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $B = a_1x^n + a_1\beta^{n-1} + a_2\beta^{n-2} + \dots + a_{n-1}\beta + a_n$, 試以 A, B 表示 $(x-a)(x-\beta)$ 除 $P = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ 所得之剩餘. ... 216
- 驗 $x^5 + a^5$, $2x^4 - 3x^3 + 6x - 4$ 究能爲 $x+a$, $x+2$ 分別整除否: 若不能整除, 則其剩餘若何? ... 218
- 求 $(x^2 + 5x + 2)^3$ 除以 $x^2 + 2x + 3$ 時之剩餘, ... 219
- 用未定係數法, 求 (1) $(x^9 - 2x^8 + 2x^6 - x^5 - x^3 + x^2 + 3x - 4) \div (x^2 - 2x + 1)$, (2) $(x^7 + x^6 + x + 1) \div (x^3 + x^2 + x + 1)$ 之商, 並以分數表其剩餘. ... 224
- 一整式除以 $x-1$, 得剩餘 7, 則 $x=1$ 時, 此式之數值如何? 又含 x 之一整式, $x=1$ 時, 其數值爲 7, 則除以 $x-1$, 可得剩餘若干. ... 287
- $x^7 - 9x^4 + 11x^2 - 7$ 除以 $x-4$, $x+1$, 及兩者之積, 各得剩餘若干? ... 290

7. 求 項

- 試求 $(1+x+y+x^2+y^2)(1+x-y)(1+xy)$ 中之最高次項. ... 61
- 試求 $(3+2x-y+x^2+xy+y^2)(2+x-2y+xy)(1+x+y)$

$+x^2+y^2$ 中之二次項. ... 62

8. 求係數

●求 $\{x^3+(x-1)^2\}(x-1)$ 中 x^2 之係數. ... 58

●求 $\{(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z\}(ax+by+cz)$ 中 yz 之係數. ... 59

●求展開 $(x+3y)(3x+y)(x+y)^2$ 後係數之和. ... 63

●試研究 $(x+y)(ax^2+bxy+cy^2)=x^3+y^3$ 一類式中之係數 a, b, c , 究可求得否? ... 139

●求 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ 中 x^3 之係數. 143

9. 求式

●試將 $x^4-x^3+2x^2-3$ 中之 x , 以 $y+3$ 代入, 復將代入之結果, 依 y 之冪順排列之. ... 54

●試以 $A(x-1)^4+B(x-1)^3+C(x-1)^2+D(x-1)+E$ 之形表示 $\{(x-1)^3+3(x-1)^2+2(x-1)+1\}(3x+2)$, 但 A, B, C, D, E 爲數字係數. ... 55

●試以二平方之差表 $(a^2-b^2)(c^2-d^2)$ 78

●試作 x, y, z 之二次同次對稱式之普遍式, 但須 x, y, z 中任何一數之符號雖變動, 而其式不變者. ... 128

●試作 x 及 y 之整式, 但無論就 x 或 y 而言, 須同爲一次之普遍式, 又設欲使之成爲對稱式, 則當如何? ... 130

●已知 $a^5+b^5=(a+b)^5-5(a+b)^3ab+5(a+b)a^2b^2$, 求 $a^5-b^5, (x-y)^5+(y-z)^5, (x-y)^5-(y-z)^5$ 之對應等值式. ... 162

● x^3+6x^2-4x-1 除何式可得商 x^2+5x-9 , 剩餘 8? ... 220

● x, y, u, v 之整式, 就 x, y 而言, 爲一次式[非就 x 而言, 爲一次式, 就 y 而言, 亦爲一次式之意], 就 u, v 而言, 亦爲一次式, 求其普遍式. ... 231

●有 a, b, c 之二次同次對稱式, $a=0, b=0, c=1$ 時, 結果爲 3, $a=b=c=1$ 時, 結果爲 -3, 求此對稱式. 419

- 二式之最小公倍數爲 $x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4$, 最大公約數爲 $x^2 - a^2$, 二式之一爲 $x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3$, 求他式. 522

