

物理学

下册

难题集萃

舒幼生 胡望雨 陈秉乾 编著

力学 电磁学 热学
光学 近代物理 试题

中国科学技术大学出版社

物理学

下册

难题集萃

舒幼生 胡望雨 陈秉乾 编著

下册



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是一部具有资料保存价值的巨著,在内容结构上,包含了大量的难题;在题目的难度和广度上,加进了从某些科研项目简化出来的题目;在解题分析上,编者不仅用准确、精炼的物理语言揭示了难题的难点所在,对关键步骤作了细致的分析,而且提供了不少独辟蹊径的解题方法.若非编者长期从事物理教学及研究工作,并全身心投入国际物理奥林匹克竞赛及国内各种物理竞赛工作,是难以编成本书的.

本书分上、下两册,本分册为下册,内容包括光学、近代物理和试题.

本书可供各类高等学校物理专业师生使用,对国内外研究生考试有参考价值,也可作为中学各级物理竞赛的培训资料,以及中学物理教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

物理学难题集萃. 下册/舒幼生,胡望雨,陈秉乾编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2014. 8

ISBN 978-7-312-03462-6

I. 物… II. ①舒…②胡…③陈… III. 物理学—习题集 IV. O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 098018 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 安徽省瑞隆印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 29.5
字数 755 千
版次 2014 年 8 月第 1 版
印次 2014 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—5000 册
定价 59.00 元

前 言

解题是物理教学中的一个重要环节. 它对于正确地、深入地理解基本内容, 培养分析问题和解决问题的能力, 以及从中汲取广博的实际知识等等, 具有不可替代的重要作用. 索末菲曾经写信告诫他的学生海森堡: “要勤奋地去做练习, 只有这样, 你才会发现, 哪些你理解了, 哪些你还没有理解.” 杨振宁回忆他的大学生活时说过: “西南联大教学风气是非常认真的, 我们那时所念的课, 一般老师准备得很好, 学生习题做得很多.” 因而, 编制、收集、选用各种题目特别是难题, 并借此有效地提高学生的解题能力, 已经成为广大师生瞩目的课题.

北京大学物理系普通物理教研室从 1952 年建立以来, 走过了 60 多年漫长的教学历程. 长期的教学实践, 各种类型考试、竞赛的命题工作, 特别是 30 余年来承担的参加国际中学生物理奥林匹克 (IPhO) 的中国队的培训、选拔和参赛任务, 使我们积累了大量的资料和经验. 应各方面的强烈呼吁, 1993 年 6 月, 我们编纂的《物理学难题集萃 (附基本题, 附详解)》(以下简称《原书》) 由高等教育出版社出版. 《原书》精选普通物理难题 358 题, 基本题 285 题, 全书共 643 题, 约百万字. 出版后, 受到广泛欢迎, 近万册书很快销售一空. 1997 年, 我们重新编纂出版了《物理学难题集萃 (增订本)》(以下简称《增订本》). 《增订本》删除了《原书》中的基本题, 保留了《原书》中的难题, 并作了大量增补. 另外, 还精选了我们在培训、选拔参加 IPhO 中国队工作中编制的各种试题, 作为《增订本》的最后部分, 公诸于世. 《增订本》中的难题仍大体按普通物理课程定位, 共 668 题, 都有详细的分析和解答. 《增订本》再次获得了广大读者的普遍认可, 早已售罄. 应中国科学技术大学出版社之邀, 我们欣然决定对《增订本》进行重版. 此次重版, 书名仍用《物理学难题集萃》, 我们仅替换了少量题目, 最大的变化是将原厚达 1300 多页的书分成了上、下两册, 更方便读者阅读.

为了帮助读者更好地使用本书, 下面谈谈我们在编纂过程中的一些基本想法和意图.

本书以“难题集萃”为名, 显然, 如何精选题目是编者面临的第一个关键问题.

我们的做法是: 首先, 从内容上说, 尽力确保类型齐全, 新颖先进, 实用有效. 为此, 我们整理并保留了一批传统的普物难题, 又从近年国内、外各种考试和竞赛中大量汲取了颇具新意的各类普物难题, 其中还包括我们自己编制的各类普物难题. 我们希望帮助读者了解各类普物难题大致可能深入和伸展到什么范围, 涉及什么内容. 我们希望勾勒出各类普物难题演变和发展的历史轨迹. 同时, 还特别注意普物与后继课程之间的“结合部”即俗称“三不管”的内容, 以及运用普通物理的原理和高等数学的工具可能解决的具有典型意义的各种理论问题和实际问题. 相信本书提供的丰富资料会大大拓宽读者的视野.

值得指出的是, 在本书中, 我们并不是单纯地引用收罗到的各类普物难题, 而是经过分析和提炼, 力图把握住各类普物难题的核心, 编纂成一系列题意简单明确而内涵丰富的题目. 相信这将有助于读者登堂入室, 逐步懂得难题的奥秘. 体会到编者用心的教师, 可取本书所列难题为素材, 加工出适合各种用途的高层次难题; 学生若也能有所体会, 则表明其驾驭难题的能力已经大大提高了.

