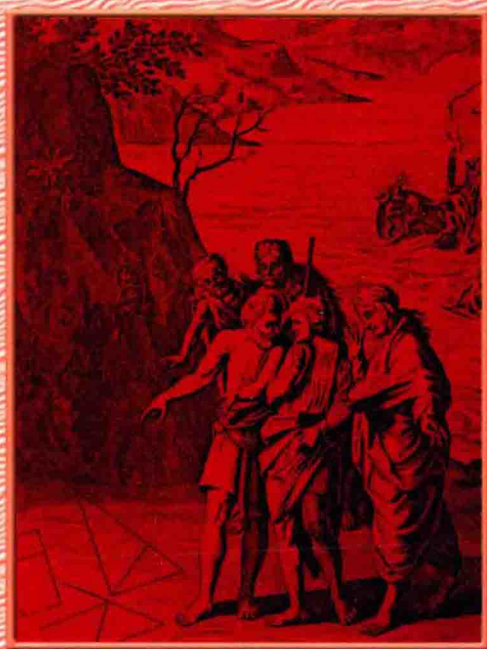


《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

斯潘纳尔引理

——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起

刘培杰 郭梦舒 编著



©Spanner 引理及 LMV 不等式

矩阵和图论证法

via 猜想

与定理和极集理论



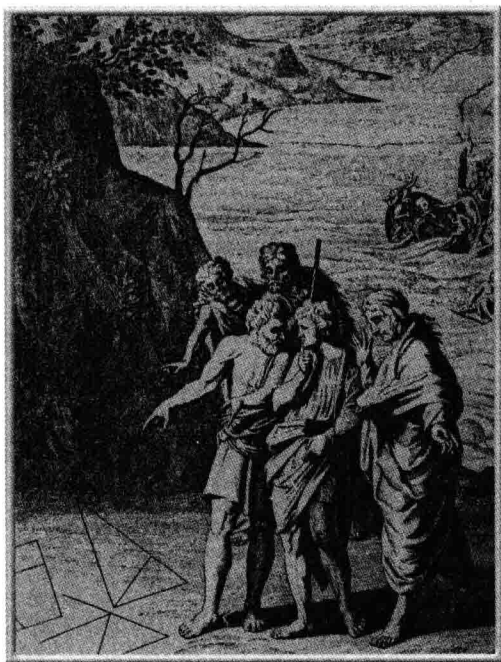
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

斯潘纳尔引理

——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起

刘培杰 郭梦舒 编著



◎ Sperner 引理及 IMY 不等式

◎ Boolea 矩阵和图论证法

◎ G. C. Rota 猜想

◎ Dilworth 定理和极集理论

◎ 超图



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起,详细地介绍了斯潘纳尔引理的内容及其证明。并且介绍了与之相关的 IMY 不等式、Boolea 矩阵、图论、Dilworth 定理、极集理论、Gauss 数等问题。

本书可供大、专院校数学系师生及数学爱好者阅读和收藏。

图书在版编目(CIP)数据

斯潘纳尔引理:从一道加拿大数学奥林匹克
试题谈起/刘培杰,郭梦舒编著. —哈尔滨:哈

尔滨工业大学出版社,2014.5

ISBN 978-7-5603-3833-0

I. ①刘… II. ①刘… ②郭… III. ①组合数学—普
及读物 IV. ①O157-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 283613 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 王 慧

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 5.5 字数 55 千字

版 次 2014 年 5 月第 1 版 2014 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3833-0

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 目 录

第 1 章	Sperner 引理及 IMY 不等式 //1
第 2 章	Boolea 矩阵和图论证法 //16
第 3 章	G. C. Rota 猜想 //19
附录 1	限制子集基数的 Sperner 系 //23
附录 2	Dilworth 定理和极集理论 //33
附录 3	Gauss 数和 q -类似 //42
附录 4	超图 //49
附录 5	关于 Sperner 性质的一个猜想的注记 //61
参考文献	//64
编辑手记	//67