10. 求 函 數

- 有獨項整數函數, 就 x 言爲三次, 就 y 言爲二次, 就 z 言爲一次. 設 $x=1, y=2, z=3$, 則其值爲 4, 求此獨項函數爲何. ... 27
- 有 x 及 y 之兩個獨項整數函數, 其積爲 $8x^4y^3$, 其商爲 $2x^2y^2$, 求此二函數 ... 28
- 有 x 之三次整數函數, $x=1$ 及 $x=-2$ 時, 可消失之, $x=3$ 時, 則此函數之值爲 30, 求此函數. ... 223
- 試表示 x^5 爲 $x-1$ 之整數函數, $(x^2+5x+2)^3$ 爲 $y=x-2$ 及 $z=x^2+2x+3$ 之整數函數, 但須爲 y 之一次式. 229
- 設 $f(z) = \frac{z^4-1}{z-1}$, $z=x^2+x+3$, 則 $f(z)$ 爲 $x-1$ 之函數. 試表示之. ... 230

11. 求 條 件

- $(ax+by+cz)\{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\}$, 須具有何種必要且充分之條件, 方能成爲 y 及 z 之對稱式? 129
- 欲使 $x^5+ax^4+x^3+x^2+bx+1$ 適爲 x^2-x+1 所整除, 須若何之充要條件. ... 202
- x 之一次有理整式, 欲使之恆等於零, 而不問 x 之值爲如何, 則其充要條件, 乃 x 之係數, 及不含 x 之項, 必須各等於零. 又 x 之一次有理整式, x 之值不止一個而皆等於零, 則此式恆等於零. 試證之. ... 234
- 欲使 $ax+b$, 得爲 $cx+d$ 所整除, 須具有若何之充要條件? ... 237
- $ax+by+cz+d$, 須具有若何之充要條件, 始可不問 x, y, z 之值, 而恆等於零. ... 238
- x 之二次有理整式 ax^2+bx+c , 欲使之不問 x 之值若何, 而恆等於零, 其充要條件爲 $a=0, b=0, c=0$. 又 x 之二

次有理整式, x 之值不止二個而皆等於零, 則此式恆等於零 試證之. ... 239

● x 之 n 次有理整式 $ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, 不問 x 之值若何, 而欲使之恆等於零, 則其充要條件, 爲 x 各次幂之係數 $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 及不含 x 之項 a_n 悉等於零. 試證之. ... 245

● $(x-a)^2$ 須具有若何條件, 始得爲 $x^3 + px + q$ 之因數. ... 389

● $xy + px + qy + r$, 須具有若何之充要條件, 始得分解爲兩個一次之因數. ... 392

● $ax^3 + bx + c$ 及 $a'x^3 + b'x + c'$ 有公因數成 $x + f$ 之形時, 其條件爲何? ... 529

12. 簡 化

● 去 $- \{ - [- (- x)] \} - [- (- y)]$ 之括號. ... 20

● 去 $- \{ - [- (b + c - a)] \} + \{ - [- (c + a - b)] \}$ 之括號. ... 21

● 簡化 $3x - \{ 2y + (5x - 3x + y) \}$ 22

● 簡化 $a - [a - b - \{ a - b + c - a - b + c - d \}]$ 23

● 簡化 $4 \left(x - \frac{y}{2} \right) - 6 \left[\left(2x - \frac{y}{3} \right) - 12 \left(\frac{x}{3} - \frac{3x + 2y}{24} \right) \right]$ 25

● 簡化 $\frac{1}{5} \{ x(x+1)(x+2) + x(x-1)(x-2) \} + \frac{2}{3}(x-1)x(x+1)$ 64

● 簡化 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) - yz(y+z) - zx(z+x) - xy \times (x+y)$ 65

● 簡化 $(x+y+z)^2 - (-x+y+z)^2 + (x-y+z)^2 - (x+y-z)^2$ 66

● 簡化 $(x+y+z)^2 - \{ x(y+z-x) + y(z+x-y) + z(x+y-z) \}$ 67

● 簡化 $\frac{1}{2} \{ (a+b)^3 - (a-b)^3 \}$ 68

● 簡化 $(x+y)(y-z)(z-x) - [z(x^2+y^2) - \{x(y^2+z^2) + y(x^2+z^2)\}]$ 69

● 簡化 $(a^2+b^2+c^2)^2 - (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c)$

