SHUXUE YINGYONG YU SHIYAN

数学应用与实验

辛 虹 编著

東北大學出版社
Northeastern University Press

数学应用与实验

辛　虹　编著

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

数学应用与实验／辛虹编著. — 沈阳：东北大学出版社，2014.9
ISBN 978-7-5517-0785-5

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①辛…　Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 197907 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
http：//www. neupress. com
印 刷 者：三河市天润建兴印务有限公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm × 240mm
印　　张：14. 25
字　　数：271 千字
出版时间：2014 年10月第 1 版
印刷时间：2014 年10月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义
封面设计：刘江旸
责任校对：王延霞
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-0785-5　　定　　价：42. 00 元

前　言

为了使高职院校学生适应未来岗位的要求，培养具备可持续发展潜力素质和高技能型人才，根据高等职业技术教育数学教学的特点，结合高职教育的实际情况，突出高职办学特色，我们特编写了此书。

本书以弱化理论、加强应用、注重基础、强化能力为指导思想，力求做到立足实践与应用，拓宽基础知识面，强化能力训练，把素质教育与能力培养有机结合起来。

本书本着“以应用为目的，以实用、够用为度”的原则，将数学知识、数学建模与计算机软件技术的应用三者融为一体，为高职院校不同专业的课程提供了数学工具，从而掌握从事各专业工作的数学思想方法以及相应的数学技巧。

理论教学：通过实例教学，使学生具备使用初步的应用数学知识分析问题、解决问题的能力，提高学生把实际问题转化为数学问题的能力。通过改变传统的数学教学思维方式，不断培养学生的创新能力，扩宽学生思路，真正体现学有所用，为培养应用型人才创造条件。

实验教学：通过介绍 MATLAB 软件的使用方法，加强实验环节，培养学生的动手能力。让学生掌握数学软件的功能，能利用数学软件解决复杂的微积分等计算问题，使学生能用现代化工具，更快更好地解决专业和生活中的实际问题。充分体现现代教育技术在生产实践中的作用。

在本书编写过程中，得到了沈阳职业技术学院有关部门领导和兄弟院校的大力支持和协助，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见，以便今后不断修订完善。

编著者
2014 年 6 月

目 录

项目一　魔幻数域

任务1　复　数

看一看　身边扩展

公元1637年，法国数学家笛卡儿(1596—1650年)在发表的《几何学》一书中，给负数的平方根起了一个“虚数”的名．又过了大约140年，数学家欧拉开始用i(imaginary，虚幻)表示$\sqrt{-1}$．在1801年，数学家高斯系统地使用了符号i，并把它与实数的混成物$a+bi$(a，b为实数)定义为复数．此后，i与复数渐渐通行于全世界了．

我们知道，电工学中常用$u=220\sqrt{2}\sin(\omega t+30°)$(V)表示正弦电压．显然，正弦的加法定理的运算较为烦琐，而引入复数的表示法后，可以极大地简化计算．

学一学　相关要点

一、复数的有关概念

1．虚数单位(实数单位是1)

(1)虚数单位通常用i表示，规定$i^2=-1$．

(2)虚数单位i可以与实数一起进行四则运算，且原有的加、乘运算规律仍然成立．

(3)i的整数幂具有以下性质：

由于　$i^1=i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，

所以　$i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i, i^{4n}=1$．

2．复数的定义

形如$a+bi$($a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$)的数称为**复数**．a为复数的实部，b为复数的虚部，且把复数记作$a+bi$或用字母来表示复数$Z=a+bi$．

(1)当$b=0$时，复数$a+bi$就是实数a；

(2)当 $b\neq0$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}$ 称为虚数；

(3)当 $b\neq0$ 且 $a=0$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}$ 称为纯虚数.

3. 相等复数

两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$ 相等的充要条件是 $a=c$，$b=d$，即

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c,\\b=d.\end{cases}$$

4. 共轭复数

两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，称这两个复数互为共轭复数. 即 $a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数，复数 $Z=a+b\mathrm{i}$ 的共轭复数记作 $\bar{Z}=a-b\mathrm{i}$.

5. 复平面直角坐标系

取 x 轴为实轴，y 轴为虚轴，建立平面直角坐标系，这样的直角坐标系称为复平面直角坐标系.

复数 $Z=a+b\mathrm{i}$ 与一对有序实数组 (a, b) 一一对应，数组 (a, b) 与复平面上的点 (a, b) 一一对应，从而，复数 $Z=a+b\mathrm{i}$ 与复平面上的点建立了一一对应关系，称 (a, b) 为复数 $Z=a+b\mathrm{i}$ 在复平面上的点坐标.（如图 1-1 所示）

6. 复数的模

复数 $Z=a+b\mathrm{i}$ 在复平面内的对应点 Z 与原点 O 之间的距离（也就是该复数对应向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模 r）称为复数的绝对值（或模），即

$$r=|Z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

如图 1-1 所示.