Sperner^① 引理及 IMY 不等式

第

1

章

在 1993 年全国高中数学联赛中，浙江省提供了一道颇有背景的试题（第二试第二题）：

试题 A 设 A 是一个包含 n 个元素的集合，它的 m 个子集 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 两两互不包含，试证：

$$(1) \sum_{i=1}^m \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leq 1;$$

$$(2) \sum_{i=1}^m C_n^{|A_i|} \geq m^2.$$

其中， $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数， $C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个组合数。

证明 (1) 证明的关键在于证明如

① 译为斯潘纳尔 —— 编者注

下不等式

$$\sum_{i=1}^m |A_i|! (n - |A_i|)! \leq n! \quad (1)$$

设 $|A_i| = m_i, i = 1, 2, \dots, m$. 一方面 A 中 n 个元素的全排列为 $n!$; 另一方面, 考虑这样一类 n 元排列

$$a_1, a_2, \dots, a_{m_i} \quad b_1, b_2, \dots, b_{n-m_i} \quad (2)$$

其中, $a_j \in A_i, 1 \leq j \leq m_i; b_j \in A \setminus A_i$ (即 $\bar{A}_i$), $1 \leq j \leq n - m_i$.

我们先证明一个引理.

引理 1 若 $i \neq j$, 则 A_i 与 A_j 由上述方法所产生的排列均不相同.

证明 用反证法, 假设 A_j 所对应的一个排列

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_{m_j} \quad b'_1, b'_2, \dots, b'_{n-m_j}$$

与 A_i 所对应的一个排列

$$a_1, a_2, \dots, a_{m_i} \quad b_1, b_2, \dots, b_{n-m_i}$$

相同, 则有以下两种情况:

① 当 $|A_i| \leq |A_j|$ 时, 有 $A_j \supseteq A_i$;

② 当 $|A_i| > |A_j|$ 时, 有 $A_i \supseteq A_j$.

而这均与 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 互不包含相矛盾, 故引理 1 成立.

由引理 1 可知式 (1) 成立. 由式 (1) 立即可得

$$\sum_{i=1}^m \frac{|A_i|! (n - |A_i|)!}{n!} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leq 1$$

(2) 利用 Cauchy 不等式及式 (1) 可得

$$m \leq \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \right) \left(\sum_{i=1}^m C_n^{|A_i|} \right) \leq 1$$

近几年来, 背景法命题在数学奥林匹克中已形成潮流, 一道优秀的竞赛试题应有较高深的背景已成为命题者的共识, 试题 A 就是一例.

首先就研究对象来看, 试题 A 实际上研究了一个子集族, 即 A 是一个 n 阶集合, $S = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 且满足:

$$(1) A_i \subseteq A, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$(2) \text{对任意的 } A_i, A_j \in S, i \neq j \text{ 时满足 } A_i \not\subseteq A_j, \\ A_j \not\subseteq A_i.$$

那么这样的子集族称为 S 族, S 族中的元素都是集合. 之所以称为 S 族, 是因为数学家 Sperner 最先研究了这类问题. 1928 年 Sperner 证明了一个被许多组合学书中称为 Sperner 引理的结果, 它是组合集合论中的经典结果之一.

Sperner 引理 设集合

$$X = \{1, 2, \dots, n\}, A_1, A_2, \dots, A_p$$

为 X 的不同子集, $E = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 是 X 的子集族.

如果 E 为 S 族, 则 E 族的势至多为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ (其中 $[x]$ 为 Gauss 函数), 即 $\max p = C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

证明 令 $q_k \triangleq |\{k \mid |A_i| = k, 1 \leq i \leq p\}|$, 则由试题 A 中的式 ① 有

$$\sum_{k=1}^n q_k k! (n-k)! \leq n!$$

由于

$$\max_{1 \leq k \leq n} C_n^k = C_n^{[\frac{n}{2}]}$$

所以

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^m q_k \leq C_n^{[\frac{n}{2}]} \sum_{k=1}^p q_k \frac{k! (n-k)!}{n!} \\ &\leq C_n^{[\frac{n}{2}]} \sum_{k=1}^p q_k \frac{1}{C_n^k} = C_n^{[\frac{n}{2}]} \sum_{k=1}^p \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leq C_n^{[\frac{n}{2}]} \end{aligned}$$

Sperner 引理在数学竞赛中有许多精彩的特例. 1981 年 5 月, 加拿大举行了第 13 届数学竞赛, 其最后

一道试题为:

试题 B 共有 11 个剧团参加会演,每天都排定其中某些剧团演出,其余的剧团则跻身于普通观众之列.在会演结束时,每个剧团除了自己的演出日外,至少观看过其他每个剧团的一次表演.问这样的会演至少要安排几天?

