"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育"十二五"应用型本科规划教材

线性代数（第二版）

张学奇 赵梅春 主编

中国人民大学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

线 性 代 数

（第二版）

张学奇　赵梅春　主编

中国人民大学出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（第二版）/张学奇，赵梅春主编．—北京：中国人民大学出版社，2015.1

普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-300-20789-6

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①张…　②赵…　Ⅲ．①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 029047 号

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

线性代数（第二版）

张学奇　赵梅春　主编

Xianxing Daishu

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242（总编室）		010-62511770（质管部）
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河市汇鑫印务有限公司		
规　　格	185mm×260mm　16 开本	**版　　次**	2015 年 2 月第 1 版
印　　张	12.25	**印　　次**	2015 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	274 000	**定　　价**	28.00 元

内容提要

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数》(第二版)是依据高等学校经济管理类各专业对线性代数课程的教学要求，在总结线性代数课程教学改革成果，吸收国内外同类教材的优点，结合我国高等教育发展趋势的基础上编写而成的.

本书在为学生提供必要的基础知识和基本技能的同时，优化构建教学内容与课程体系，注重课程的思想性和结构特征，突出数学应用和建模能力的培养. 力求实现理论教学与实际应用、知识传授与能力培养的统一.

全书内容包括矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性代数的应用与模型. 本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，注重应用，例题典型，习题丰富，内容组织上力求做到自然直观，通俗易懂，教与学结合，易教易学. 本书还配有辅导教材《线性代数辅导教程》(第二版)、《线性代数习题全解》(第二版)、电子教案、线性代数网络课程等立体化教学资源. 需要教学课件的老师，请发邮件到 math@crup.cn 索取.

本书适合于高等学校经济类和管理类各专业学生使用，也可供理工科学生和科技工作者阅读参考.

前　言

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数》（第二版）是依据高等学校经济管理类各专业对线性代数课程的教学要求，在总结线性代数课程教学改革成果，吸收国内外同类教材的优点，结合我国高等教育发展趋势的基础上编写的.

本书的编写以强化概念理解，突出思想方法，培养数学思维和应用能力为指导，力求实现理论教学与实际应用、知识传授与能力培养的统一. 本书注重突出以下特点：

(1) 优化构建教学内容与课程体系. 在概念的引入上，注意从具体实际问题入手，从具体到抽象，从特殊到一般，由浅到深，由易到难，突出概念的思想性，逐步深化对概念的理解. 在内容的组织上，注重思想方法和知识的内在特征的强化，理论与应用的结合，知识和能力的统一.

(2) 注重课程的思想性和结构特征. 在内容的处理上在保证内容自身的系统性和科学性的基础上，更加突出内容主题、思想和结构. 如突出矩阵的初等变换和秩的作用，贯穿课程始终；强化矩阵的秩、向量组的相关性和线性方程组的解三者之间的联系，形成有机的整体；注重实对称矩阵对角化和二次型标准化思想方法一致性等.

(3) 突出数学应用和建模能力的培养. 在加强概念与理论应用背景介绍的基础上，结合课程内容编写了“线性代数的应用与模型”一章，通过有步骤、专题式的建模过程学习，逐步培养学生用数学的意识、获取新知识的能力和数学建模能力.

(4) 注意教材的实效性. 教材的编排上在体现结构上的严谨、逻辑上的清晰、叙述上的通俗易懂的同时，合理地分散难点，恰当地处理内容，渗透教学思想，使得教师好使，学生好用，有利于教与学双方的使用和教学质量的提高.

全书内容包括矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性代数的应用与模型. 本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，注重应用，可作为高等学校“线性代数”课程教材选用和参考.

在例题与习题的设计与编选上，注重体现例题典型、习题覆盖面宽、题型丰富、难易适度的原则. 按节配有适量的基本练习题，按章配有适当的提高练习题，书末附有答案与提示，便于检查参考.

为了使学生更好地掌握线性代数内容，提高学生分析问题和解决问题的能力，拓展学生的学习空间，编写了本教材配套的辅导教材《线性代数辅导教程》（第二版）、《线性代数习题全解》（第二版）：

《线性代数辅导教程》（第二版）包括教学基本要求、内容概要、要点剖析、释疑解难、典型例题解析、单元自测题等内容. 本书内容丰富，思路清晰，突出对教学内容的提炼、要点的剖析和解题方法的点拨，注重典型例题的分析和总结，对提高学生学习

兴趣、培养分析解决问题能力具有积极的促进作用，辅导教程与主教材相辅相成，起到了对课程的同步辅导与延伸的作用.

《线性代数习题全解》（第二版）对教材全部习题与总习题都给出了完整、典型、翔实的解答，对重点习题给出了分析和解题指导.