其次,题目的难易固然主要表现为物理内容和所需数学手段的深浅、繁简,但同时也在提问角度的变化,综合、类比、联想能力的考验,以及能否正确地解决各种具体问题,等等.有鉴于此,我们不仅在内容上力求类型齐全,而且力图使读者能够接触到具有不同风格、形式、提问角度,乃至叙述方式的各类典型普物难题.

有了好的题目,怎样充分地加以利用,以便有效地提高学生的解题能力呢?这是编者面临的第二个关键问题.

我们认为,所谓解题,无非是分析、表达和演算.所谓分析,是指对具体问题的定性物理分析,即分析涉及的现象和过程,分析在各种条件下可能出现的结果或变化,以及导致这些结果或变化的物理原因.通过分析,才能建立起物理现象或过程的正确物理图像,把复杂的问题分解成各个相互联系的局部,判定各个局部的性质和特点,明确需要寻找的关系,把握住解题的关键.然后,在正确运用基本规律的基础上理出解题的线索,确定解题的步骤.所谓表达,是指对物理内容的数学表述,即赋予各种条件、要求和关系以确切的数学形式.所谓演算,不言而喻,是数学工具的运用,应该准确、快捷和规范化.定性的物理分析,恰当的数学表述和准确的定量演算是不可分割的,解题的成功正在于三者的完美结合.其中,我们想特别强调对题目的分析,因为它是表达和演算的根据,只有在分析基础上的解题才是自觉的、主动的和透彻的,才能避免盲目性和随意性.重在分析,务求透彻,讲究质量,并持之以恒,确有举一反三、触类旁通之功效,这是培养和提高解题能力的关键.本书每题在求解之前都先作分析,目的正在于此.

应该指出,我们从理论上把解题概括为分析、表达、演算三个环节,决不是试图树立某种新的教条或模式,而是力图根除乱套公式、片面追求数量、不求甚解的弊病.不仅如此,从某种意义上讲,实际的理论研究工作也都离不开提出问题、分析、表达、演算等环节.因此,通过解题,自觉地培养和提高定性物理分析的能力,积累和总结数学表达的经验,掌握熟练准确地运用各种数学工具的本事,或许正是解题的本意.当然,解题能力的提高决不是孤立的事情,而是教学质量和学生水平的综合反映.另外,解题也只是培养物理人才的一个方面,过分夸大亦非所宜.

我们这一代从20世纪五六十年代开始任教的教师都已先后退休,新一代的精英已经或即将登台执教,因而在新老交替之际,总结经验,积累资料,培训师资,继往开来,适应时代发展的需要,已经成为当务之急.就习题而言,目前,各类普物习题集并不少见,但以精选难题并附详细分析、求解为内容的书籍并不多见,本书试图弥补这一空缺,从这方面给年轻教师以切实的帮助,同时,也是对我们自己在这方面工作的回顾和纪念.

蔡伯濂教授拨冗审阅《增订本》全书,谨此致谢.

本书适合于各类高校讲授、学习普通物理的师生,中学物理教师,以及有志于各类物理竞赛的大、中学生使用和参考.

编者

2014年夏于北京大学

目 录

前言	(i)
----------	-------

第四部分 光学

第一章 几何光学	(2)
第二章 光的干涉	(55)
第三章 光的衍射	(97)
第四章 光的偏振	(135)
第五章 光的色散、散射和吸收	(183)

第五部分 近代物理

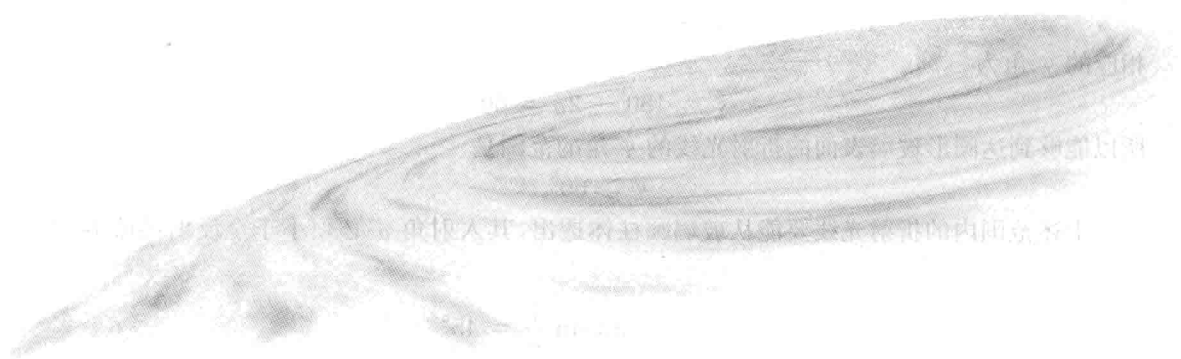
第一章 量子物理	(200)
第二章 狭义相对论	(238)

第六部分 试题

力学试题(一)	(274)
力学试题(二)	(283)
热学试题(一)	(294)
热学试题(二)	(305)
电磁学试题(一)	(317)
电磁学试题(二)	(328)
电磁学试题(三)(电路)	(340)
电磁学试题(四)(电路)	(352)
光学试题	(364)
近代物理试题	(371)

