

“化繁为简” 考研数学专题全讲系列

(理工类)

# 考研高等数学 专题全讲

主编 邹群 参编 于海蓉 张帆

同济大学出版社

“化繁为简”考研数学专题全讲系列

# 考研高等数学专题全讲

(理工类)

主 编 邹 群

参 编 于海蓉 张 帆



同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

信息时代,学习高等数学缺的不是题目,而是方法.

本书为弥补目前考研数学辅导之重题型、轻思想、总结雷同之不足,独创“化繁为简学习法”,将繁杂不堪的大学数学知识变得框架清晰、简单易懂.其精髓是立足知识点的概括与联系,以“极限”、“微观的量”与“宏观的量”的对比研究以及“多变量分析”等思想提炼方法,以方法指导繁杂的题型,以专题带动知识点.本书以此法为主线,突破章节限制,以3个框图引出总结与综合,仅用极限、微分、积分、级数、常微分方程等15个专题(一专题一方法)概括全课程,通过循循善诱使读者最终一通百通.本书凭借思想的新颖、语言的生动、解题思路的清晰和公式记忆方法的多样性凸显其风格,彻底打破数学教育枯燥刻板的百年印象,使数学学习成为乐事.

本书方法独到,语言流畅,举例丰富,深入浅出,既可供考研复习高等数学的读者学习使用,也可供初学高等数学的大学新生用作快速掌握高等数学知识和提升解题能力的参考书籍,还可供从事高等数学教学和研究的参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

考研高等数学专题全讲/邹群主编. —上海:同济大学出版社,2015.1

ISBN 978-7-5608-5649-0

I. ①考… II. ①邹… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 227902 号

---

“化繁为简”考研数学专题全讲系列

### 考研高等数学专题全讲

主 编 邹 群      参 编 于海蓉 张 帆

责任编辑 陈佳蔚      特约编辑 徐清华      责任校对 徐春莲      封面设计 陈益平

---

出版发行 同济大学出版社      [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)  
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店  
印 刷 常熟市大宏印刷有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 25.5

印 数 1—3 100

字 数 636 000

版 次 2015 年 1 月第 1 版      2015 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5649-0

---

定 价 66.00 元

---

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换      版权所有 侵权必究

# 前 言

大学数学好不好学?大家可能会一致回答:“不好学!”是啊!遥想当年初入大学时,恰同学少年,觉得自己中学数学学得不错——大学数学或许也不过如此.但是后来发现大学数学完全是一派全新的气象:思维方式变了,难度上了一个大台阶,还有就是大学数学科目太多,比中学的代数、几何多出几倍.所以大学数学真的不好学!

那么怎样才能学好它呢?说白一点,有没有什么捷径呢?在以前我最不愿讲的就是什么“捷径”,现在的观念有了一些转变.不可否认,学好数学是需要一定天分的.如果天分略有欠缺或学习时间不够,那么依靠一位精通数学、有着丰富教学经验的老师点拨一下,是不是可以少走许多弯路、节省许多时间呢?毕竟大部分学生不是数学专业的,而只是将它当成一个工具.

就考研而论,这套大学数学考研辅导书主要针对的是数学基础一般或中上的学生.此书若倾向于数学基础很强的学生,必然会忽视相对简单的题目,那么基础相对薄弱的学生还是不容易看懂,此书适合的人群正是80%的广大考生,他们需要更加细致的引导.我们不想将辅导书编成正襟危坐的“学院派”模式,毕竟这类参考书太多了,有的已经成了经典,而我們希望能以新颖独特的风格吸引广大考生.对大部分学生来说,学习数学最缺乏的往往有两点:第一是那种独到的综合能力,这种综合能力不是像普通参考书那样仅仅是对知识作一个细致的罗列,这样的综合用处有限,我们讲的综合是一种对整个课程的较深层次的概括,当我們对课程的理解达到一定深度时,就可以像数学家华罗庚说过的那样“将整本书由厚变薄”,纷繁复杂的数学公式和定理逐渐指向若干思想和若干规则,而且有了这样的功底后,大学数学的解题思路会变得清晰许多;第二就是一些解题技巧,我们强调的解题技巧,绝不是那种过于“偏门”的技巧,而是那种基于基本概念的“正道”技巧,这种技巧可让我们一通百通,使用之后,复杂的问题慢慢地变得简单.因此,我们创立了一种学习大学数学课程的方法——“化繁为简学习法”.

“化繁为简学习法”的宗旨是将繁杂不堪的大学数学知识变得简单易懂.实现化繁为简的根本途径是提取出大学数学的“思想”,以思想引导学习,我们不反对概括题型,但是要以思想原则为主导,否则大量的公式、定理和题型将成为沉重的负担;化繁为简的核心内容是若干个主导方法,它们虽然各有特色,但是无不体现出语言生动、叙述精练、通俗易懂、抓住要点、逻辑严密、思想深邃的共性;化繁为简的具体形式是以专题带动知识点,比如高等数



学,通过 3 个框图加上 15 个专题就高度概括了高等数学所有的知识体系!