- $-a)$ 70
- 簡化 $(a^2+b^2+c^2)^2+(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ 71
- 簡化 $\{x(x+a)-a(x-a)\}\{x(x-a)-a(x+a)\}$ 72
- 簡化 $(a+b+c)(x+y+z)+(-a+b+c)(-x+y+z)+(a-b+c)(x-y+z)+(a+b-c)(x+y-z)$... 132
- 計算 $(a^2-bc)^2(b-c)+(b^2-ca)^2(c-a)+(c^2+ab)^2(a-b)$.
... 133
- 簡化 $(x+b+c)(x^2+ax+b-c)+(x+c+a)(x^2+bx+c-a)+(x+a+b)(x^2+cx+a-b)$ 134
- 計算 $(\Sigma a)^2 \Sigma b c$ 135
- 簡化 $(b-c)(x+b+c)^2+(c-a)(x+c+a)^2+(a-b)(x+a+b)^2+(b-c)(c-a)(a-b)$ 136
- 簡化 $\frac{8x^3+y^3}{2x+y}-\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}-\frac{x^3+8y^3}{x+2y}\right)$ 198
- 簡化 $\frac{a^2+2ac-b^2-2bd+c^2-d^2}{a-b+c-d}-\frac{a^2-b^2}{a-b}$ 199
- 簡化 $\Sigma a(a-b)(a-c)+\Sigma a^2(b+c)$ 402
- 簡化 $(\Sigma a)^2-\Sigma(b+c)^2$ 416
- 根據對稱式之方法, 證 $\Sigma(y+z)^2-\Sigma x^2=(\Sigma x)^2$, 並簡化 $\Sigma(b+c-a)^2+(\Sigma a)^2$ 417
- 簡化下列各式:
- (1) $(x+y)(x-y)+(y+z)(y-z)+(z+x)(z-x)$,
 - (2) $(a+b+c+d)^2+(a-b+c-d)^2$,
 - (3) $(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2-(a+b+c)^2$,
 - (4) $(y+3)(y^2-1)-3(y+1)(y^2-9)+3(y-1)(y^2-9)-(y-3)(y^2-1)$,
 - (5) $(p+q)^2(q+r-p)(r+p-q)+(p-q)^2(p+q+r)(p+q-r)$,
 - (6) $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)$ 277
- 設 $z^2=x^2+y^2$, 簡化 $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$ 278

13. 求 證

●(1) $a=3, b=2$ 時, (2) $a=5, b=1$ 時, (3) $a=6, b=3$ 時,
 $a^3-b^3, (a-b)(a^2+ab+b^2), (a-b)^3+3ab(a-b)$, 及 $(a$
 $+b)^3-3ab(a+b)-2b^3$ 四式皆相等, 試證明之. ... 1

●若 $x=2$, 或 $x=3$, 或 $x=\frac{1}{2}$ 時, $2x^3-11x^2+17x-6$ 等於
 零, 試證明之. ... 2

● $x=b+2c-3a, y=c+2a-3b, z=a+2b-3c$ 時, 則 x
 $+y+z=0$. 試證之. ... 19

●試證 $(a+b+c+d)(a+b-c-d)=a^2+b^2+2ab-c^2-d^2$
 $-2cd$ 56

● $(a+b+c-d)(a+b-c+d)+(a-b+c+d)(-a+b+c$
 $+d)=4(ab+cd)$, 試證之. ... 57

●證 $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$ 73

●證 $(x+y)(x-y)+(y+z)(y-z)+(z+x)(z-x)=0$. 74

●求證 $2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a$
 $-b)^2$ 75

●求證 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x-y)(x-z)+2(y$
 $-z)(y-x)+2(z-x)(z-y)$ 76

●求證 $-(b-c)(c-a)(a-b)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a$
 $-b)$ 79

●證 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)$
 $=0$ 80

●證 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)(a$
 $+b+c)=0$ 81

●證 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, 及 $a^4+b^4=(a+b)^4-4$
 $\times ab(a+b)^2+2a^2b^2$ 82

●證 $(x+y)(x+z)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2=(z+x)(z+y)$
 $-z^2$ 83