综合试题(一)	(382)
综合试题(二)	(402)
综合试题(三)	(421)
综合试题(四)	(439)
综合试题(五)(模拟研究生入学考试普物试题)	(459)

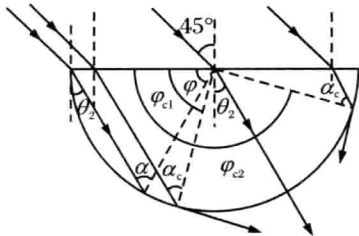
≡ 光 学 ≡



第一章 几何光学

【题 1】 半圆柱形玻璃的折射率 $n = \sqrt{2}$, 放置在空气中. 在垂直于半圆柱体轴的平面内, 光线以 45° 角入射在半圆柱体的平表面上. 试问: 光线从半圆柱体的什么范围内透出(以角度表示)?

【分析】 如光图 1.1.1 所示, 倾角为 45° 的平行光线从空气射向玻璃, 经半圆柱体的平表面折射后, 成为在半圆柱体内的一束平行光线. 这束平行光线以不同的入射角射在圆柱形表面上. 由于玻璃折射率大于空气, 当入射角大于某一临界值时, 将发生全反射, 因此只有入射角小于该临界值的光线才能透出. 求出该临界值, 确定相应的位置, 即可求解.



光图 1.1.1

【解】 先确定折射光线能到达圆柱面的范围. 如光图 1.1.1 所示, 从左侧边缘入射的光线, 其折射光线就是能到达圆柱面的边缘光线. 该边缘光线与圆柱面交点的位置用 φ 角表示, 由折射定律, 有

$$\sin 45^\circ = n \sin \theta_2$$

其中: θ_2 为该边缘光线的折射角, 即

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{n} \sin 45^\circ = \frac{1}{2}$$

故

$$\theta_2 = 30^\circ$$

该边缘光线在圆形玻璃表面的入射角 α 为

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

相应的 φ 角为

$$\varphi = 180^\circ - 2\alpha = 60^\circ$$

所以能够到达圆形玻璃表面的折射光线的 φ 角的范围是

$$\varphi \geq 60^\circ$$

上述范围内的折射光线要能从玻璃圆柱体透出, 其入射角 α 必须小于全反射的临界角 α_c , 即

$$\alpha < \alpha_c = \arcsin \frac{1}{n} = 45^\circ$$

满足 $\alpha = \alpha_c$ 条件的 φ 角有两个值, 当 φ 为锐角时, 有

$$\varphi_{c1} = 180^\circ - (\alpha_c + 60^\circ) = 75^\circ$$

当 φ 为钝角时, 有

$$\varphi_{c2} = 180^\circ - (60^\circ - \alpha_c) = 165^\circ$$

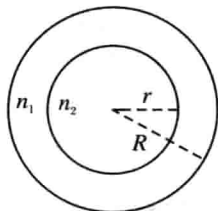
因此, 只有 φ 角满足

$$75^\circ < \varphi < 165^\circ$$

的折射光线能从玻璃圆柱体透出,射向空气.

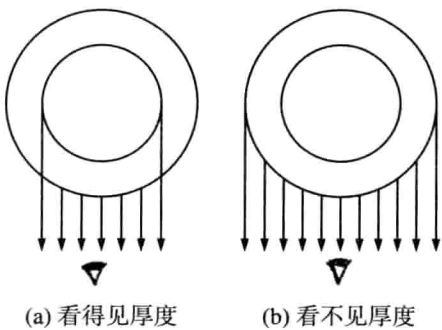
【本题是 1968 年第 2 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题.】

【题 2】如光图 1.2.1 所示,在内半径为 r 、外半径为 R 、折射率为 n_1 的玻璃管内充满了折射率为 n_2 的发光液体.试问:从远处正面看,当管的厚度消失时, r 和 R 应满足什么条件?



光图 1.2.1

【分析】液体发出的光线经玻璃两次折射后射出.从远处看,只能接收平行光线.管的厚度消失,意味着经管边缘射向远方的光线应与该处的管直径($2R$)垂直,即以 90° 出射(见光图 1.2.2(b)).换言之,该光线从玻璃折向空气时,其入射角应为全反射临界角.于是可以确定该光线来自何处,即确定该光线从液体射向玻璃时的折射角 α .该光线是否确实可能存在呢?由于题目未说明 n_1 和 n_2 的大小,应分别就 $n_1 > n_2$ 和 $n_1 < n_2$ 两种情况进行讨论,从而确定 r 和 R 应满足的条件.