本书以一种全新的风格、以“化繁为简学习法”为主导,做大多数考生的引路人.打个比方,目前那些经典的考研书如同一座座华美的商厦,里面的产品应有尽有,让人目不暇接,而我们不仅有产品,而且有导购员,可以让大家快速地找到所需要的产品,并且用最简短的语言介绍产品的特色、用法和优缺点……大家请仔细看本书绪论“如何学好高等数学”,看完后就会更明白我们编写这本书的目的了.笔者将教学生涯中总结出来的学习经验、独特的解题技巧教给大家,目的就是让考研的学生用最短的时间达到自己所能达到的水平.

本书的整体结构有三部分.第一部分先讲一些一般的方法,比如“如何学好高等数学”和“如何复习高等数学”等,均是我们多年经验的积累,它将扭转我们学数学过程中产生的一些不正确的观念.实际上许多学生学不好,就是学习方法不到位,进一步讲就是有一些根深蒂固的观念在作祟,比如不重视概念的理解,不重视逻辑的严密等,导致学习走了许多弯路.第二部分用三张框图总结出高数的“骨架”,大家复习时只要仔细研究这三张框图,就可以对所有知识点一目了然,再也不会觉得书太厚而不知从何下手了.大家只需要从框图引申出知识点,而无需将知识机械地再学一遍影响学习效率.值得一提的是此部分有两个概括性的讲解:一是讲解极限的思想,它从宏观上指导我们做题时潜移默化地运用极限的思想;二是“多变量分析法”,它创造性地分析常量、变量(静态变量和动态变量)以及它们的各类用法技巧,从而让我们从根本上解决多变量如何处理的问题,以致于大家面对重积分、多元函数的偏导以及各类综合题时有基本的思路,书中许多专题将引用此方法.第三部分是专题全讲,我们将所有知识点都以专题的形式将跨章节的知识连贯地串起来.要知道考研题的关键就是综合,题目量有限,每一题都要保证有一定的综合性.对于非专业的考研数学,一般没有特别难的题,所以只要找到综合题的组合技巧即可轻松解题.有时候我们学不好,除了学习中产生的一些不正确的观念外,还有一点就是对一些根本的东西总是弄不明白,无论讲到哪里,只要涉及这个问题就会糊涂,比如数学的变量和常量:大学的变量和中学的有什么不同?为什么有时候变量暂时作常量、有时候常量又可以暂时做变量呢?……大家在根子上难以接受,结果许多题目就只能机械照搬,效果可想而知!所以需要专题讲解,其中专题又分三大类:第一类是计算判断类,有 11 个专题,介绍高等数学 11 类主要的计算与判断的技能;第二类是证明类,分两个大专题,分别针对求导类和积分类的证明进行大总结,总结出普遍适用的方法和原则,尤其是中值定理系列证明题将有大突破,让大家不再惧怕此类题型;第三类是综合类,分两个大专题,实际上就是前面 13 个专题知识点的组合搭配,有的学生惧怕综合题,是因为没有掌握其出题规律和分解技巧,只要掌握如何拆解的方法,那么大家做综合题就相当于做了两个到三个单纯的计算题或证明题!

总之,目前市面上或许找不到一本书和本书风格是一样的,没有一本书具有对极限如此独特的讲述,没有一本书对变量有如此专门的分析和研究,没有一本书能将一章的知识体系



概括成 20 多个字的口诀,没有一本书能将中值定理的证明做到如“搭积木”一般,没有一本书能将综合题拆解成“接龙游戏”……

本书涵盖了考研数学主要的题目类型,既是串讲,也是全书.但是考虑到怕冲淡重点,我们在选题上是有侧重的,比如针对求导之类的最基本的题目就比较少,因为随便在哪里都能找到这一类的题型做训练,它无需太多思想,完全是熟练地套用公式,因此就不着太多的笔墨.针对题型也不做过于细致的划分,因为这样容易让大家形成思维定势,也容易造成思想上的压力——题型那么多,记不住啊!

所以这本书最适合考研之初的学生总结知识与解题方法,因此它没有年份限制,不存在过时的问题.大家最好将本书与一本细分题型的全书结合起来用,效果将事半功倍.

信息时代,缺的不是题目,而是方法.我们的宗旨是:化繁为简,快乐学数学!

大家注意!那些想偷懒、连教科书都不想看全的学生就没必要买本书了,因为他或许会很失望,毕竟这本书不是什么灵丹妙药,靠一些绝活就能够“独步天下”.扎扎实实地学始终是必要的,我们只想让大家少走弯路,引领大家快乐学习,仅此而已.我们也希望读者提出实实在在的建议和意见,以便今后进一步提高!

本书唯一官方发布网站:瀚海网(<http://www.hanhai.org>).瀚海网有免费专题(pdf 格式)供大家试读,其他网站可转载,但是必须保持 pdf 文件的完整性,并注明作者及“转自瀚海网”,否则视为侵权,我们将保留起诉的权利.

瀚海网旗下的“瀚海考研”是提供给本书读者的微信公众订阅号,此平台供读者与编者互动,并提供实时瀚海考研资讯.

我们将视市场情况,力图推出后续的考研线性代数与概率统计书籍,以形成“化繁为简”考研数学专题全讲系列,敬请大家期待!