为适应教育信息化发展的需要，结合现代化教育手段编制与教材配套的微积分教学课件和网络教学资源，教学课件注重教学设计，以问题为先导，设计教学情景与活动，将教师启发性教学思想融合在课件的设计之中，体现教学内容动态化与思维过程可视化，网络教学资源为教师自主组织教学创造了条件.

本书由张学奇、赵梅春主编，参加本书编写的还有冯镜祥、魏雪君，全书由张学奇统稿定稿. 在本书的编写过程中，我们参阅了国内外一些优秀教材，从中受到了有益的启发，吸取了先进的经验. 本书的出版得到了中国人民大学出版社的支持与帮助，在此一并表示感谢！

限于编者的水平，加之时间仓促，本书难免存在不足之处，殷切期望专家、同行和读者批评指正，以使本书不断完善和提高.

张学奇

2014 年 9 月

教师信息反馈表

为了更好地为您服务，提高教学质量，中国人民大学出版社愿意为您提供全面的教学支持，期望与您建立更广泛的合作关系．请您填好下表后以电子邮件或信件的形式反馈给我们．

您使用过或正在使用的我社教材名称		版次	
您希望获得哪些相关教学资料			
您对本书的建议（可附页）			
您的姓名			
您所在的学校、院系			
您所讲授的课程名称			
学生人数			
您的联系地址			
邮政编码		联系电话	
电子邮件（必填）			
您是否为人大社教研网会员	□是，会员卡号：________ □不是，现在申请		
您在相关专业是否有主编或参编教材意向	□是　　□否 □不一定		
您所希望参编或主编的教材的基本情况（包括内容、框架结构、特色等，可附页）			

我们的联系方式：北京市西城区马连道南街 12 号
中国人民大学出版社应用技术分社
邮政编码：100055
电话：010-63311862
网址：http://www.crup.com.cn
E-mail：rendayingyong@163.com

目　　录

第一章 矩 阵

矩阵是线性代数中一个最重要的基本概念，线性代数的许多内容都可以借助矩阵进行讨论. 作为一种重要的数学工具，矩阵在自然科学的各个领域以及经济分析、经济管理中都有着广泛的应用. 本章主要介绍矩阵的概念、矩阵的运算、方阵的行列式、可逆矩阵、分块矩阵、矩阵的初等变换和矩阵的秩.

§1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的概念

在解决生活中的很多实际问题时都要处理一些数表，矩阵就是在处理这些数表时抽象出来的一个数学概念.

例 1 某工厂生产 A，B，C 三种产品，它们的成本包括三类：原料费、工资、管理费和其他费用，生产单位产品的成本（单位：元）见表 1-1，该厂每季度生产每种产品的产量（单位：件）见表 1-2.

表 1-1 生产单位产品的成本

成 本	产 品		
	A	B	C
原料费	1	3	1.5
工资	3	4	2.5
管理费和其他费用	1	2	1.5

表 1-2 每季度每种产品的产量

产品	季 度			
	夏季	秋季	冬季	春季
A	4 000	4 500	4 500	4 000
B	2 000	2 600	2 400	2 200
C	5 800	6 200	6 000	6 000

表 1-1 和表 1-2 中的数据可以简单地记为下面的形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ 3 & 4 & 2.5 \\ 1 & 2 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000 \\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200 \\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}$$

这样的矩形数表分别称为 3 行、3 列矩阵和 3 行、4 列矩阵.

例 2 某航空公司在四个城市之间的单向航线如图 1-1 所示，城市间的连线和箭头表示城市之间航线的线路和方向. 如果将此图对应一个 4 行、4 列的矩形表格，记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行、第 j 列交叉点的数 a_{ij} 定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有一条单向航线} \\ 0, \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线}\end{cases} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 4)$$

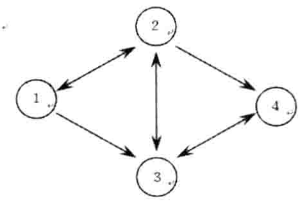

图 1-1

则图 1-1 可以简单地记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

该矩形数表称为 4 行、4 列矩阵.

许多实际问题都可以用矩形数表表示，去掉数表中数据的具体含义，可以用如下矩阵的概念来表述.

定义 1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的一个 m 行、n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为一个 m 行、n 列的**矩阵**，简称 $m \times n$ 矩阵. 横的每排称为**矩阵的行**，纵的每排称为**矩阵的列**. 这 $m \times n$ 个数叫作矩阵的**元素**，a_{ij} 为该矩阵的第 i 行、第 j 列的元素.