光图 1.2.2

故

$$\sin \alpha = \frac{R}{r} \sin \theta_c = \frac{R}{n_1 r}$$

管壁中是否存在 PM 光线呢?从 P 点由液体射向玻璃的入射光线的入射角最大为 90° ,相应的折射角为 α_{\max} .若 $n_2 < n_1$,则

$$n_2 \sin 90^\circ = n_1 \sin \alpha_{\max}, \quad \text{即} \quad \sin \alpha_{\max} = \frac{n_2}{n_1}$$

若 $n_2 > n_1$,则

$$\sin \alpha_{\max} = 1$$

存在光线 PM 的条件是

$$\sin \alpha \leq \sin \alpha_{\max}$$

即要求:当 $n_2 < n_1$ 时

$$\frac{R}{n_1 r} \leq \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{即} \quad \frac{R}{r} \leq n_2$$

当 $n_2 > n_1$ 时

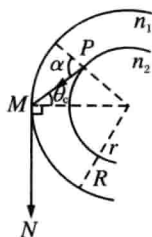
$$\frac{R}{n_1 r} \leq 1, \quad \text{即} \quad \frac{R}{r} \leq n_1$$

【解】如光图 1.2.3 所示,厚度消失时,管边缘 M 点必须存在切向光线 MN ,管壁中必须存在相应的 PM 光线.因 MN 光线的折射角为 90° ,故 PM 光线的入射角 θ_c 必为全反射临界角,即

$$\sin \theta_c = \frac{1}{n_1}$$

PM 光线是从液体中 P 点发出的,从液体射向玻璃时的折射角为 α ,如光图 1.2.3 所示,由正弦定理,有

$$\frac{r}{\sin \theta_c} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}$$



光图 1.2.3

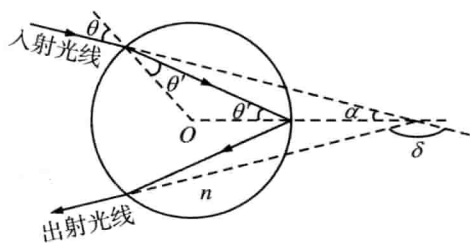
【题 3】如光图 1.3.1 所示,一条光线射入空气中的球状水滴,在水滴内表面反射后又

穿出水滴. 入射光线与出射光线之间的夹角 δ 称为偏向角. 已知水滴的折射率为 n . 试问:

1. 光线在水滴内表面反射时是全反射还是部分反射?
2. 当偏向角为最小偏向角时, 入射光线的入射角 θ 应满足什么条件?

【分析】 入射光以任意入射角 θ 入射时, 根据折射定律可求得光线在内表面反射时的入射角 θ' , 由全反射的临界条件, 可判断是否属于全反射.

偏向角 δ 与入射角 θ 有关, 由 δ 取极值的条件可以得对 θ 角的要求.



光图 1.3.1

【解】 1. 设入射光线的入射角为 θ , 在水滴内的折射角为 θ' , 由折射定律, 得

$$\sin \theta = n \sin \theta'$$

因 $n > 1$, 故

$$\sin \theta' = \frac{1}{n} \sin \theta < \frac{1}{n}$$

即

$$\theta' < \theta_c = \arcsin \frac{1}{n}$$

可见, 光线在水滴内表面反射时, 不满足全反射条件, 属于部分反射.

2. 如光图 1.3.1 所示, 由几何关系

$$\delta = \pi - 2\alpha, \quad \alpha = \theta' - (\theta - \theta') = 2\theta' - \theta$$

得

$$\delta = \pi - 4\theta' + 2\theta \quad (1)$$

式(1)中折射角 θ' 由入射角 θ 决定, 故偏向角 δ 是 θ 的函数. δ 取极小值时应满足的条件是

$$\frac{d\delta}{d\theta} = -4 \frac{d\theta'}{d\theta} + 2 = 0 \quad (2)$$

把折射定律微分, 得

$$\cos \theta' d\theta' = \frac{1}{n} \cos \theta d\theta$$

即

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\cos \theta}{n \cos \theta'} = \frac{\cos \theta}{n \sqrt{1 - \sin^2 \theta'}} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}$$

代入式(2), 得

$$\frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} = \frac{1}{2}$$

化简后得

$$\cos^2 \theta = \frac{n^2 - 1}{3}$$

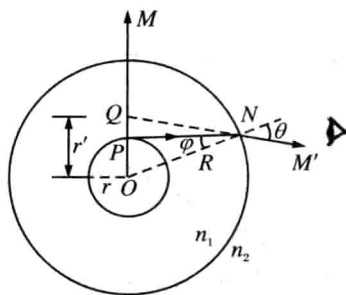
这就是 δ 为最小偏向角时, 入射角 θ 应满足的条件.

【题 4】 1. 设温度计由圆柱形玻璃管做成, 内、外直径分别为 $2r = 1 \text{ mm}$ 和 $2R = 3 \text{ mm}$, 玻璃折射率 $n_1 = 1.5$, 空气折射率 $n_2 = 1$. 试问: 当从侧面近处观察时, 内直径的表观尺寸是多少?

2. 某温度计的外直径和玻璃的折射率都与上述温度计相同, 但内直径 $2r = 0.1 \text{ mm}$. 将此温度计垂直悬挂于盛水玻璃烧杯的中心位置, 水的折射率为 $n'_1 = 4/3$. 试问: 当从烧杯外

远处观察时,温度计内、外直径的表观尺寸各是多少?