●證 $(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)=(ax-by)^2+(ax-by)(ay$
 $+bx+by)+(ay+bx+by)^2$ 84

●證 $(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)-(x+y$

- $+z)^2 = yz + zx + xy. \dots \dots \dots 85$
- 證 $(b+c)(c+a)(a+b) + abc = (a+b+c)(bc+ca+ab)$
 $\dots \dots \dots 86$
- 設 $abc = (b+c)(c+a)(a+b)$, 證 $bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) = -abc.$ $\dots \dots \dots 87$
- 證 $(a+b+c)^3 - (b+c)^3 - (c+a)^3 - (a+b)^3 + a^3 + b^3 + c^3 = 6abc.$ $\dots \dots \dots 88$
- 設 $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, n 爲正整數, 求證 $(a+b+c)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}.$ $\dots \dots \dots 89$
- 證 $(ax^2 + 2bxy + cy^2)(aX^2 + 2bXY - cY^2) = \{axX + cyY + b(xY + yX)\}^2 + (ac - b^2)(xY - yX)^2.$ $\dots \dots \dots 90$
- 證 $(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x+y+z)^2$
 $\dots \dots \dots 91$
- 證 $(x^2 + xy + y^2)^2 - 4xy(x^2 + y^2) = (x^2 - xy + y^2)^2.$ $\dots \dots \dots 92$
- 證 $(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 + 2(x+y)(x+z) + 2(y+z)(y+x) + 2(z+x)(z+y) = 4(x+y+z)^2.$ $\dots \dots \dots 93$
- 證 $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2.$ $\dots \dots \dots 94$
- 證 $a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2 + 2abc(a+b+c) = 2 \times (bc+ca+ab)^2.$ $\dots \dots \dots 95$
- 設 $a+b+c=0$, 證 $a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2 = 0.$
 但不得引用公式, 祇可適當移項, 而將等式兩邊平方之.
 $\dots \dots \dots 96$
- 設 $a+b+c=0$, 求證 $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$
 $\dots \dots \dots 97$
- 證 (1) $2\{(y-z)^4 + (z-x)^4 + (x-y)^4\} = \{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\}^2$, (2) $(y-z)^4 + (z-x)^4 + (x-y)^4 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)^2$, (3) $(x+y+z)^2\{(y-z)^4 + (z-x)^4 + (x-y)^4\} = 2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2.$ $\dots \dots \dots 98$
- 證 $a^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)(c+a)(a+b) = (a+b+c)^3.$ $\dots \dots \dots 99$
- 若 $x+y+z=0$ 時, 則 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, 試證之.
 $\dots \dots \dots 100$
- 證 $(y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3 = 3(y-z)(z-x)(x-y).$