通常用大写的黑斜体字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示矩阵. 有时为了指明矩阵的行数和列数，也把 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$. 若 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列的元素为 a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$，则也可把 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $(a_{ij})_{m \times n}$ 或 (a_{ij}).

当 $m=n$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于列数时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶方阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

其中从左上角到右下角的对角线上的元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 称为主对角线元素.

当 $m=1$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 1 行、n 列时，矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

称为**行矩阵**，即 $1 \times n$ 矩阵.

当 $n=1$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 m 行、1 列时，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**，即 $m\times 1$ 矩阵.

当 $m=n=1$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 1 行、1 列时，把一阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{11})$ 视同普通的数 a_{11}.

当 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的元素均为零时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$. 在明确行、列的情况下，可简记为 $\boldsymbol{O}$.

定义 2 如果两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的对应元素相等，即满足

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}$.

例 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1-a\\ b-2 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c-1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 试求 a，b，c.

解 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，有

$$1=c-1,\qquad 1-a=2,\qquad b-2=0$$

解得 $a=-1$，$b=2$，$c=2$.

1.1.2 几种特殊的矩阵

1. 对角矩阵

如果一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 主对角线以外的元素都为零，即 $a_{ij}=0$（$i\neq j$；$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$），则这个方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**对角矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

通常也把对角矩阵记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn})$.

2. 数量矩阵

如果一个 n 阶对角方阵 $\boldsymbol{A}$ 中，$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$$

特别地，当 $a=1$ 时，该数量矩阵称为 n 阶**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

3. 三角形矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中，非零元素只出现在主对角线（包括主对角线）的右上方，

即满足 $a_{ij}=0$（$i>j$；$i, j=1, 2, \cdots, n$），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中，非零元素只出现在主对角线（包括主对角线）的左下方，即满足 $a_{ij}=0$（$i<j$；$i, j=1, 2, \cdots, n$），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. 对称矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}$（$i, j=1, 2, \cdots, n$），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例如，$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为 2 阶对称矩阵，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 为 3 阶对称矩阵.

5. 反对称矩阵

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$（$i, j=1, 2, \cdots, n$），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**. 对于反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $a_{ii}=-a_{ii}$，即 $a_{ii}=0(i=1, 2, \cdots, n)$，因此反对称矩阵的主对角线元素全为零，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例如，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为 2 阶反对称矩阵，$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为 3 阶反对称矩阵.

习题 1.1

1. 某工厂生产 A, B, C 三种产品. 它们的成本包括三类：原料费、工资、管理费和其他费用，生产单位产品的成本（单位：元）见下表. 试将其用矩阵表示.

题 1 表

成 本	产 品		
	A	B	C
原料费	2	6	3
工资	6	8	5
管理费和其他费用	2	4	3

2. 某班 4 名学生甲、乙、丙、丁的 3 门课程（数学、计算机、英语）的期末考试成绩见下表. 试将其用矩阵表示.

题 2 表

学 生	课 程		
	数学	计算机	英语
甲	91	85	93
乙	78	81	72
丙	93	90	95
丁	65	76	78

3. 试确定 a, b, c 的值，使得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a+b & 3 & 5 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

§1.2 矩阵的运算

矩阵的作用不仅在于把一组数排成矩形数表，而且还在于对矩阵定义了一些有理论意义和实际意义的运算，从而使其成为理论研究和解决实际问题的重要工具，本节介绍矩阵的基本运算.

1.2.1 矩阵的加法

定义 1 设两个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$，将矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 对应位置元素相加得到的 $m \times n$ 矩阵 $(a_{ij} + b_{ij})$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，即

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

需要注意的是，两个矩阵只有当行数相同、列数也相同时才能相加.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{O}$ 均为 $m\times n$ 矩阵. 由矩阵加法的定义容易验证，矩阵的加法满足下列运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(4) 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，称矩阵 $(-a_{ij})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$，则有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$$

由矩阵加法及负矩阵的定义，可以定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij})+(-b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij})$$

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1+4 & 2+3 & 3+2 \\ 0+5 & 3+(-3) & -2+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1-4 & 2-3 & 3-2 \\ 0-5 & 3-(-3) & -2-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

1.2.2 数与矩阵的乘法

定义 2 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，k 为任意数，以数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素所得到的矩阵叫作数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法，所得到的矩阵记为 $k\boldsymbol{A}$，即

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k，h 为任意实数. 由数与矩阵乘法的定义，容易验证数与矩阵乘法具有下列运算规律：

(1) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(2) $(k+h)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{A}$；

(3) $(kh)\boldsymbol{A}=k(h\boldsymbol{A})$；

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

(5) 若 $k\neq 0$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $k\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.