

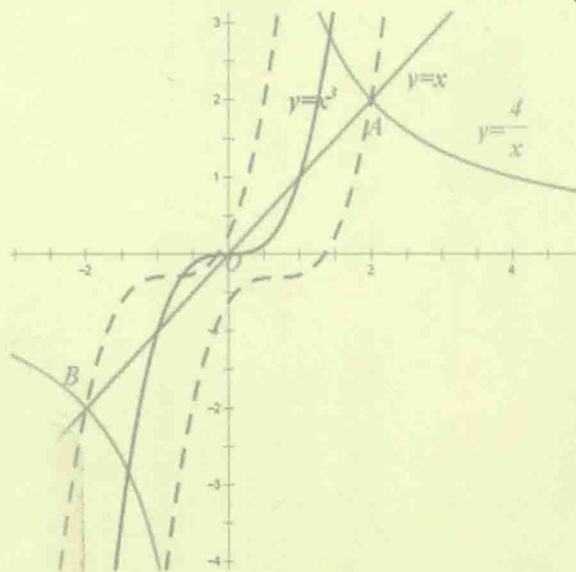
内蒙古自治区职业与成人教育协会
成人高等教育教材建设专业委员会

推荐使用教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

◎主编 刘建军 付文军



内蒙古自治区职业与成人教育协会
成人高等教育教材建设专业委员会 推荐使用教材

高等数学

主 编 刘建军 付文军
副主编 张瑞英 陈占华

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分, 导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数等, 书末附有课堂练习答案. 书中加“*”号的内容可根据不同专业选用.

本书可作为各类成人高等教育教材, 也可作为职业教育、高等教育自学考试教学用书.

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 刘建军, 付文军主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2010. 12
ISBN 978 - 7 - 5640 - 4033 - 8

I. ①高… II. ①刘…②付… III. ①高等数学 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 239237 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (办公室) 68944990 (批销中心) 68911084 (读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京飞达印刷有限责任公司

开 本 / 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

印 张 / 16.25

字 数 / 268 千字

责任编辑 / 李 娜

版 次 / 2010 年 12 月第 1 版 2010 年 12 月第 1 次印刷

王玲玲

印 数 / 1 ~ 6000 册

责任校对 / 王 丹

定 价 / 29.00 元

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题, 本社负责调换

内蒙古自治区职业与成人教育协会 成人高等教育教材建设专业委员会

主 任 刘 卫

副主任 付文军 云荣义 郝保文 刘占虎

委 员 (请按姓氏笔画排序)

马永山 王金锁 王继平 刘 军 李铁峰

张岫峰 张瑞英 周建民 樊红亮

成人高等教育教材编写委员会

主 任 曹培强

副主任 付文军 刘占虎

委 员 (请按姓氏笔画排序)

于文善 田永红 毕海荣 刘建军 李建萍 张瑞英

陈占华 范永红 周广刚 赵秀凤 康瑞芳

岁月荏苒，风云激荡。当今世界正在以前所未有的发展速度和面貌展现着惊人的变化，人们如何抢抓机遇、提升素质、应对挑战成为一个值得探索的新课题。因此，终生学习、致力成才成为了一种必然趋势。现代远程教育和成人高等教育也就成为了帮助成人实现人生理想的重要路径。

现代远程教育是利用计算机、多媒体和互联网等现代信息技术传授知识的一种全新学习方式和教育模式。成人高等教育是指针对符合规定标准的在业或非在业成年人实施的高等教育。现代远程教育和成人高等教育已经成为我国高等教育体系的重要组成部分，在促进教育信息化、大众化以及构建终身教育体系方面发挥着独特的作用和优势。为使现代远程教育和成人高等教育更好地适应成人的学习特点和需求，我们组织出版了该系列丛书。这套丛书可作为学生学习的教材，也可作为网络课程的核心内容。

该系列丛书的作者，都是本学科领域的学术带头人和教学名师，具有丰富的教学经验。在编写过程中，力求做到结构严谨、层次清晰、重点突出、难点分散、文字通俗、分量适中，以体现教材的指导和辅导作用，引导学生在学的过程中做到学、思、习、行的统一，充分发挥教材的质疑、解惑和激励功能。该系列丛书具有以下四个方面的鲜明特点：一是教育理念先进。遵循现代远程教育和成人高等教育理念，使教材符合学生的学习特点和认知规律，体现以学生为本的理念。二是内容安排科学。充分反映了每门课程发展的最新成果，理论与实践有机结合、结构合理、详略得当。三是编写内容生动。结合图片、案例等进行讲解，图文并茂，通俗易懂。四是思考训练丰富多样。在课后习题和配套练习册或辅导手册的设计和编排上，通过练习和案例相结合的形式，努力实现传授知识、培养能力和提高觉悟的统一。可以说，这是一套大胆实践、勇于探索的创新教材。在编写过程中参考了本学科领域的最新研究成果，本书在编写过程中还得到了内蒙古自治区职业与成人教育协会的大力支持和帮助，在此一并表示感谢。