邹 群

2015 年 1 月

于南昌航空大学

# 目 录

## 前言

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| <b>0 绪论</b> .....                 | 1  |
| 0.1 如何学好高等数学 .....                | 1  |
| 0.2 由框图引出的总结和综合 .....             | 3  |
| 0.3 知识点导航 .....                   | 13 |
| <b>专题 1 未定型析出法求极限</b> .....       | 16 |
| 1.1 未定型的概念、分类及未定型析出的原则 .....      | 16 |
| 1.2 未定型析出法的步骤 .....               | 18 |
| 1.3 关于二元函数的极限 .....               | 21 |
| 1.4 战前操练 .....                    | 21 |
| 1.5 真枪实战 .....                    | 29 |
| 1.6 总结、考题分析及复习建议 .....            | 30 |
| <b>专题 2 遍历有向链法求导数、偏导与微分</b> ..... | 32 |
| 2.1 导数与微分概念简述 .....               | 32 |
| 2.2 遍历有向链法的原理及操作方法 .....          | 33 |
| 2.3 隐函数与参数方程的求导(偏导)问题 .....       | 35 |
| 2.4 战前操练 .....                    | 36 |
| 2.5 真枪实战 .....                    | 45 |
| 2.6 总结、考题分析及复习建议 .....            | 47 |
| <b>专题 3 向量运算法对函数作几何解析</b> .....   | 48 |
| 3.1 有关向量的基础知识点概要 .....            | 48 |
| 3.2 向量运算法的原理及典型方法 .....           | 49 |
| 3.3 曲面(平面)、空间曲线(直线)综述 .....       | 50 |
| 3.4 战前操练 .....                    | 53 |
| 3.5 真枪实战 .....                    | 61 |
| 3.6 总结、考题分析及复习建议 .....            | 63 |



|                            |     |
|----------------------------|-----|
| <b>专题 4 切截法理解掌握函数的各类性态</b> | 65  |
| 4.1 “切截法”总论                | 65  |
| 4.2 用“切截法”总结函数的性态列表        | 67  |
| 4.3 几个典型概念之间的关系            | 70  |
| 4.4 战前操练                   | 71  |
| 4.5 真枪实战                   | 82  |
| 4.6 总结、考题分析及复习建议           | 86  |
| <b>专题 5 搭桥法拆解中值定理系列证明题</b> | 87  |
| 5.1 微分中值定理系列概述             | 87  |
| 5.2 微分类证明题的分类及解法总结         | 88  |
| 5.3 战前操练                   | 92  |
| 5.4 真枪实战                   | 101 |
| 5.5 总结、考题分析及复习建议           | 106 |
| <b>专题 6 不定积分计算 24 字口诀</b>  | 107 |
| 6.1 教材中不定积分计算方法简述          | 107 |
| 6.2 不定积分计算 24 字口诀及其解释      | 108 |
| 6.3 战前操练                   | 110 |
| 6.4 真枪实战                   | 117 |
| 6.5 总结、考题分析及复习建议           | 120 |
| <b>专题 7 定积分的计算及微元法的应用</b>  | 121 |
| 7.1 定积分的计算方法以及变上限积分        | 121 |
| 7.2 微元法建立积分式的原理及其要点        | 122 |
| 7.3 积分的几何应用及其物理应用          | 124 |
| 7.4 战前操练                   | 127 |
| 7.5 真枪实战                   | 142 |
| 7.6 总结、考题分析及复习建议           | 147 |
| <b>专题 8 扫描定限法扫尽所有重积分</b>   | 148 |
| 8.1 “扫描定限法”的原理             | 148 |
| 8.2 “扫描定限法”的具体操作方法         | 149 |
| 8.3 直角坐标化极坐标、球面坐标、柱面坐标问题   | 151 |
| 8.4 战前操练                   | 152 |
| 8.5 真枪实战                   | 162 |
| 8.6 总结、考题分析及复习建议           | 165 |



|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| <b>专题 9 分段现形法将曲线曲面积分打回原形</b>  | 166 |
| 9.1 对各类积分的概括与比较               | 166 |
| 9.2 分段现形法及其 28 字口诀            | 168 |
| 9.3 关于通量、散度、环流量与旋度            | 171 |
| 9.4 战前操练                      | 172 |
| 9.5 真枪实战                      | 184 |
| 9.6 总结、考题分析及复习建议              | 186 |
| <b>专题 10 易路算法证明积分式</b>        | 188 |
| 10.1 易路算法的思路与具体体现             | 188 |
| 10.2 含积分式证明题的类型总结             | 190 |
| 10.3 战前操练                     | 191 |
| 10.4 真枪实战                     | 204 |
| 10.5 总结、考题分析及复习建议             | 209 |
| <b>专题 11 预估计试探法判别级数敛散性</b>    | 210 |
| 11.1 级数敛散性判别原理                | 210 |
| 11.2 预估计试探法的用法步骤及审敛原则         | 212 |
| 11.3 关于函数项级数(幂级数)的收敛区间的求法     | 213 |
| 11.4 常见的错误                    | 213 |
| 11.5 战前操练                     | 213 |
| 11.6 真枪实战                     | 221 |
| 11.7 总结、考题分析及复习建议             | 223 |
| <b>专题 12 泰勒公式及借力打力法展敛级数</b>   | 224 |
| 12.1 有关泰勒公式的基本知识              | 224 |
| 12.2 函数展开成幂级数(或求幂级数的和函数)      | 225 |
| 12.3 求数项级数的和                  | 226 |
| 12.4 函数展开成傅里叶级数               | 227 |
| 12.5 战前操练                     | 228 |
| 12.6 真枪实战                     | 236 |
| 12.7 总结、考题分析及复习建议             | 238 |
| <b>专题 13 解常微分方程与寻显微等式法建方程</b> | 239 |
| 13.1 常微分方程的概述及解法总结            | 239 |
| 13.2 寻显微等式法解微分方程应用题           | 241 |
| 13.3 战前操练                     | 243 |
| 13.4 真枪实战                     | 256 |