用 Sperner 引理可以很容易证明试题 B.

证法 1 令 $A = \{1, 2, \dots, n\}$, 以 $A_i (i = 1, 2, \dots, 11)$ 表示第 i 个剧团做观众的时间集合, 则 $A_i \subset A (i = 1, 2, \dots, 11)$.

由于每个剧团都全面观摩过其他剧团的演出, 所以 $A_i, A_j (1 \leq i, j \leq 11)$ 互不包含(第 i 个剧团观摩第 j 个剧团的那一天属于 A_i 而不属于 A_j). 故

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{11}\}$$

为 S 族. 由 Sperner 引理知, 只需求

$$n_0 = \min\{n \mid C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq 11\}$$

由于 $f(n) = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 是增函数, 故由 $C_5^2 = 10, C_6^3 = 20$ 知, $n_0 = 6$. 证毕.

证法 1 固然简洁明快, 但它是以知道 Sperner 引理为前提的, 不适合于中学生, 下面给出另一种证法:

证法 2 设共有 m 天, 集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$; 有 n 个队, $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个队的演出日期}\}$. 显然 $A_i \subseteq M$. 我们将满足全面观摩要求称为具有性质 P.

定义 $f(n) \triangleq \min\{n \mid A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 具有性质 P}\}$, 故我们只需证 $f(11) = 6$.

为了便于叙述, 先来证明两个简单的引理.

引理 2 以下三个结论是等价的:

- (1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 具有性质 P;
 (2) 对任意的 $1 \leq i \neq j \leq n, A_i \bar{A}_j \neq \emptyset$;
 (3) $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是 S 族.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 用反证法: 假若存在 $1 \leq i \neq j \leq n$, 使得 $A_i, \bar{A}_j = \emptyset$, 则第 j 个队就无法观看第 i 个队的演出, 与(1) 矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (3) 假若 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 不是 S 族, 则必定存在 $1 \leq i \neq j \leq n$, 使得 $A_i \subseteq A_j$, 则有 $A_i \bar{A}_j \subseteq A_j \bar{A}_j$. 而 $A_i \bar{A}_j = \emptyset$, 故 $A_i \bar{A}_j = \emptyset$, 与(2) 矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (1) 如果第 i 个队始终看不到第 j 个队的演出, 意味着第 i 个队在演出时, 第 j 个队也一定在演出, 即 $A_i \subseteq A_j$, 与(3) 矛盾.

引理 3 若 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是具有性质 P 的, 则 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ 也具有性质 P.

证明 注意到对任意 $1 \leq i \neq j \leq n$, 有关系式

$$\bar{A}_i \bar{A}_j = \bar{A}_i \bar{A}_j A_j \bar{A}_i$$

故由引理 1 知结论为真.

下面我们来证明试题 B. 首先证明 $f(11) \leq 6$. 今构造一个安排如下

$$A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{1, 3\}, A_3 = \{1, 4\}, A_4 = \{1, 5\}$$

$$A_5 = \{2, 3\}, A_6 = \{2, 4\}, A_7 = \{2, 5\}$$

$$A_8 = \{3, 4\}, A_9 = \{3, 5\}$$

$$A_{10} = \{4, 5\}$$

$$A_{11} = \{6\}$$

显然这个安排满足引理 2 中的(3), 由引理 2 知它满足全面观摩的要求, 故 $f(1) \leq 6$.

接着证 $f(11) > 5$, 即对 $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 无法构造出 $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ 使之具有性质 P. 为此我们还需要

斯潘纳尔引理

证明几个引理,对于 M_1 我们有如下的引理:

引理 4 $|A_i| \neq 1, 1 \leq i \leq 11$.