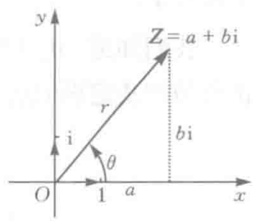

图 1-1

7. 复数的辐角

若复数 $Z=a+b\mathrm{i}$ 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ}$，则称以实数的正半轴为始边，以 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线为终边所成的角 θ 为复数 Z 的辐角.

注意：不等于零的复数 Z 的辐角有无穷多个值，且为 $2k\pi+\theta(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

8. 复数的辐角主值

满足 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角称为复数 Z 的辐角主值，记作 $\arg Z$.

注意：一个复数 Z 的辐角主值是唯一的（复数 0 没有确定的辐角）.

二、复数的表示法

1. 代数形式

形如 $Z=a+b\mathrm{i}$ 为复数的代数式（其中，$a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$）.

2. 几何形式

复数的坐标表示：$Z=a+b\mathrm{i}\leftrightarrow$点$(a,\ b)$，即复数与复平面内的点建立了一一对应关系.

复数的向量表示：$Z=a+b\mathrm{i}\leftrightarrow\overrightarrow{OZ}$，即复数与向量建立了一一对应关系. 即

$$\text{复数 } Z=a+b\mathrm{i}\leftrightarrow\text{点}(a,\ b)\leftrightarrow\text{向量}\overrightarrow{OZ}.$$

3. 三角形式

形如 $Z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 为复数的三角式(其中，$r\geqslant 0$ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的模，θ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的辐角).

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，复数还可以表示为指数式.

4. 指数形式

形如 $Z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 为复数的指数式(其中，$r\geqslant 0$ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的模，θ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的辐角).

5. 复数的代数形式、三角形式、指数形式之间的互化

根据复数的实部 a、虚部 b、模 r 及辐角主值 θ 之间的关系：

$$|Z|=r=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r},\ \tan\theta=\frac{b}{a},$$

则有等式 $Z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 成立.

复数的代数形式、三角形式、指数形式三种表示形式之间可以相互转化，可以适应不同问题的需要，并且此三种表示形式各有各的简便之处.

例 1　把下列复数的代数式化为三角式、指数式：

(1) $1+\mathrm{i}$；　(2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

解：(1) 因为 $a=1$，$b=1$，所以

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ \tan\theta=\frac{1}{1}=1.$$

又因为点 $(1,\ 1)$ 在第一象限，所以辐角主值是 $\frac{\pi}{4}$.

因此，复数的三角式为 $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，指数式为 $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$. 即

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}.$$

(2) 因为 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,\ \tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}.$$

又因为点$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在第二象限，所以辐角主值是 $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

因此，复数的三角式为 $\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$，指数式为 $e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$. 即

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

例 2 把复数$\sqrt{2}(\cos225°+\mathrm{i}\sin225°)$化为代数式.

解：
$$\begin{aligned}\sqrt{2}(\cos225°+\mathrm{i}\sin225°)&=\sqrt{2}[\cos(180°+45°)+\mathrm{i}\sin(180°+45°)]\\&=\sqrt{2}(-\cos45°-\mathrm{i}\sin45°)\\&=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=-1-\mathrm{i}.\end{aligned}$$

三、复数的运算

1. 复数代数式的运算

设复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，则

加(减)法运算：$z_1\pm z_2=(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$;

乘法运算：$z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$;

除法运算：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\quad(c+d\mathrm{i}\neq0)$.

复数的加法满足交换律和结合律：设有三个复数 z_1，z_2，z_3，则

交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$;

结合律：$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

2. 复数三角式的运算

设复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则乘法运算

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

此结论可以推广到 n 个复数相乘的情况，即

$$\begin{aligned}&r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdot r_n(\cos\theta_n+\mathrm{i}\sin\theta_n)\\&=r_1r_2\cdot\cdots\cdot r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].\end{aligned}$$

当 $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$，$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$ 时，得

乘方运算：$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

此结论称为棣莫弗定理.

除法运算：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$.

四、欧拉(*Euler*)公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x \quad \text{或} \begin{cases}\cos x=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2},\\ \sin x=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.\end{cases}$$

练一练　熟能生巧

1. 把下列复数的代数式化为复数的三角式与指数式：

(1)$z=1-\mathrm{i}$；　(2)$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；　(3)$z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；　(4)$z=3\mathrm{i}$.

2. 把下列复数的三角式化为复数的指数式与代数式：

(1)$z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$；　(2)$z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(3)$z=5\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$；　(4)$z=\cos\dfrac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}$.

做一做　实训实验

MATLAB 软件是英文 Matrix Laboratory(矩阵实验室)的缩写，是美国 Math Works公司的产品，它允许用数学形式的语言编写程序，从而能方便、快捷地进行数学运算. 解决了比较复杂的运算问题. 用 MATLAB 进行基本数学运算格式与常用的函数符号表如表 1-1 所示.