|                                |            |
|--------------------------------|------------|
| 13.5 总结、考题分析及复习建议 .....        | 261        |
| <b>专题 14 思维导图法解大综合题 .....</b>  | <b>262</b> |
| 14.1 思维导图法解大综合题的思想 .....       | 262        |
| 14.2 用思维导图解大综合题的具体方法 .....     | 263        |
| 14.3 战前操练 .....                | 266        |
| 14.4 真枪实战 .....                | 280        |
| 14.5 总结、考题分析及复习建议 .....        | 286        |
| <b>专题 15 大综合题的分类组合 .....</b>   | <b>287</b> |
| 15.1 综合题的分类组合的原则 .....         | 287        |
| 15.2 知识点组合的“密码” .....          | 288        |
| 15.3 综合题的分类、实战操练及真枪实战 .....    | 288        |
| 15.4 总结、考题分析及复习建议 .....        | 316        |
| <b>附录 高等数学概念、定理、公式大全 .....</b> | <b>318</b> |
| 第 1 章 函数与极限 .....              | 318        |
| 第 2 章 导数与微分 .....              | 330        |
| 第 3 章 微分中值定理与导数的应用 .....       | 334        |
| 第 4 章 不定积分 .....               | 338        |
| 第 5 章 定积分 .....                | 342        |
| 第 6 章 定积分的应用 .....             | 347        |
| 第 7 章 空间解析几何与向量代数 .....        | 349        |
| 第 8 章 多元函数微分法及应用 .....         | 359        |
| 第 9 章 重积分 .....                | 368        |
| 第 10 章 曲线积分与曲面积分 .....         | 373        |
| 第 11 章 无穷级数 .....              | 382        |
| 第 12 章 微分方程 .....              | 392        |

# 0 绪 论

## 0.1 如何学好高等数学

### 0.1.1 初学

考研的同学们,虽然大家经过了“高等数学”课程的初学阶段,但是未必学得很到位,因此我们还是要先从初学本课程的体会谈起,这对于大家复习的阶段必定是会有帮助的。

首先谈谈高等数学与中学数学的不同之处。

第一,对于中学数学来说,它书中的概念、定理相对还是容易理解的,一般水平的学生通过老师课堂上的讲授即可基本明白,因此课外不需要常常看教科书,只需多做练习;而大学数学呢?它的概念、公式、定理比较多,死记都不太能记得住,何况还要理解。因此我们就不能像中学那样学了,做练习前一定要先大致弄明白概念、定理与公式,而不是一味地做题。

第二,中学数学偏重于解题的技巧性,对于概念的理解要求不太高,但到了大学就难以行得通了。记住:大学数学的基本概念很重要!遗憾的是大部分学生都对此不以为然。实际上概念对于高等数学就像骨架对于一个人的身体,没了骨架,一个人怎么立得起来呢?而定理及其证明就如同一个人的血液和神经系统;数学公式呢?可以认为就是内脏;计算则对应人的肌肉。这里每一个部分都是重要的,只是由于非数学专业相对强调概念和计算,对证明的要求不高,于是许多学生干脆就完全放弃证明,这是极其错误的。想一想,如果一个人没有血液和神经系统,那么他身体的每一部分都是孤立的、死的!我们对证明的要求是:重要的证明最好还是看明白并理解透彻,次要却技巧性强的证明可以略微跳过。计算的重要性就不需要讲了,许多大学生学数学就只剩下计算了!结果因为概念不清、定理不明造成计算时只会生搬硬套、依葫芦画瓢,这样学数学等于什么都没有学到。

最关键的第三点,就是“思想”上的不同!大学数学的思想犹如人的灵魂,人如果没有灵魂就是行尸走肉;同样,数学没有思想也是枉然。大家可能会反驳:中学老师可没有这么说道啊!不是中学数学就不需要思想,而是没有单独提出来而已。高等数学的主要思想就一个:“极限”。中学研究的量是静止的量、有限的量,而大学所学的量是运动的量、无限的量,由静止到运动、由有限到无限是质的飞跃,针对无限的量的研究方法就是极限。实际上大学数学就是中学数学加极限,有了思想,才能导出具体的方法,详细的总结请看 0.2 节。

最后希望大家特别要重视数学逻辑思维的锻炼。逻辑是什么?再用身体来打比方,逻辑就相当于人体的经络。为什么呢?中医讲经络,人体经络遍布全身,看不见摸不着,但是却主宰着全身,它让身体按照一定的“法则”和谐地运行。若经络堵塞,则身体会乱套,人就会生病。逻辑对于数学也一样,一切定理和公式都要遵循逻辑的法则,不然数学就是一堆无理的

符号和空谈. 在我们读中学的那个年代, 偏重逻辑的训练, 但由于现在中学阶段似乎不如以前那样注重逻辑的训练, 所以许多学生学习大学数学时不是很清楚数学逻辑, 导致学习的效果事倍功半, 做题时简直有点惨不忍睹! 他还不太理解: 为什么强调逻辑啊? 我是工科的, 我要学的是计算! 这是谬论. 不信, 你学高等数学不讲逻辑只计算试试? 保证算也算不好.