“乘风破浪会有时，直挂云帆济沧海。”相信这套系列教材在同行专家学者的指导和帮助下一定会不断地完善和提高。同样，经过精心培育的现代远程教育成人高等教育的学生，必将胸怀理想，发奋攻读，为描绘中国特色社会主义建设的新蓝图，为实现中华民族的伟大复兴贡献出自己的青春、智慧和力量！

内蒙古自治区成人高等教育教材编写委员会

前

言

foreword

高等数学是高校理、工和管理等各专业学习的一门重要的基础课,它一方面为学生学习专业课程提供所必需的数学基本概念和基本方法;另一方面能够培养学生的运算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力。

本书以教育部高校学生司和教育部考试中心制定并颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点,升本科)》为基础,根据高等学校成人教育和远程教育的教学要求,遵循基础理论教学中“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则编写而成。

通过对本门课程的学习,可达到传授知识和发展能力两方面的教学目的,积极为学生终身学习搭建平台、拓展空间。本书不仅把高等数学课程当做重要的基础课和工具课,更将其视为一门素质课,启发学生创新、思考,促进学生学习能力的提高。

全书共分十章,内容包括极限与连续、一元函数微积分、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数等,书中加“*”号的内容可根据不同专业选用。

本书具有以下特点。

(1) 本书是针对成人教育的教学要求编写的,力求对基本概念和基本方法讲解清楚,本书内容安排由浅入深、通俗易懂、便于教学、便于自学。对定理的阐述与证明,着重于几何上的直观解释,而不强调冗长的数学推导。

(2) 本书在每节后都配有小结和少量的课堂练习以供检查课堂学习效果之用,书末附课堂练习答案。另外,与本书配套的习题册包含各节作业和各章综合复习题,方便教学使用。

(3) 结构优化。本书依照新大纲的考点划分章节,保证了内容基本的区分度,力求做到有层次、有梯度、由浅入深、由低到高、相互补充、有机统一。

(4) 本书增加了数学概念的发展简史和一些数学家的介绍,可使读者摆脱对数学枯燥的片面认识。

本书可作为各类成人高等教育教材,也可作为高等教育自学考试教材或参考书,同时对高中以上相关人员自学、教研都有很好的参考价值。

由于编者水平有限,恳请读者对本书的不足之处批评指正。

编者

目 录

contents

第1章 函数、极限与连续	1
第1节 函数	2
1.1 函数的概念	2
1.2 函数的四种特性	5
1.3 函数的运算	7
1.4 初等函数	8
第2节 数列的极限	11
2.1 引例	11
2.2 数列极限的概念	12
2.3 数列极限的性质及运算	13
第3节 函数的极限	14
3.1 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	15
3.2 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	16
第4节 无穷小量与无穷大量	17
4.1 无穷小量	17
4.2 无穷大量	17
4.3 无穷小量与无穷大量间的关系	18
4.4 无穷小的性质	18
4.5 无穷小的比较	18
第5节 极限的性质与运算法则	20
5.1 极限的性质	20
5.2 极限的运算法则	20
第6节 两个重要极限	23
6.1 极限存在的迫敛定理	24
6.2 两个重要极限	24
第7节 函数的连续性	28
7.1 函数的连续性概念	28

7.2 连续函数的运算与性质	31
第2章 导数与微分	35
第1节 导数的概念	36
1.1 引例	36
1.2 导数的定义	37
1.3 用导数的定义求导数	37
1.4 左导数与右导数	39
1.5 可导与连续的关系	39
1.6 导数的意义	40
第2节 导数的基本公式与运算法则	41
2.1 导数的四则运算	41
2.2 反函数的求导法则	43
2.3 复合函数求导法则	44
2.4 基本求导公式	45
第3节 隐函数及参数方程确定的函数的求导法则	46
3.1 隐函数求导法则	46
3.2 对数求导法	47
3.2 参数方程求导法则	48
第4节 高阶导数	49
第5节 微分	50
5.1 微分的概念	51
5.2 微分的几何意义	52
5.3 微分的运算法则	52
*5.4 微分在近似计算中的应用	53
第3章 导数的应用	55
第1节 微分中值定理	55
1.1 罗尔定理	56
1.2 拉格朗日中值定理	57
第2节 洛必达法则	59
2.1 $\frac{0}{0}$ 型	59