【分析】 1. 如光图 1.4.1 所示,在温度计的横截面内观察光线的传播.考虑从内管壁上 P 点发出的两条光线:一条光线 PM 沿半径穿出外管,不发生偏折;另一条 PN 沿内管的切向到达外管壁,经折射后得光线 NM' . 两条出射光线 PM 和 NM' 相交于 Q 点, Q 点即 P 点的像点.于是内直径的表观尺寸为 $2r' = 2\overline{OQ}$. 由折射定律和几何关系可求得 $2r'$.



光图 1.4.1

2. 利用第 1 问的一般结果,并在 $r \ll R$ 的条件下取近似,本问可解.

【解】 1. 如光图 1.4.1 所示,由几何关系,有

$$\begin{aligned} r' &= r + \overline{PQ} = r + \sqrt{R^2 - r^2} \tan(\theta - \varphi) \\ &= r + \sqrt{R^2 - r^2} \frac{\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi}{\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi} \end{aligned} \quad (1)$$

由光图 1.4.1,有

$$\sin \varphi = \frac{r}{R} = \frac{1}{3}, \quad \cos \varphi = (1 - \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

由折射定律,有

$$\sin \theta = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi = n_1 \sin \varphi = \frac{1.5}{3} = 0.5, \quad \theta = 30^\circ, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

把上述数据代入式(1),得内直径的表观尺寸为

$$2r' = 1.53 \text{ mm}$$

2. 当 $r \ll R$ 时, φ 角和 θ 角都很小,故有

$$r \approx R\varphi, \quad r' \approx R\theta, \quad \theta \approx \frac{n_1}{n_2} \varphi$$

内直径的表观尺寸为

$$2r' = 2 \frac{n_1}{n_2} R\varphi = 2 \frac{n_1}{n_2} r$$

可见,表观尺寸只与折射率 n_1 和 n_2 有关,而与外径 R 无关.

考虑盛水烧杯中的温度计,如光图 1.4.2 所示,与第 1 问不同的是,在空气与温度计之间插入了折射率为 $n'_1 = 4/3$ 的水.利用上述近似结果,温度计外直径的表观大小为

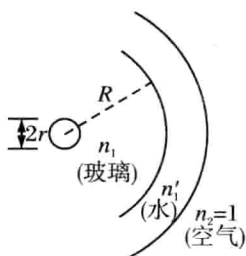
$$2R' = 2 \frac{n'_1}{n_2} R = 2n'_1 R = 4 \text{ mm}$$

温度计内直径的表观大小为

$$2r'' = 2 \frac{n'_1}{n_2} r'$$

式中: $2r'$ 为经第一次折射后的表观内直径,且

$$2r' = 2 \frac{n_1}{n_2} r$$



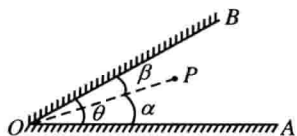
光图 1.4.2

故

$$2r'' = 2 \frac{n_1}{n_2} r$$

可见,表观内直径只与最初和最终的介质折射率有关,而与中间插入的介质层无关.因 $n_2 = 1$,故

$$2r'' = 2n_1 r = 0.15 \text{ mm}$$



光图 1.5.1

【题 5】 如光图 1.5.1 所示,两平面反射镜 A 和 B 斜交,交棱为 O ,两镜夹角为 θ ,两反射镜的反射面相对.而两反射镜之间有一物点 P ,从 P 点向交棱作垂线 OP , OP 与两镜的夹角分别为 α 和 β ,观察者位于 A 和 B 两镜之间.试问:

1. 一般情形下最多能观察到多少个反射像?
2. 当 $\theta = \pi/5$, $\theta = \pi/3$ 和 $\theta = \pi/2$ 时,能观察到几个反射像? 各位于何处?

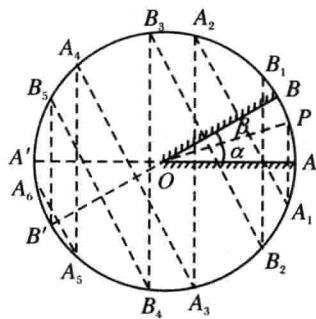
【分析】 物点 P 经平面反射镜 A 和 B 的交替反射,将形成一系列反射像.根据平面反射镜的成像法则,物和像的连线必被镜面所平分,故所成诸像均位于以 O 为中心、以 OP 为半径的同一圆上,如光图 1.5.2 所示.例如:

物点 P 经反射镜 A 成像,得像点 A_1 ;
 A_1 点经反射镜 B 成像,得像点 A_2 ;
 A_2 点经反射镜 A 成像,得像点 A_3 ;

同理,物点 P 经反射镜 B 成像,得像点 B_1 ;
 B_1 点经反射镜 A 成像,得像点 B_2 ;
 B_2 点经反射镜 B 成像,得像点 B_3 ;

上述各像点的标记法为:从物点 P 开始,凡第一次成像过程由反射镜 A 完成的各像点均标记为 A_n ,脚标为交替成像序号;凡第一次成像由反射镜 B 完成的各像点均标记为 B_n ,脚标也是交替成像的序号.

