万学教育 海文考研

2015
人大考研

2015 考研数学要点速记随身宝

中国人民大学出版社
www.1kao.com.cn
注册享受增值服务
013397
刮开涂层 网站注册

万学海文考试研究中心 / 编
张同斌 铁 军 / 主编

- 紧贴最新
- 囊括所有
- 精练阐述
- 不仅达到“表”的记忆，而且实现“里”的理解

中国人民大学出版社

2015

考研数学

要点速记随身宝

万学海文考试研究中心　编

张同斌　铁　军　　主编

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研数学要点速记随身宝 /张同斌，铁军主编；万学海文考试研究中心编. —北京:中国人民大学出版社,2014.8

ISBN 978-7-300-19885-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①张… ②铁… ③万… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 192184 号

考研数学要点速记随身宝

万学海文考试研究中心 编

张同斌 铁军 主编

Kaoyan Shuxue Yaodian Suji Suishenbao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国 1 考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		
规　　格	104mm×145mm 64 开本	**版　　次**	2014 年 8 月第 1 版
印　　张	6	**印　　次**	2014 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	241 000	**定　　价**	18.00 元

前言 PREFACE

考研数学大纲中要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论、掌握数学的基本方法,具备综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力。现实中不少学生由于数学概念和理论理解不深入,方法掌握不牢靠,公式记忆不清晰,导致考试成绩不理想。为了帮助考生解决这些"短板",我们特意编写了这本《考研数学要点速记随身宝》。

在内容编排上,充分展现以"全面、易记"为主旨的特点。知识结构图提纲挈领,将学科不同章节知识梳理,呈现知识全局,提高考生的认知层面;常见中间结论在全面总结基本概念、定理及公式的基础上,根据编者近三十年教学与考研辅导经验将书中没有的常见中间结论收录其中,做到更全面;知识助记延伸梳理相关知识间的关系,达到记一反三的效果,使基础知识的记忆更简单,更持久。解题方法与技巧是本书的又一亮点,通过这部分内容使考生能够透视出考研数学的常考题型以及题型的变化规律、每种题型的解题方法与技巧,达到"定位"考题并正确快速解题的目标。

本书自始至终可作为考研同学学习数学用书，特别是考前可作为考生巩固基本概念、基本理论、基本公式之用，同时可梳理高频考点与重要题型的解题方法与技巧。如果说《考研数学要点速记随身宝》的出版，能够给同学们的学习提供方便，对考研有一定的促进作用，那就是编者最大的心愿。

本书也可作为在校大学生学习数学的工具书。

本书中没有标记的，数学一、数学二、数学三都适用，只适用于某一类或某几类的特别标出。在每章基本概念、定理及公式中，在历年真题中出现频率高的标记为★★★，频率次高的标记为★★，频率低的标记为★，没出现过的标记为*。

编 者

2014 年 3 月

目录 CONTENTS

1

第一部分　高等数学

知识结构图

- 高等数学
  - 一元函数微积分
    - 函数、极限、连续
    - 一元函数微分学
      - 导数与微分
      - 微分中值定理与导数的应用
    - 一元函数积分学
      - 不定积分、定积分、反常积分
      - 定积分的应用
  - 向量代数和空间解析几何[数学一]
    - 向量的概念及运算（数量积、向量积、混合积）
    - 平面与空间直线、曲面与空间曲线

- 高等数学
  - 多元函数微积分
    - 多元函数的概念、极限、连续
    - 多元函数微分学
      - 多元函数的偏导数与全微分
      - 多元函数微分学的应用
    - 多元函数积分学
      - 重积分
        - 二重积分
        - 三重积分[数学一]
      - 两类曲线积分与两类曲面积分[数学一]
      - 重积分、曲线积分与曲面积分的应用[数学一]
  - 无穷级数[数学一、数学三]
    - 常数项级数
    - 幂级数
    - 傅里叶级数[数学一]
  - 常微分方程
    - 微分方程的概念、一阶微分方程
    - 可降阶的微分方程[数学一、数学二]
    - 二(三)阶线性齐次与非齐次微分方程

第一章　函数、极限与连续

基本概念、定理及公式

（一）函数

★1. 函数的概念

定义　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集. 如果对任意 $x \in D$,存在一个对应规则 f,总有唯一确定的实数值 y 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的一个函数,记作 $f(x)$,即

$$y = f(x), x \in D.$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数 f 的定义域. 函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

★★2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

定义 1　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X \subset D$. 如果存在数 K_1,使得对任意 $x \in X$,恒有 $f(x) \leqslant K_1$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2,使得对任意 $x \in X$,恒有 $f(x) \geqslant K_2$,则

称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$. 如果存在正数 M，使得对任意 $x \in X$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果对任意正数 $M > 0$，存在 $x_0 \in X$，使 $|f(x_0)| > M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

[注] ① $f(x)$ 在 X 上有界 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，如果 $f(x)$ 在 X 上仅有上界或仅有下界，则 $f(x)$ 在 X 上未必有界.

② 无穷大量一定是无界变量，但无界变量未必是无穷大量. 如 $f(x) = x\cos x$，当 $x \to \infty$ 时是无界变量，但不是无穷大量.

(2) 函数的单调性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对任意的 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(单调减少的).

(3) 函数的周期性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使得对任意 $x \in D(x \pm l \in D)$，有 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常周期函数的周期是指最小正周期.