- ... 101
- 證 $a^3(bz - cy)^3 + b^3(cx - az)^3 + c^3(ay - bx)^3 = 3abc(bz - cy)(cx - az)(ay - bx)$ 102
- 求證 $\Sigma(b + c - 2a)^3 = 3(b + c - 2a)(c + a - 2b)(a + b - 2c)$.
... 103
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 中, 若以 $s - a, s - b, s - c$ 分別代入 a, b, c 而 $3s = 2(a + b + c)$ 時, 其值不變, 試證之. 104
- 設 $x = b + c - a, y = c + a - b, z = a + b - c$, 則 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$, 試證之. ... 105
- 若 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$, a, b, c 皆為實數, 而 $a + b + c \neq 0$, 則 $a^2 - bc, b^2 - ca, c^2 - ab$ 皆相等, 試證之. 106
- 設 $a + b + c + d = 0$, 則 $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(a + d)(b + d)(c + d)$, 試應用公式 $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(b + a)(a + c)(c + b)$ 證明之. ... 107
- 證 $(a + b)^3 + 3c(a + b)^2 + 3c^2(a + b) + c^3 = (b + c)^3 + 3a(b + c)^2 + 3a^2(b + c) + a^3$ 108
- 證 $\{(a + b)x^2 - (a^2 + b^2)x + a^3 + b^3\} \{(a - b)x^2 - (a^2 - b^2)x + a^3 - b^3\} = (a^2 - b^2)x^4 - 2(a^3 - b^3)x^3 + 3(a^4 - b^4)x^2 - 2(a^5 - b^5)x + a^6 - b^6$ 109
- 證 $(a + b + c + d)^2 + (a - b - c + d)^2 + (a - b + c - d)^2 + (a + b - c - d)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ 110
- 試證明下列二式: (1) $(a + 2)^2 - 4(a + 1)^2 + 6a^2 - 4(a - 1)^2 + (a - 2)^2 = 0$, (2) $(a + 2)(b + 2) - 4(a + 1)(b + 1) + 6ab - 4 \times (a - 1)(b - 1) + (a - 2)(b - 2) = 0$ 111
- 證 (1) $(a + 2)^3 - 4(a + 1)^3 + 6a^3 - 4(a - 1)^3 + (a - 2)^3 = 0$, (2) $(a + 2)(b + 2)(c + 2) - 4(a + 1)(b + 1)(c + 1) + 6abc - 4 \times (a - 1)(b - 1)(c - 1) + (a - 2)(b - 2)(c - 2) = 0$. 112
- 求證 $(a + b + c)^3 + (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 4a^2(b + c) + 4b^2(c + a) + 4c^2(a + b) + 4abc$ 113
- 設 $a + b + c = 0$, 則 $(b^2c + c^2a + a^2b - 3abc)(be^2 + ca^2 + ab^2 - 3abc) = (bc + ca + ab)^3 + 27a^2b^2c^2$, 試證之. ... 114
- 證 $x(x - y + z)(x + y - z) + y(x + y - z)(-x + y + z) + z(-x$

- $+y+z)(x-y+z)+(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=4$
 $\times xyz. \dots \dots \dots 115$
- 證 $4xy(x^2+y^2)=(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2. \quad 116$
- 求證 $4xy(x^2-y^2)=(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2. \quad 117$
- 證 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2. \dots 118$
- $1+a^2+b^2+c^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+a^2b^2c^2=(1-bc-ca$
 $-ab)^2+(a+b+c-abc)^2. \text{ 試證之. } \dots \dots 119$
- 證 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)-(ax+by+cz)^2=(bz-cy)^2$
 $+ (cx-az)^2+(ay-bx)^2. \dots \dots \dots 120$
- 證 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4$
 $\times(ad-bc)^2. \dots \dots \dots 121$
- 證 $(a^2+b^2+c^2)^2=(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2+(ab-ac)^2+a^4$
 $= (bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2.$
 $\dots \dots \dots 122$
- 證 $(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ax+by+cz)^2$ 可
 爲 $a^2+b^2+c^2$ 及 $x^2+y^2+z^2$ 所整除. $\dots \dots 123$
- 證 $(x^2+y^2+z^2+u^2)(x'^2+y'^2+z'^2+u'^2)=(xx'+yy'+zz'$
 $+uu')^2+(xy'-yx'+zu'-uz')^2+(xz'-yu'-zx'+uy')^2$
 $+ (xu'+yz'-zy'-ux')^2. \dots \dots \dots 124$
- 證 $(ay-bx)(cw-dz)+(az-cx)(dy-bw)+(aw-dx) \times (bz$
 $-cy)=0$, 次據此以證公式 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2$
 $+w^2)=(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx-cw+dz)^2+(az$
 $-cx+bw-dy)^2+(aw-dx-bz+cy)^2$ 中之右邊, 可書爲
 $(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx+cw-dz)^2+(az-cx+dy$
 $-bw)^2+(aw-dx+bz-cy)^2. \dots \dots \dots 125$
- 證 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)-(aa'+bb'+cc'$
 $+dd')^2$ 之式, 爲六平方之和. $\dots \dots \dots 126$
- $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 之多項式中, 設 $x=ax'+by', y=bx'$
 $-ay'$, 則得 $A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2$ 之多項式, 由此又得
 $B'^2-4A'C'=(B^2-4AC)(a^2+b^2)^2$ 之等式, 試並證之.
 $\dots \dots \dots 127$
- 證 $\Sigma(cy-bz)^2+(\Sigma ax)^2=\Sigma x^2 \Sigma a^2. \dots \dots 131$