2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型	61
2.3 其他待定型 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0	63
第3节 函数的单调性与极值	65
3.1 函数的单调性	65
3.2 函数的极值	66
3.3 函数的最大值和最小值	69
第4节 曲线的凹凸性与拐点	71
4.1 曲线的凹凸性与拐点	71
4.2 曲线的渐近线	72
4.3 简单函数作图	73
第4章 不定积分	76
第1节 不定积分的概念	77
1.1 不定积分的定义	77
1.2 不定积分的运算性质与基本公式	79
第2节 不定积分的计算	82
2.1 第一换元积分法	82
2.2 第二换元积分法	85
2.3 分部积分法	88
第3节 几种特殊类型函数的积分	91
3.1 有理函数的积分	91
3.2 三角函数的积分	94
*3.3 简单无理函数的积分	95
第5章 定积分及其应用	98
第1节 定积分的概念及性质	99
1.1 定积分概念的引入	99
1.2 定积分的定义	100
1.3 定积分的几何意义	102
1.4 定积分的基本性质	102
第2节 微积分基本定理	104
2.1 变上限积分函数	105
2.2 微积分基本定理	107

第3节	定积分的计算	109
3.1	换元积分法	110
3.2	分部积分法	112
第4节	无限区间上的广义积分	114
第5节	定积分的应用	115
5.1	元素法	116
5.2	平面图形的面积	116
5.3	求立体的体积	119
5.4	变力做功	120
第6章	常微分方程	122
第1节	微分方程的基本概念	123
1.1	引例	123
1.2	微分方程的相关概念	124
第2节	微分方程的建立与分离变量法	126
2.1	建立微分方程	126
2.2	可变量分离的微分方程	127
第3节	一阶线性微分方程	130
3.1	一阶线性微分方程的定义	130
3.2	一阶线性微分方程的求解	130
第4节	可降阶的高阶微分方程	133
4.1	$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	133
4.2	$y''=f(x, y')$ 型的微分方程	135
4.3	$y''=f(y, y')$ 型的微分方程	135
第5节	二阶常系数线性微分方程	137
5.1	二阶常系数齐次线性微分方程	137
5.2	二阶常系数非齐次线性微分方程	139
第7章	向量代数与空间解析几何	144
第1节	空间向量及其坐标表示法	145
1.1	空间向量	145
1.2	空间向量的线性运算	146
1.3	利用坐标做向量的线性运算	148
第2节	向量的数量积与向量积	152

2.1	向量的数量积	152
2.2	向量的向量积	154
第3节	平面与空间直线	156
3.1	平面的方程	157
3.2	空间直线的方程	161
第4节	曲面与空间曲线	165
4.1	曲面方程的概念	165
4.2	旋转曲面	166
4.3	柱面	167
*4.4	空间曲线的方程	168
*4.5	空间曲线在坐标面上的投影	169
第8章	多元函数的微分学	171
第1节	多元函数	172
1.1	区域的概念	172
1.2	二元函数的概念	173
第2节	二元函数的极限与连续性	175
2.1	二元函数的极限	175
2.2	二元函数的连续性	176
第3节	偏导数	178
3.1	二元函数的偏导数	178
3.2	高阶偏导数	180
第4节	全微分	181
4.1	全微分的概念	181
4.2	可微的条件	182
*4.3	近似计算	184
第5节	复合函数和隐函数的微分法	185
5.1	复合函数微分法	185
5.2	隐函数的微分法	186
第6节	二元函数的极值	188
6.1	二元函数极值的定义	188
6.2	二元函数极值的求法	189
6.3	条件极值	190

6.4 二元函数的最大值与最小值	193
第9章 二重积分	196
第1节 二重积分的概念和性质	196
1.1 二重积分的概念	196
1.2 二重积分的性质	200
第2节 二重积分的计算	201
2.1 二重积分在直角坐标系下的计算方法	202
2.2 二重积分在极坐标下的计算	205
第3节 二重积分的简单应用	208
3.1 立体体积和平面图形的面积	208
3.2 平面薄片的质量和平面薄片的重心	209
第10章 无穷级数	212
第1节 无穷级数的概念	213
1.1 级数的概念	213
1.2 无穷级数的敛散性	215
1.3 无穷级数的性质	217
第2节 正项级数	218
2.1 正项级数的定义	218
2.2 正项级数收敛的判别法	219
第3节 交错级数与任意项级数	223
3.1 交错级数的定义	223
3.2 绝对收敛与条件收敛	224
第4节 幂级数	225
4.1 幂级数的概念和收敛区间	226
4.2 幂级数的性质	228
第5节 函数展为幂级数	230
5.1 泰勒公式与泰勒级数	230
5.2 将函数展为幂级数	231
第6节 函数的幂级数展开式在近似计算中的应用	237
附录: 课堂练习参考答案	239

第1章 函数、极限与连续

学习目的

在中学所学的基本初等函数有关知识的基础上,了解分段函数、复合函数、初等函数等概念;进一步认识并掌握与函数连续性相关的知识.