对于原来数学基础一般的学生来说, 本课程要学好还真有些困难. 那么就请记住上面的话. 数学的确是一门实实在在的学科, 容不得太多的取巧, 只要你踏踏实实地学, 一步一个脚印, 就一定会有突破的, 一定!

### 0.1.2 复习

针对考研的学生, 毕竟高等数学已经学过一遍了, 如果还是像初学者那样将复习变成了初学, 那效率可就太低了! 不错, 所有知识点要过一遍, 但是应该详略得当, 最关键的是要形成对知识的总结, 整个课程的各个部分需要联系起来, 从而变成一个整体.

这里我们结合本书给出一些复习本课程时的阶段性建议, 大家可以根据自己的情况进行合理调整.

#### 第一阶段 巩固、联系知识阶段

此阶段最好以教科书为主, 只有教科书才是源头, 任何参考书都是为教科书服务的, 不可能讲得完全. 建议使用同济大学版的教材.

我们不可按部就班地看教科书, 毕竟考研的时间非常宝贵, 因为“**考研复习, 效率第一**”. 我们先要将书作为整体来看, 建议大家结合本书的 0.2 节, 先对本课程有一个概况性的了解, 此过程只需几天的时间即可, 花这几天的时间绝对值得! 这样可以明确自己复习的方向, 且明白课程的框架、重点与主线, 以后看教材时就有针对性了.

看书时要详略得当, 不必像初学者那样字字句句去“抠”. 基础好的读者, 由于对分数的期望值高一些, 所以可以看细、看全一些, 其中包括书中一些重要部分的证明以及一些零星的知识点, 由于基础好, 看细一些也不需要花太多的时间; 对于其他读者, 太难的证明就不要太浪费时间了, 但是看全一些是必要的.

此阶段视大家在大学一年级打下的基础强弱来定时间, 对于基础弱的读者, 可将后面“**攻坚阶段**”的时间缩减; 而基础好的读者则相反, 此阶段的时间可略短一些, 将更多时间用于攻坚阶段.

#### 第二阶段 分知识点突破阶段

此阶段为教科书与教辅书相结合的阶段. 教辅书必须选定一本主要的. 比如本书, 它将知识点分为 13 个专题, 每个专题均针对一个大类进行总结与综合, 大家先要特别注意看前面的总结, 它可以让你将高等数学的相关知识点跨章节地“串起来”, 这样整本书的脉络在你心中就更加清晰了, 学习的方向性也就更加明确了.

此阶段所占的时间应该最长, 首先将书中知识点基本看明白且与我们专题前面的总结联系起来后便可以开始做题. 本书专题中将做题分为“**战前操练**”与“**真枪实战**”, 在“**战前操练**”阶段, 大家可以将自己已经掌握得很好的例题不看书直接做, 做完后与书中的解题过程及结果整个校对一下, 看看自己掌握的情况; 若有掌握得不好的部分, 可先仔细看书中的讲解, 看完后将书合上, 自己再重新做一遍, 此时不要强调做题的速度. 而“**真枪实战**”部分, 我们将“**讲评**”与“**答案**”分开, 目的是告诉大家一个真理: 要想学好数学, 轻易别看答案.



### 第三阶段 攻坚阶段

此阶段以教辅书为主,基本上抛开教科书.教辅书不能限于上面的一种,而是“主动出击”,精选三本左右教辅书,题目不要全做,而是有针对性地选择自己薄弱的环节进行“攻坚战”,务必将薄弱的环节造成的“风险”降至最小.

另一方面,此阶段要特别注重综合题的训练!本书中专题 14 和专题 15 特别地针对综合题进行了理论性的深入探索,大家在此阶段可以好好研究一下,然后再做些实际的题目.要想拿高分,综合题的训练必不可少.

### 第四阶段 模拟训练、查漏补缺阶段

此阶段可大量地做些考研真题,开始时可将时间放宽一些,但是做题时不去看教科书与教辅书,自测几套真题,最后再严格控制时间.

最后的查漏补缺也很重要,在此阶段千万不要过多关注难题了,以免影响自己的信心,而查漏补缺却可以让自己有意外的收获.此阶段不宜太长,一般一个月左右的时间就足够了.

## 0.2 由框图引出的总结和综合

同学们,如果你们学完一门课程后,能按照常规每一章、每一节地综合知识点的话,那么只能说明你可能学懂了,但是未必学通了.所谓学通,则应该是能按照其贯穿于课程中的思想以及逻辑关系将各章节来个大融合、大串联,使此课程在脑子里有一个整体的印象,而不是“一叶障目,不见泰山”.这里我们结合同济大学第五版的《高等数学》教材,用三个图(图 0.1—图 0.3)引出本课程的总结和综合,这种独特的总结方法的优点是直观、易记、综合性强.

### 0.2.1 三个微积分大总结框图

《高等数学》的主干部分为微积分.它分为上、下两册,两册书联系紧密,是一个有机的整体,因此我们将它们合在一起研究,通过下面三个框图就足以总结出本课程的主要内容和结构.