(4) 函数的奇偶性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对

任意 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = f(x)(f(-x) = -f(x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(奇函数).

[注] 在平面直角坐标系中,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点 O 对称.

★★3. 常见形式的函数

(1) 分段函数

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,称为分段函数.常见的分段函数有:

1) 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

2) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

3) 取整函数[x]:$y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数

4) 狄里克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

5) 最大值函数

$$\max\{f_1(x), f_2(x)\} = \begin{cases} f_1(x), & \{x \mid f_1(x) \geqslant f_2(x)\}, \\ f_2(x), & \{x \mid f_1(x) < f_2(x)\}. \end{cases}$$

6) 最小值函数

$$\min\{f_1(x), f_2(x)\} = \begin{cases} f_1(x), & \{x \mid f_1(x) \leqslant f_2(x)\}, \\ f_2(x), & \{x \mid f_1(x) > f_2(x)\}. \end{cases}$$

[注] 虽然在不同的自变量变化范围内，函数的表达式不同，但由于其是一个对应关系，所以分段函数是一个函数，而不能认为是多个函数.

(2) 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f. 如果对任意的 $y \in R_f$，由 $y = f(x)$ 可以确定唯一的 $x \in D$ 与之对应，则称 x 为定义在 R_f 上以 y 为自变量的函数，记为 $x = f^{-1}(y)$，并称 $x = f^{-1}(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数，而 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的直接函数. 习惯上，把 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

[注] ① 在同一平面直角坐标系中，$y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是一致的.

② 在同一平面直角坐标系中，$y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(3) 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，且其值域 $R_\varphi \subset D_f$，则称函数 $y = f[\varphi(x)]$，$x \in D_\varphi$ 为由函数 $u = \varphi(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，其中 x 为自变量，u 称为中间变量.

(4) 隐函数

设变量 x, y 满足二元方程 $F(x, y) = 0$. 在一定条件下，如果对某数集 D 内的任意 x，由方程 $F(x, y) = 0$ 可确定唯一

的 y 与之对应，则称由 $F(x,y)=0$ 确定了在数集 D 内的一个隐函数.

(5) 参数方程确定的函数[数学一、数学三]

由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \tag{1.1.1}$$

确定的 y 与 x 之间的函数关系，称为由参数方程(1.1.1)确定的函数.

★4. 初等函数

(1) 基本初等函数

常值函数：$y=C$(常数)；

幂函数：$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$，常数)；

指数函数：$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\mathrm{e}^x$)；

对数函数：$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$)；

三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 高等数学研究的主要对象是初等函数.

(二) 极限

★1. 数列的极限

(1) 数列极限的概念

设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

恒成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 否则称数列$\{x_n\}$是发散的.

(2) 收敛数列的性质

定理 1 (极限的唯一性) 如果数列$\{x_n\}$收敛，则其极限唯一.

定理 2 (收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$一定有界，但有界数列$\{x_n\}$未必收敛，如：数列$x_n=(-1)^n$有界，但$\{(-1)^n\}$发散.

定理 3 (收敛数列的保号性) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且$a>0$(或$a<0$)，则存在正整数$N>0$，当$n>N$时，都有$x_n>0$(或$x_n<0$).

★★2. 函数的极限

(1) 函数极限的概念

定义 1 (自变量趋于有限值时函数的极限)

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

定义 2 （自变量趋于无穷大时函数的极限）

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(2) 左极限与右极限

1) 左极限与右极限的定义

左极限　$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

右极限　$\lim\limits_{x\to x_0^+} = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

2) 左极限、右极限与极限之间的关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A.$

[注] 如果左、右极限任意之一不存在，或左、右极限存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在. 这个结论主要用于讨论分段函数在分段点或某些特殊函数在某点的极限（如求 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 时，应讨论其左、右极限）.

(3) 函数极限的性质

定理 1 （函数极限的唯一性）若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)$ 存在，则其极限唯一.

定理 2 （函数极限的局部有界性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\exists M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 3 （函数极限的局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

★★3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷大与无穷小的定义

定义 1 如果 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$，则称当 $x\to\square$ 时 $f(x)$ 为无穷小，

[注] 这里的 $\square$ 可以是 x_0, x_0^-, x_0^+，或 $\infty, -\infty, +\infty$ 中的某一个.（下同）

定义 2 如果当 $x\to\square$ 时，$|f(x)|$ 无限增大，则称当 $x\to\square$ 时 $f(x)$ 为无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty$.

[注] $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty$，按函数极限定义来说，极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说"函数 $f(x)$ 的极限是无穷大".

(2) 无穷小与函数极限的关系

定理 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha=0$.

(3) 无穷小与无穷大的关系

定理 在自变量的同一变化过程中，

1) 如果 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{f(x)}=0$；

2) 如果 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

(4) 无穷小的运算

1) 有限个无穷小的和仍是无穷小；

★★2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小；

[注] 有界函数与无穷大的乘积未必是无穷大. 如 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

3) 常数与无穷小的乘积是无穷小；

4) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

★★★(5) 无穷小的比较

设在自变量的同一变化过程中，$\lim\limits_{x\to\square}\alpha=\lim\limits_{x\to\square}\beta=0$.

1) 如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

2) 如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

3) 如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq 0)$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；

4) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C(C\neq 0,k>0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小；

5) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.