学习要求

- ◆掌握分段函数、复合函数、初等函数的概念.
- ◆理解数列极限、函数极限的定义.
- ◆掌握极限的四则运算法则.
- ◆了解无穷小、无穷大及其比较的概念,了解函数及其极限与无穷小的关系,理解无穷小的性质.
- ◆了解夹逼准则,会用两个重要极限公式求极限.
- ◆理解函数连续与间断的概念,会判断间断点的类型,了解初等函数的连续性及其闭区间上连续函数的性质.

重点与难点

- ◆教学重点:复合函数的概念,极限概念,两个重要极限;极限四则运算法则;连续概念.
- ◆教学难点:复合函数的概念;极限定义,连续与间断的判断.

微积分是高等数学的主要部分,函数是微积分研究的主要对象,而极限的方法是研究函数性质的基本方法,本章将介绍函数、极限和函数的连续等基本概念,以及它们的一些性质.

第1节 函数

1.1 函数的概念

函数概念是全部数学概念中最重要的概念之一，最早提出函数 (function) 概念的，是 17 世纪德国数学家莱布尼茨。莱布尼茨最初用“函数”一词表示幂，随后，他又用函数表示在直角坐标系中曲线上一点的横坐标、纵坐标。

中文数学书上使用的“函数”一词是转译词，是我国清代数学家李善兰在翻译西方的《代数学》(1895 年)一书时，把“function”译成“函数”的。

中国古代“函”字与“含”字通用，都有着“包含”的意思。李善兰给出的定义是：“凡式中含天，为天之函



李善兰

著名数学家，在《方圆阐幽》中较早阐发了微积分的初步理论，在《垛积比中》中，他说明了高阶等差数列的理论，提出“李善兰恒等式”。

数。”中国古代用天、地、人、物 4 个字来表示 4 个不同的未知数或变量。这个定义的含义是：“凡是公式中含有变量 x ，则该式子叫做 x 的函数。”所以“函数”是指公式里含有变量的意思。现在我们所说的方程的确切定义是指含有未知数的等式。

1.1.1 常量与变量

在日常生活和生产活动中，经常遇到各种不同的量。例如：身高、气温、产量、收入等。这些量可以分为两类：一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称为常量。例如，圆周率 π 是常量；某种商品的价格、某个班的学生人数在某段时间内保持不变，这些量都是常量；另一类量在所考察的过程中是变化的，可以取不同的数值，我们把它称作变量。例如，一天中的气温、生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量。

常量习惯用字母 a, b, c, d 等表示；变量习惯用 x, y, z, u, v, w 等表示。

1.1.2 区间与邻域

区间和邻域是高等数学中常用的实数集，下面对它们进行介绍。

1. 区间

设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 满足不等式

$$a < x < b$$

的一切实数 x 的全体称为开区间, 记作 (a, b) . 满足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的一切实数 x 的全体称为闭区间, 记作 $[a, b]$. 其中 a, b 称为区间的端点. 在几何上, (a, b) 和 $[a, b]$ 都表示数轴上点 a 和点 b 之间的线段上的点, 开区间 (a, b) 不包含端点 a 和 b , 闭区间 $[a, b]$ 包含端点 a 和 b . 类似地, 对于满足不等式

$$a < x \leq b \text{ 或 } a \leq x < b$$

的一切实数 x 的全体称为半开区间, 分别记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$.

当 $a < b$ 时, $b - a$ 称为上述四个区间的长度.

为了讨论方便, 引入记号 “ $+\infty$ ” (读作 “正无穷大”) 和 “ $-\infty$ ” (读作 “负无穷大”), 并规定:

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数, 或记为 $-\infty < x < +\infty$;

$(-\infty, b)$ 表示满足不等式 $x < b$ 的一切实数 x 的全体, 或记为 $-\infty < x < b$;

$(a, +\infty)$ 表示满足不等式 $x > a$ 的一切实数 x 的全体, 或记为 $a < x < +\infty$.

2. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径.

由于

$$|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$$

即 $x \in (a - \delta, a + \delta)$, 因此点 a 的 δ 邻域就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ (如图 1-1-1 所示).

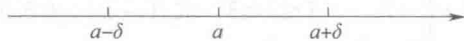


图 1-1-1

在以后讨论极限和导数概念时, 经常要用到去心邻域的概念, 去心邻域是指满足不等式 $|x - a| < \delta$ 且 $x \neq a$ 的一切实数 x 的全体, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$.

1.1.3 函数

自然界里可被观察的量都可以看成是变量, 人们从自然界里归纳出的自然规律常常表现为变量与变量之间的依赖关系, 而函数实际上就是为了表述这种依赖