图 0.1 总结了《高等数学(上册)》除“向量代数与微分几何”之外的一元函数微积分部分的主要知识点,图 0.2 总结了《高等数学(下册)》的除“级数”与“微分方程”之外的多元函数微积分部分的知识点,图 0.3 总结了整个“高等数学”课程中的所有内容之间的联系.

从图 0.1—图 0.3 均可以看出,《高等数学》研究的对象和中学一样,也是函数与方程.其内容用八个字概括,就是“一个思想,两个工具”.一个思想,指的是“极限”的思想,两个工具,指的是“微分”与“积分”.极限的思想贯穿于本课程的始终,体现极限思想的内容在本课程中无处不在,微积分中的导数、偏导数、定积分、重积分、曲线(曲面)积分这几个主要基本概念无不来自极限,且级数为数列  $n$  项和的极限,因此从某种程度上可以说,高等数学就是中学数学加极限!“微分”与“积分”这两个工具是极限思想的两个具体体现形式,它们是互逆的两个过程,且都可以用来研究函数的性态及解决和函数有关的许多问题.

多元函数的概念大体上都是一元函数对应概念的推广,其思想仍然是极限,工具仍然是微分与积分.由于自变量的增加,多元函数的微分与积分在操作上趋于复杂,对其处理方法是多元函数转化成一元函数来研究,比如求偏导与重积分化累次积分等均如此.可以这么认为,多元函数的微积分只是在一元函数微积分的基础上加上“多变量分析”而已.关于多变量分析的详细叙述见第 0.2.4.

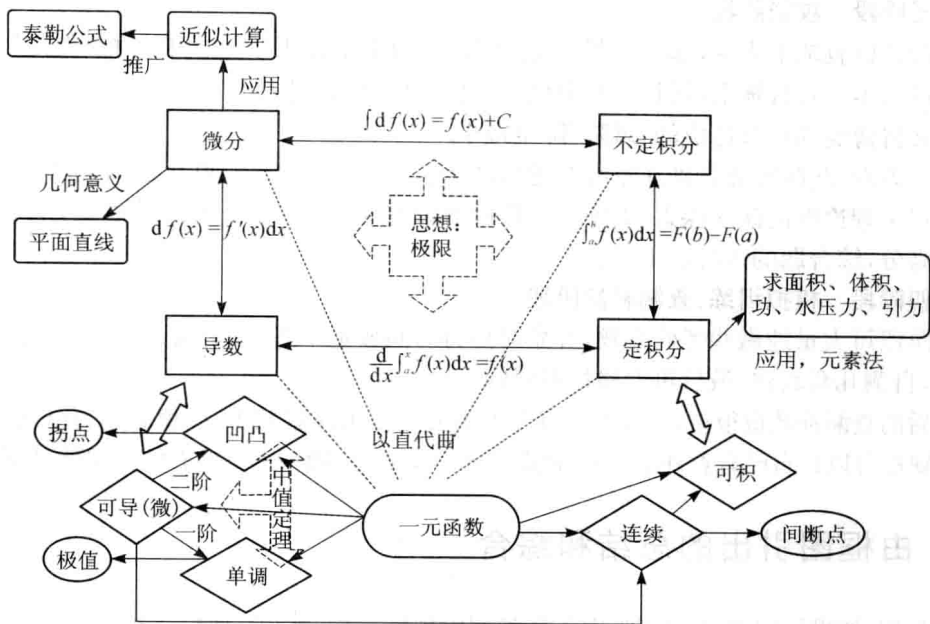


图 0.1 一元函数微积分大总结框图

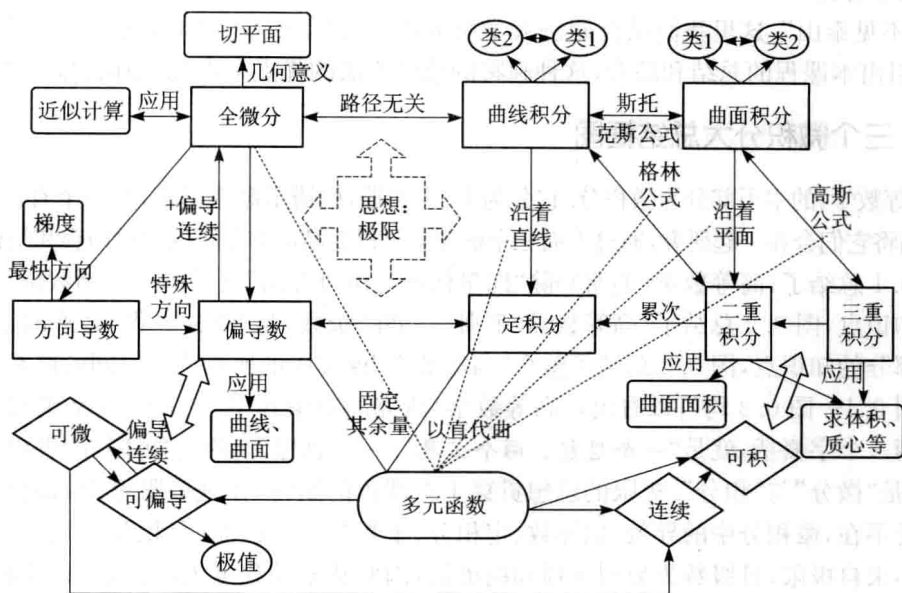


图 0.2 多元函数微积分大总结框图

从图 0.3 可以窥见“高等数学”课程结构的全貌. 此框图颇像一个人的头部, 它含四大部分: 第一部分是一个大圆的边界(像头的轮廓), 它代表极限, 意思是用极限的思想与方法即可概括出整个课程, 同时它也是本课程首先学的知识; 第二部分是位于中间的两个大方框, 其中下面的方框(像鼻子)中有函数、方程与数列, 这是本课程研究的对象, 它们之间有密切的联系, 上面的方框(像头发)中有曲线、曲面、直线与平面等, 这是方程和函数对应的几何图