如光图 1.5.2 所示,经两反射镜的交替反复成像后, A_n 和 B_n 两序列的像点最终必定落到图中的 $A'B'$ 区域(A' 和 B' 分别是反射镜 OA 和 OB 的延长线与圆的交点),该区域是两反射镜的背面,一旦像落到此区域(如光图 1.5.2 中的 A_6),便不再产生新的像点.根据 θ 角和 α 角的大小,可决定像点的总数及位置.



光图 1.5.2

【解】 1. 首先考虑 A_n 序列的像点.设 $\overline{OP} = 1$,由光图 1.5.2,有

$$\widehat{PA_1} = 2\alpha$$

$$\widehat{PA_2} = \beta + \widehat{BA_2} = \beta + \widehat{BA_1} = \beta + (\beta + 2\alpha) = 2(\alpha + \beta) = 2\theta$$

$$\begin{aligned} \widehat{PA_3} &= \alpha + \widehat{AA_3} = \alpha + \widehat{AA_2} = \alpha + (\theta + \widehat{BA_2}) = \alpha + \theta + \widehat{BA_1} \\ &= \alpha + \theta + (\theta + \alpha) = 2\alpha + 2\theta \end{aligned}$$

$$\widehat{PA_4} = \beta + \widehat{BA_4} = \beta + \widehat{BA_3} = \beta + \theta + \widehat{AA_3} = \beta + \theta + \widehat{AA_2}$$

$$= \beta + \theta + (\theta + \widehat{BA_2}) = \beta + \theta + \theta + \widehat{BA_1} = \beta + 2\theta + (\theta + \alpha) = 4\theta$$

$$\begin{aligned}\widehat{PA_5} &= \alpha + \widehat{AA_5} = \alpha + \widehat{AA_4} = \alpha + \theta + \widehat{BA_4} = \alpha + \theta + \widehat{BA_3} \\ &= \alpha + \theta + (3\theta + \alpha) = 2\alpha + 4\theta\end{aligned}$$

.....

可见,奇数序号的像点 A_1, A_3, A_5, \dots 沿顺时针方向趋近 $A'B'$ 区,相邻两奇数序号像点的角度差为 2θ ;偶数序号的像点 A_2, A_4, A_6, \dots 则沿逆时针方向趋近 $A'B'$ 区,相邻两偶数序号像点的角度差也是 2θ .一旦最后一个像点进入 $A'B'$ 区,就不再产生新像点.

设最后的像点属奇数系列(顺时针趋近 $A'B'$),序号为 $2n+1$,则有

$$\widehat{PAA_{2n+1}} > \widehat{PAB'}$$

其中: $\widehat{PAA_{2n+1}}$ 为最后像点 A_{2n+1} 离物点 P 的弧距,为

$$\widehat{PAA_{2n+1}} = 2\alpha + 2n\theta$$

而

$$\widehat{PAB'} = \pi - \beta$$

故有

$$2\alpha + 2n\theta > \pi - \beta, \quad 2n\theta > \pi - \alpha - \theta$$

或

$$(2n+1)\theta > \pi - \alpha, \quad 2n+1 > \frac{\pi - \alpha}{\theta}$$

可见,最后一个像点的序号 $2n+1$ (正整数)由 $\frac{\pi - \alpha}{\theta}$ 的整数部分决定.

同理,若进入 $A'B'$ 区的最后一个像点属偶数序列(逆时针趋向 $A'B'$),序号为 $2n$,则有

$$\widehat{PBA_{2n}} > \widehat{PBA'}, \quad \text{或} \quad 2n\theta > \pi - \alpha$$

故

$$2n > \frac{\pi - \alpha}{\theta}$$

可见,最后一个像点的序号 $2n$ (正整数)仍由 $\frac{\pi - \alpha}{\theta}$ 的整数部分决定.

总之,最后一个像点无论属奇数序列还是偶数序列,其序列号均由刚好比 $\frac{\pi - \alpha}{\theta}$ 略大的整数决定.由此得出,所产生的 A 系列像点总数是刚好比 $\frac{\pi - \alpha}{\theta}$ 大的整数.

以上讨论了 A 系列的像点.同样, B 系列像点的总数是刚好比 $\frac{\pi - \beta}{\theta}$ 大的整数.因此,所产生像点的总数 N 为

$$N = \text{刚好比 } \frac{\pi - \alpha}{\theta} \text{ 大的整数} + \text{刚好比 } \frac{\pi - \beta}{\theta} \text{ 大的整数}$$

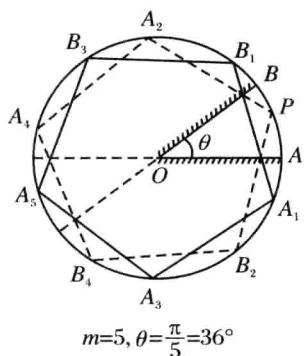
2. 在 $\theta = \pi/m, m$ 为正整数的特殊情形下,有

$$\frac{\pi - \alpha}{\theta} = m - \frac{\alpha}{\theta}, \quad \frac{\pi - \beta}{\theta} = m - \frac{\beta}{\theta}$$

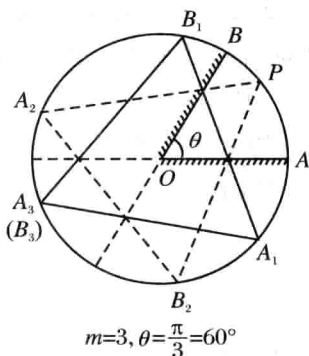
因 α 和 β 均小于 θ ,故 $\frac{\alpha}{\theta}$ 和 $\frac{\beta}{\theta}$ 均为小数,刚好比 $\frac{\pi - \alpha}{\theta}$ 和 $\frac{\pi - \beta}{\theta}$ 大的整数都是 m ,应有 $2m$ 个像点.