表 1-1　　用 MATLAB 进行基本数学运算格式与常用的函数符号表

(1)将式子直接输入命令提示号“ >> ”之后，按 Enter 键后，出现 ans，它是英文 answer 的缩写，显示运算后的结果.
(2)clear 是清除内存中保存的变量，可以在每次程序开头输入.
(3)“ + ”“ - ”“ * ”“/”“^”分别表示代数加、减、乘、除、乘方的运算符号.
(4)abs(x)表示绝对值函数$\|x\|$.
(5)sqrt(x)表示开平方$\sqrt{x}$.
(6)exp(x)表示指数函数 e^x.

续表 1-1

(7) pi 表示常数 π.
(8) sin(x), cos(x), tan(x), cot(x)分别表示三角函数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x (x \in \mathbf{R})$.
(9) asin(x), acos(x), atan(x), acot(x)分别表示反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ $(x \in \mathbf{R})$.
(10) log(x)表示对数 $\ln x$, log2(x)表示对数 $\log_2 x$, log10(x)表示对数 $\lg x$.

例 1 计算$\dfrac{2\cos(0.3\pi)}{1+\sqrt{7}}$.

解: 只需将运算式子直接输入提示号" >> "后

输入

```
>> clear      (清除内存中保存的变量)
>>2 * cos(0.3 * pi)/(1 + sqrt(7))
```

按 Enter 键后，显示结果

```
ans =
      0.3224
```

例 2 计算 $2\times3.14\times60\times0.5-\dfrac{10^6}{2\times3.14\times60\times30}$(【实战 2】中的解析式).

解: 因为 >> clear

```
>>2 * 3.14 * 60 * 0.5
ans =
      188.4000
```

且 >> 10^6/(2 * 3.14 * 60 * 30)

```
ans =
      88.4643
```

所以 >> 188.4000 - 88.4643

```
ans =
      99.9357
```

即
$$2\times3.14\times60\times0.5-\frac{10^6}{2\times3.14\times60\times30}\approx100.$$

例 3 计算 $\cos 36.9°$.

解: 因为 $36.9° = 36.9\times\dfrac{\pi}{180}$(rad), 所以

```
>> clear
>> cos(36.9 * pi/180)
ans =
```

0.7997

例 4　将复数 230 + 280.5j 化为三角式.

解：因为 >> clear

>> atan(280.5/230)

ans =

0.8840

又因为 >> 0.8840 * (180/pi)

ans =

50.6495

且 >> sqrt(230^2 + 280.5^2)

ans =

362.7399

所以
$$230+280.5\mathrm{j}=363(\cos 50.6^\circ+\mathrm{j}\sin 50.6^\circ).$$

测一测　实练实战

复数是研究电气中交流电路理论的重要数学工具，电压、电流等都可以用复数表示，这样能使这些量的分析和计算大为简便，下面举例说明.

【实战 1】　在交流电路的正弦量(如电流、电压)的计算中，使用复数来进行计算将极大地简化整个计算过程. 这种计算方法称为“符号法”. 在符号法计算中，正弦量可以用唯一的复数表示，复数的模表示正弦量的最大值(或有效值)，复数的辐角表示正弦量的初相角(初相位). 由于电工学中电流的符号为 i，为避免混淆，现将虚数单位习惯记作 j.

例如，正弦交流电流
$$i_1=10\sin(\omega t+30^\circ)\quad (\mathrm{A})$$
可表示成复数三角式：$i_1=10(\cos 30^\circ+\mathrm{j}\sin 30^\circ)\quad (\mathrm{A})$.

【实战 2】　已知 $R=100\Omega$，$L=0.5\mathrm{H}$，$f=60\mathrm{Hz}$(且 $\omega=2\pi f$)，$C=30\mu\mathrm{F}$，根据它们之间的关系 $Z=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$，计算总阻抗 Z，并把结论化为复数的三角形式.

解：由交流电路理论可知，当交流电路中接入电阻、电容、电感后，电流总阻抗 Z 可用复数表示为
$$Z=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right).$$

其中，j 代替虚数单位 i，R 为电阻(Ω)，ω 为角速度(rad/s)，L 为感抗(H)，C 为容抗(F). 将各已知值代入上式，得

$$Z\approx100+\left(2\times3.14\times60\times0.5-\frac{10^6}{2\times3.14\times60\times30}\right)\mathrm{j}$$

$$\approx100+(188.4-88.5)\mathrm{j}\approx100+100\mathrm{j}\text{(即为复数的代数式)}.$$

下面将其化为三角式，因为 $|Z|=\sqrt{100^2+100^2}\approx141.4$，辐角 $\theta=\arctan\frac{100}{100}$ $=\arctan1=\frac{\pi}{4}$，所以复数的三角式为

$$Z=141.4\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{4}\right)\quad(\Omega).$$

练一练答案：

1. (1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$，$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}}$；　(2) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，$2\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$；

(3) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$，$2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}$；　(4) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$，$3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.

2. (1) $2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$，$\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$；　(2) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}$；

(3) $5\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$，$-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$；　(4) $\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}$，$-\mathrm{i}$.