证明 用反证法:假设存在某个 $i (1 \leq i \leq 11)$, 使 $|A_i| = 1$; 不失一般性可设 $|A_1| = 1, A_1 = \{1\}$. 则由引理 2 中(3)可知, $\{1\} \not\subseteq A_j, 2 \leq j \leq 11$, 即它们也具有性质 P. 下面证 $|A_j| \neq 1, 2 \leq j \leq 11$.

(1) 若存在某个 $2 \leq i \leq 11$, 使得 $|A_i| = 1$, 则不妨设 $|A_2| = 1$, 且 $A_2 = \{2\}$. 由引理 1 中(3)可得

$$\{2\} \not\subseteq A_j, 3 \leq j \leq 11$$

于是 $A_j \subseteq M_2 - A_2 = \{3, 4, 5\}$ (记为 M_3), $3 \leq j \leq 11$. M_3 的所有真子集共 $2^3 - 2 = 6$ (个), 但 $A_3, A_4, \dots, A_{11}$ 共有 9 个, 故由抽屉原则知至少有两个相同, 与引理 2 矛盾.

(2) 假设存在某个 $2 \leq i \leq 11$, 使得 $|A_i| = 3$, 不失一般性可假设 $|A_2| = 3$, 且 $A_2 = \{2, 3, 4\}$, 那么 $A_j \subset M_2 - A_2, 3 \leq j \leq 11$. 而 $M_2 - A_2$ 的真子集共有

$$(2^4 - 2) - (2^3 - 1) = 7 \text{ (个)}$$

由抽屉原则知在 $A_2, \dots, A_{11}$ 中一定有两个相同, 与引理 1 矛盾.

(3) 由(1), (2)可知, 对所有的 $2 \leq i \leq 11$, 都有 $|A_i| \neq 2$, 而 M_2 的所有二元子集总共只有 $C_4^2 = 6$ (个), 由抽屉原则知必有两个 A_i 和 $A_j (2 \leq i \neq j \leq 11)$ 相同, 与引理 2 矛盾.

综合(1), (2), (3)可知引理 4 成立. 证毕.

引理 5 $|A_i| \neq 4, 1 \leq i \leq 11$.

证明 由引理 3 知, 若 $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ 具有性质 P, 则 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{11}$ 也具有性质 P, 故由引理 3 知

$$|\bar{A}_i| \neq 1 \quad (1 \leq i \leq 11)$$

注意到

$$|A_i| = |A_i \cup \bar{A}_i| - |\bar{A}_i| = 5 - |\bar{A}_i|$$

故 $|A_i| \neq 4$.

引理 6 我们记 $M^{(i)}$ 表示 M 的所有 i 元子集, 且

$$\alpha = |\{A_i \mid |A_i| = 2, 1 \leq i \leq 11\}| = |M^{(2)}|$$

$$\beta = |\{A_i \mid |A_i| = 3, 1 \leq i \leq 11\}| = |M^{(3)}|$$

则 $\beta \geq 6$.

证明 用反证法: 假设 $\beta \leq 5$.

(1) 先证 $\beta \neq 1$, $|M^{(2)}| = C_5^2 = 10$, 故 $\beta = 1$ 时, $\alpha = 11 - \beta = 10$, 可以取到, 但此时这个唯一的三元集 A_j , 一定存在某个 $A_p \in \{A_i \mid |A_i| = 2, 1 \leq i \leq 11\}$, 使 $A_p \subseteq A_j$, 与引理 1 矛盾. 所以 $\beta \neq 1$.

(2) 若 $\beta = 2$, 设 $|A_1| = |A_2| = 3$, 且 $A_1 = \{1, 2, 3\}$, 考察 $A_1 \cap A_2$, $|A_1 \cap A_2| = 1$ 或 2 .

① 若 $|A_1 \cap A_2| = 1$, 则设 $A_2 = \{3, 4, 5\}$, 于是

$$|A_1^{(2)}| + |A_2^{(2)}| = C_3^2 + C_3^2 = 6$$

故 $\alpha \leq |\{A_i \mid |A_i| = 2, A_i \not\subset A_1 \text{ 且 } A_i \subset A_2\}| = 4$, $\alpha + \beta \leq 4 + 2 = 6$, 与 $\alpha + \beta = 11$ 矛盾.