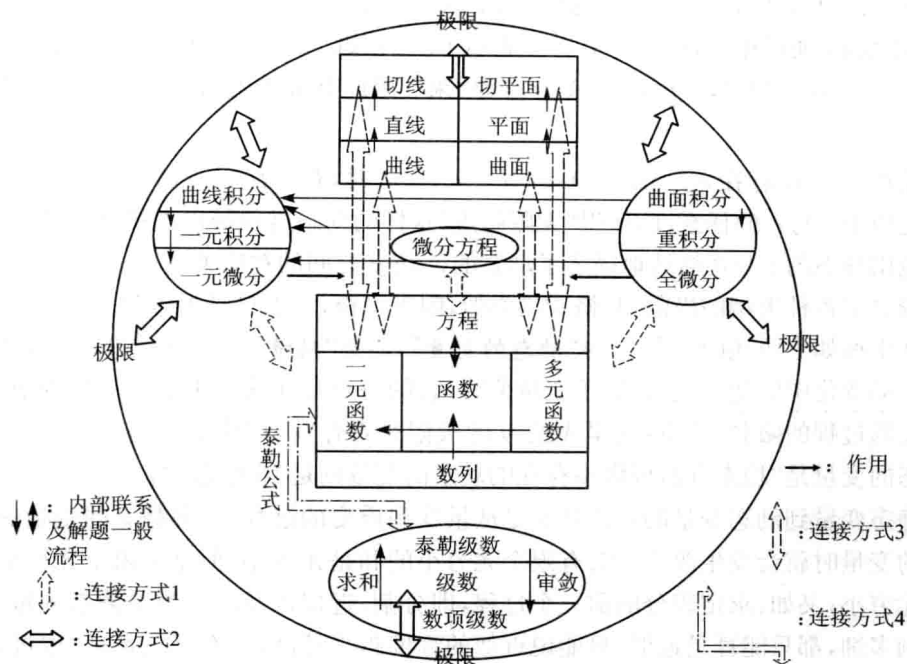


图 0.3 高等数学内容之间的联系框图

形；第三部分是两边的两个圆（像眼睛），分别含一元函数的微积分及多元函数的微积分，它们是本课程的两大工具；第四部分是两个椭圆（分别像嘴巴与鼻梁），分别表示级数与微分方程，之所以用椭圆表示，是因为它们比较特殊：微分方程可看成是特殊的方程形式，而级数是数列或函数列和式的极限。

以上四个大部分内部与外部均有十分密切的联系，通过这些联系方式可以探索出解常规题及综合题的一般性的思路，我们将在第 0.2.5 和第 0.2.6 节及专题 14 和专题 15 中具体加以说明。

下面先详细介绍极限的思想。

## 0.2.2 “极限”的思想

### 1. 极限的实施途径：无穷（包括无穷小与无穷大）

引入极限的概念之前，必须先引入“无穷”的概念，“无穷”分“无穷大”与“无穷小”两种。无穷小就是绝对值比任何非零的数都小，而无穷大就是绝对值比任何数都大。

### 2. 极限的本质：从静态变量到动态变量，从量变到质变

所谓极限，简而言之，就是“无限趋近”。

中学研究函数  $y = f(x)$  时，往往是取定  $x = a$ ，得到  $y = A$ ，它们都是有限的、静态的量；现在需要描述极限，如研究  $x \rightarrow a$  时，是否  $y \rightarrow A$ （即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ）？ $x \rightarrow a$  可以看成  $x$  等于  $a$  加上一个无穷小量。“无穷”的概念实在太抽象了，实数轴上也没有这样的量。要描述它，非得有一个无限的、动态的过程不可！

为了表示  $x$  接近  $a$  的程度，必须给出一个度量：取定一个正数  $\delta$ ， $0 < |x - a| < \delta$  表示



以  $a$  为中心、 $\delta$  为半径的去心邻域, 这样, 只要调节  $\delta$  的大小, 就可以调节  $x$  接近  $a$  的程度. 同理, 给定正数  $\epsilon$ , 便可用  $|f(x) - A| < \epsilon$  表示  $f(x)$  接近  $A$  的程度. 而  $\epsilon$  与  $\delta$  是相互关联的,  $0 < |x - a| < \delta$  是“因”,  $|f(x) - A| < \epsilon$  是“果”. 因此有了描述  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  的“ $\epsilon$ - $\delta$ ”语言:

对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$  恒成立.

正是由于  $\epsilon$  与  $\delta$  的任意性, 使得“无限趋近”这样的动态过程得以被描述清楚. “ $\epsilon$ - $\delta$ ”语言成功地用静态的  $\epsilon$  与  $\delta$  简洁地描述了动态的  $x$  与  $y$  之间的对应关系.