在 $m=5, \theta = \pi/5; m=3, \theta = \pi/3; m=2, \theta = \pi/2$ 的情形下,像点的位置分别如光图 1.5.3、

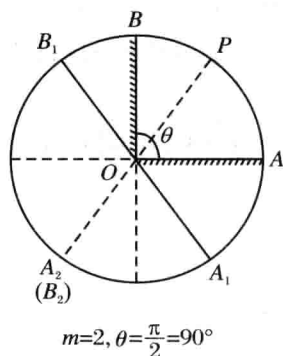
光图 1.5.4 和光图 1.5.5 所示. 在光图 1.5.3 中, $m=5, \theta=\pi/5=36^\circ$. 沿顺时针把所有奇数脚标的像点 $A_1 A_3 A_5 B_3 B_1 A_1$ 用直线连接起来, 形成正五边形. 在光图 1.5.3 中, 从物点 P 开始逆时针把所有偶数脚标的像点 $PA_2 A_4 B_4 B_2 P$ 用直线连接起来, 形成另一正五边形. 物点和所有像点都位于这两个正五边形的顶点. 扣除物点本身, 在光图 1.5.3 中共有 $2m-1=9$ 个像点.



光图 1.5.3



光图 1.5.4



光图 1.5.5

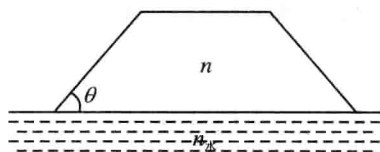
在光图 1.5.4 中, $m=3, \theta=\pi/3=60^\circ$. 奇数脚标像点位于 $A_1 A_3 B_1$ 正三角形的顶点, 偶数脚标像点和物点位于正三角形 $PA_2 B_2$ 的顶点. 除物点 P 外, 共有 $2m-1=5$ 个像点.

在光图 1.5.5 中, $m=2, \theta=\pi/2=90^\circ$. 光图 1.5.3 和光图 1.5.4 中的正多边形退化成 $A_1 B_1$ 和 PA_2 两条直线, 共有 $2m-1=3$ 个像点.

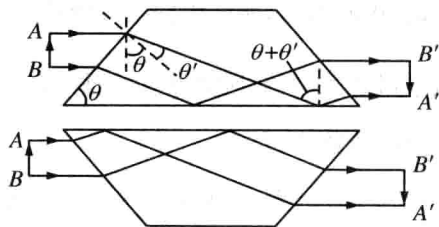
【题 6】 如光图 1.6.1 所示, 等腰玻璃三棱镜的折射率 $n=1.50$, 顶部截去, 底部浸在水中, 水的折射率 $n_{\text{水}}=1.33$, 入射的平行光与底面平行. 试问:

1. 角 θ 至少应多大, 才能使光线在棱镜底面上产生全反射?
2. 透过上述棱镜观察远处的物, 并使棱镜以入射光线为轴以角速度 ω 旋转, 将观察到什么现象?

【分析】 由折射定律和全反射条件, 可得所需的最小的 θ 角. 当棱镜以 ω 绕入射光线旋转时, 像将相应地旋转, 利用某些特例, 例如棱镜旋转 180° 后像的位置, 即可确定像旋转的角速度.



光图 1.6.1



光图 1.6.2

【解】 1. 如光图 1.6.2 所示, 入射角为 $90^\circ - \theta$, 设折射角为 θ' , 由折射定律, 有

$$\sin(90^\circ - \theta) = n \sin \theta'$$

即

$$\cos \theta = n \sin \theta' \tag{1}$$

折射光线要在底面上产生全反射, 必须满足

$$n \sin(\theta + \theta') \geq n_{\text{水}}$$

即

$$\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta \geq \frac{n_{\text{水}}}{n} \quad (2)$$

由式(1),得

$$\sin \theta' = \frac{\cos \theta}{n}, \quad \cos \theta' = \sqrt{1 - \sin^2 \theta'} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}$$

代入式(2),得

$$\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta} \geq n_{\text{水}} - \cos^2 \theta$$

或

$$(n^2 - 2n_{\text{水}} + 1)\cos^2 \theta \leq n^2 - n_{\text{水}}^2 \quad \text{即} \quad \cos^2 \theta \leq \frac{n^2 - n_{\text{水}}^2}{n^2 - 2n_{\text{水}} + 1}$$

故

$$\theta \geq 25.4^\circ$$

即 θ 角至少应为 25.4° 才能使光线在棱镜底面上产生全反射.