② 若 $|A_1 \cap A_2| = 2$, 则可设 $A_2 = \{2, 3, 4\}$, 于是 $|\{B_j \mid |B_j| = 2, B_j \subset A_1 \text{ 或 } B_j \subset A_2\}| = C_3^2 + C_3^2 - 1 = 5$. 由引理 1 知 $\alpha \leq 10 - 5 = 5$, 故 $\alpha + \beta \leq 5 + 2 = 7$, 与 $\alpha + \beta = 11$ 矛盾.

综合(1), (2) 可知 $\beta \neq 2$.

(3) 若 $\beta = 3$, 则不妨设 $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 3$, 且 $A_1 = \{1, 2, 3\}$, 仍考察 $A_1 \cap A_2$, $|A_1 \cap A_2| = 1$ 或 2 .

① 若 $|A_1 \cap A_2| = 1$, 则可设

$$A_2 = \{3, 4, 5\}$$

斯潘纳尔引理

$$|A_1^{(2)} \cup A_2^{(2)}| = |A_1^{(2)}| + |A_2^{(2)}| = 3 + 3 = 6$$

考察 $A_3^{(2)}$.

如果 $A_3^{(2)} \subseteq A_1^{(2)} \cup A_2^{(2)}$, 则因 $|A_3^{(2)}| = 3$, 故由抽屉原则可知, 存在两个 $Y_1, Y_2 \in A_3^{(2)}$, 使得 $Y_1, Y_2 \in A_1^{(2)}$ 或 $Y_1, Y_2 \in A_2^{(2)}$, 即 $|A_3^{(2)} \cap A_j^{(2)}| = 2, j=1$ 或 2 , 但这可导致 $A_1 = A_j, j=1$ 或 2 , 矛盾.

② 若 $|A_1 \cap A_2| = 2$ 也会产生类似矛盾.

由 ①, ② 可知, $A_3^{(2)} \not\subseteq A_1^{(2)} \cup A_2^{(2)}$, 故

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^3 A_i^{(2)} \right| &\geq \left| \bigcup_{i=1}^2 A_i^{(2)} \right| + 1 \\ &= |A_1^{(2)}| + |A_2^{(2)}| - |A_1^{(2)} \cap A_2^{(2)}| + 1 \\ &= \begin{cases} 7 & |A_1 \cap A_2| = 1 \text{ 时} \\ 6 & |A_1 \cap A_2| = 2 \text{ 时} \end{cases} \end{aligned}$$

由引理 6 的 (3) 可知

$$\alpha \leq |M_1^{(2)}| - \left| \bigcup_{i=1}^3 A_i^{(2)} \right| \leq 10 - 6 = 4$$

因此 $\beta \geq 11 - 4 = 7$, 这与假设的 $\beta \leq 5$ 矛盾, 故引理 6 成立.

引理 7 $\alpha \geq 6$.

证明 若 $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ 具有性质 P, 由引理 3 知 $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{11}$ 也具有性质 P. 记

$$\alpha' = |\{\bar{A}_i \mid |\bar{A}_i| = 2, 1 \leq i \leq 11\}|$$

$$\beta' = |\{\bar{A}_i \mid |\bar{A}_i| = 3, 1 \leq i \leq 11\}|$$

由于 $|M_1| = 5$, 则 $|\bar{A}_i| = 2 \Rightarrow |A_i| = 3, |\bar{A}_i| = 3 \Rightarrow |A_i| = 2$, 故 $\beta' = \alpha, \alpha' = \beta$.

由引理 6 知, $\beta' \geq 6$, 故 $\alpha = \beta' \geq 6$, 证毕.

由引理 6、引理 7 可知 $\alpha + \beta \geq 6 + 6 = 12$, 与 $\alpha + \beta = 11$ 矛盾. 故对 $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 不能构造出 $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ 具有性质 P, 即 $f(11) > 5$. 再由开始所证

$f(11) \leq 6$ 可知 $f(11) = 6$.