比较书中各种类型的极限, 其格式均类似, 限于篇幅, 大家自己去体会.

下文中称如上所述的  $x$  与  $y$  为“动态的变量”, 简称“动量”. 所谓动态的变量, 指的是处于无限运动变化中的变量, 它也属于变量范畴. 它的特点是在式子中的活动范围小, 受到和极限相关的过程的限制. 注意: 这里无论  $y$  的极限是否存在, 均称之为动态的变量. 极限存在的动态的变量是“稳态”的, 极限不存在的动态的变量则是“非稳态”的.

从静态变量到动态变量的过程其实是从量变到质变的过程. 许多静态的变量的性质到了动态的变量时就会发生改变, 如: 有限个无穷小的和是无穷小, 但是无限个无穷小的和就未必是无穷小; 又如: 求定积分的前三个过程, 即分割、近似以及求和都是静态的量变阶段, 无论分割多细, 都只能算是近似, 只能说近似的程度越来越高, 只有经过最后“取极限”这一过程, 才能算是到了动态的质变阶段, 于是“近似”变成了“精确”!

### 3. 极限的应用原则: 以直代曲, 以不变代变

前面讲到, 可以将存在极限(即稳态)的动态变量看成一个常数加上无穷小量, 从而对极限的研究可以转化为对无穷小量的研究. 在多年的教学实践中, 我们发现可以仿照物理中从“宏观”到“微观”两种状态下许多物理性质发生突变这一现象, 将非无穷小量作为“宏观”的量, 而将“无穷小量”当成一个数轴上的一个实际存在的“微观”的量(传说当年牛顿就是这么做的), 此量很特殊, 它在不断运动, 无法在数轴上具体标出, 但它又实际存在. 那么数学的许多量、图形和关系在“微观”下与在“宏观”下相比就彻底不同了, 如微分可以看作微观上的一种无穷小量, 在微分情形下, 可以认为曲线无限接近直线(用于求曲线的切线), 曲面无限接近平面(用于求曲面的切面), 曲边梯形无限接近矩形(用于求直角坐标下的定积分), 曲边扇形无限接近扇形(用于求极坐标下的定积分), 曲顶柱体无限接近长方体(用于求二重积分). 综合上面的几种情形, 就是用到了“以直代曲, 以不变代变”的原则.

讲到这里, 尤其值得一提的是, 极限的思想与原则特别契合哲学中的“辩证关系”, 即关于“静”与“动”、“直”与“曲”、“有限”与“无穷”的一种从“量变”到“质变”的关系. 勤于思考的学生将在学习“极限”的过程中获得特别的“营养”而受益无穷!

“微观的量”与“宏观的量”的对比研究方法是“化繁为简学习法”的精髓之一, 基于上面的认识, 在今后解决问题的过程中将会理解得更透彻, 具体参见专题 4, 7, 9.

下面总结微积分的两大工具及其关系.

## 0.2.3 微积分的两大工具及其关系

上面讲了高等数学的两大工具为微分与积分. 实际上, 这里的“微分”包括“导数”与“微分”, “积分”包括“不定积分”与“定积分”. 下面阐明它们之间的关系.



## 1. 微分与不定积分

请先看两个重要公式:

$$\begin{aligned}d\int f(x)dx &= f(x)dx, \\ \int df(x) &= f(x) + C.\end{aligned}$$

从上面两个式子可见,“ $\int$ ”(不定积分)与“ $d$ ”(微分)这两个符号可“互相抵消”(后面公式仅加一个常数  $C$ ),从公式上体现了“微分”与“不定积分”是两个互逆的过程.

## 2. 导数与定积分

下面再看两个重要公式:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt &= f(x), \\ \int_a^x f'(t)dt &= f(x) - f(a).\end{aligned}$$

从上面两个式子可见,“求导”与“定积分”也是两个互逆的过程.

## 3. 导数与微分、不定积分与定积分

“导数”与“微分”、“不定积分”与“定积分”是两组“近亲”.通过微分公式与牛顿-莱布尼兹公式

$$\begin{aligned}df(x) &= f'(x)dx, \\ \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

来体现,具体关系参见专题 4 与专题 7.

以上四对关系与对应的公式奠定了本课程的框架.

## 4. 导数的“变式”以及积分的“变式”

从一元函数到多元函数,微积分的概念拓展了,即导数变成了偏导数,定积分变成了重积分与曲线、曲面积分.

从某种意义上说,多元函数的偏导数与一元函数的导数在概念的本质并无不同(参见专题 9 用到的口诀“**偏导只作导数观**”),因此偏导可以作为导数的“变式”.

同理,重积分与曲线、曲面积分都是“积分”,只不过由于多元函数自变量为多维的,其积分的形式呈现出多样性,因此导致了积分形式的“变异”而已(参见专题 9).我们将曲线积分转化为定积分,将曲面积分转化为重积分,最终转化为累次积分(即数次定积分)来求解,参见图 0.2.

推广到多元函数后,偏导与全微分的关系比一元函数的导数与微分的关系要复杂得多,具体参见专题 4.

总之,从图 0.2 以及上面的总结来看,多元函数分析的工具仍然为微分与积分,它只是一元函数微积分的推广而已.

下面介绍**多变量分析法**,它主要适合于研究多元函数,它亦适用于研究一元函数,只是由于一元函数变量个数较少,多变量分析法起的作用不那么明显.