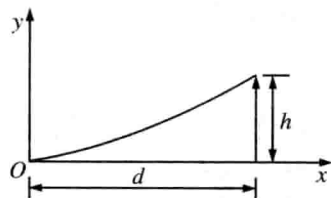
2. 如光图 1.6.2 所示,当棱镜以入射光线为轴以角速度 ω 旋转时,像 $A'B'$ 相应地旋转.当棱镜转过 180° 角时,像转了 360° 角,因此像旋转的角速度为 2ω ,是棱镜角速度的两倍.

【题 7】 已知飞机场跑道上空空气的折射率随高度 y 变化的规律为

$$n = n_0(1 + \alpha y)$$

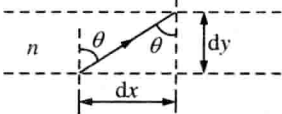
式中: $\alpha = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$; n_0 为地面处空气的折射率.某人站在跑道上观看远处的跑道,他的眼睛离地面的高度为 $h = 1.7 \text{ m}$.试求该人能看到的跑道的长度 d .

【分析】 如光图 1.7.1 所示,由于空气的折射率 n 随高度的增加而增加,从跑道发出的光线向上弯曲传播,如果光线来自较远处的跑道,传播到人所在位置时,其高度超过人眼,就无法看到,所以人眼能看到的跑道的长度是有限的,设为 d ,如光图 1.7.1 所示.为求 d ,需知光线传播的轨迹.因 $n = n(y)$,可将跑道上的空气分割成许多平行于地面的薄层,每薄层的折射率可看作常量.从跑道发出的沿跑道传播的光线经各薄层时遵循折射定律,加上几何关系,可得出光线轨迹的方程,代入有关数据即可求出 d .



光图 1.7.1

【解】 取直角坐标 Oxy 如光图 1.7.1 所示,原点 O 与人的距离即为所求的 d .将跑道上的空气分割成许多平行于地面的薄层,各层的折射率分别为 n_0 (地面), n_1, n_2, \dots , 其中离地面高度为 y 、厚为 dy 的任一薄层的折射率为 n ,如光图 1.7.2 所示.



光图 1.7.2

由折射定律,从跑道发出的沿跑道传播的光线经各薄层时应遵循以下关系:

$$n_0 = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = \dots = n \sin \theta = \dots \quad (1)$$

式中: θ 是光线在折射率为 n 、高度为 y 、厚度为 dy 的任一薄层中传播时,光线与界面法线的夹角.题设

$$n = n_0(1 + \alpha y) \quad (2)$$

由式(1)和式(2),得

$$n_0 = n \sin \theta = n_0(1 + \alpha y) \sin \theta \quad (3)$$

由几何关系(见光图 1.7.2),有

$$\frac{dy}{dx} = \cot \theta$$

得

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \theta}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (4)$$

把式(4)代入式(3),得

$$1 + \alpha y = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{即} \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + 2\alpha y + \alpha^2 y^2$$

因 α 很小, y 有限,故 $\alpha^2 y^2$ 项可略,得

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\alpha y}, \quad \text{或} \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2\alpha} dx$$

这就是光线轨迹所遵循的微分方程. 积分,得

$$2\sqrt{y} = \sqrt{2\alpha}x + C$$

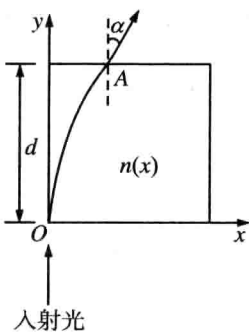
因 $x=0$ 处, $y=0$,故积分常量 $C=0$. 代入,得出光线的轨迹为

$$y = \frac{\alpha}{2}x^2$$

这是抛物线. 当 $y=h$ 时,有

$$d = \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} = 1.5 \times 10^3 \text{ m}$$

即高度为 1.7 m 的人眼所能看到的跑道最远处与他相距 1 500 m,再远就看不见了.



光图 1.8.1

【题 8】 如光图 1.8.1 所示,平板玻璃的折射率 n 随 x 变化的规律为

$$n(x) = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{r}}$$

式中: $n_0 = 1.2$; $r = 13 \text{ cm}$. 光线从 $x=0$ 处沿 y 轴入射,经平板玻璃后从 A 点以 $\alpha = 30^\circ$ 角射出. 试求:

1. 光线在平板玻璃中的轨迹;
2. A 点处平板的折射率;
3. 平板的厚度 d .

【分析】 与上题类似,因 n 随 x 增大而增大,光线在平板中传播时将逐渐向右弯曲(如光图 1.8.1 所示). 可将平板分成许多与 y 轴平行的薄层,各层的折射率可视为常数. 由光线在各层传播时遵循的折射定律及几何关系,可得出光线在平板中传播的轨迹. 进而再得出 A 点处的折射率 n_A 以及平板的厚度 $d = y(x_A)$.

【解】 1. 把平板分成许多与 y 轴平行的薄层,其中在 x 处,厚为 dx 的任一薄层的折射率为 n ,如光图 1.8.2 所示. 光线在该薄层两界面上的折射角和入射角均为 θ (见光图 1.8.2),则由折射定律和几何关系,有

$$n_0 = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = \cdots = n \sin \theta = \cdots$$