证法 2 使用了最少的预备知识, 只用到集合的运算, 条分缕析, 自然流畅, 但过程冗长, 所以我们希望得到一个精炼却不失于“初等”的解答. 经过对证法 2 的分析, 我们可以看到 $f(11) \leq 6$ 这步已无法压缩, 对 $f(11) > 5$ 却可以通过引入某种特殊的结构加以简化.

定义 1 如果 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 的子集族 $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 中的元素满足 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m$, 并且满足以下两个关系式:

$$(1) |A_{i+1}| = |A_i| + 1, i = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$(2) |A_1| + |A_m| = n.$$

则称链 F 为对称链.

对称链有如下性质:

性质 1 若 $|A_1| = 1$, 则 X 中对称链的总条数为 $n!$.

证明 设 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m$ 是一条对称链. 若 $|A_1| = 1$, 则由定义 1 中 (1), (2) 可知

$$|A_2| = 2, |A_3| = 3, \dots, |A_m| = n-1$$

若 A_1 选 $\{i\} (1 \leq i \leq n)$, 可有 n 种选法, 注意到 $A_2 \supset A_1$, 则 A_2 为 $\{i, j\}$ 型, $i \neq j$, j 有 $n-1$ 种选法, 依此类推, 这种链的条数为

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

性质 2 若 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m$ 是 X 中的一条对称链, 那么 $\bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \dots \supset \bar{A}_m$ 也是 X 中的一条对称链.

证明 由 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m$ 是 X 中的一条链可知 $\bar{A}_m \subset \bar{A}_{m-1} \subset \dots \subset \bar{A}_2 \subset \bar{A}_1$ 也是 X 中的一条链. 另外

斯潘纳尔引理

$$\begin{aligned} |\bar{A}_i| &= |X - A_i| = |X| - |A_i| \\ |\bar{A}_{i+1}| &= |X - A_{i+1}| = |X| - |A_{i+1}| \\ &= |X| - |A_i| - 1 \end{aligned}$$

所以 $|\bar{A}_i| = |\bar{A}_{i+1}| + 1$

且

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1| + |\bar{A}_m| &= |X - A_1| + |X - A_m| \\ &= 2|X| - (|A_1| + |A_m|) \\ &= 2n - n = n \end{aligned}$$

故由定义 1 知, $\bar{A}_m \subset \bar{A}_{m-1} \subset \cdots \subset \bar{A}_2 \subset \bar{A}_1$ 也是 X 中的一条对称链.

性质 3 $|A_1| = 1$ 和 $|A_{n-1}| = n - 1$ 包含在 $(n - 1)!$ 条对称链中.

证明 因为 $|A_1| = 1$, 不妨设 $A_1 = \{1\}$, 则以 A_1 打头 (即 $A_1 \subset \cdots \subset A_m$ 型) 的每条链都包含 1, 故 $H = \{A_2 - \{1\}, A_3 - \{1\}, \cdots, A_{n-1} - \{1\}\}$ 是一条长为 $n - 2$ 的对称链. 由性质 1 知 H 的种数为 $(n - 1)!$.

同理可证, 满足 $|A_{n-1}| = n - 1$ 的对称链有 $(n - 1)!$ 种. 证毕.

用以上性质 1 及性质 3 我们可有如下证法:

证法 3 $f(11) \leq 6$ 的证法同证法 2. 以下证明 $f(11) > 5$. 因为每个剧团标号是一个子集 $A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 并且显然 $1 \leq |A| \leq 4$. 定义一条对称链 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4$, 其中 $|A_i| = i, 1 \leq i \leq 4$. 由性质 1 可知这种链的总条数为 120. 由性质 3 知每个满足 $|A_i| = 1$ 或 4 的子集出现在 $(5 - 1)! = 24$ (条) 链中, 而每个满足 $|A_i| = 2, 3$ 的子集出现在 $2 \times 3 \times 2 = 12$ (条) 链中 (例如 A_2 含有两数, 则 A_1 含有这两数之一, A_3 含有其余三数之一, A_4 含有其余二数之一). 由于共有

11 个剧团, 每个剧团的标号在 120 条链中出现 24 次或 12 次, 所以 11 个标号总共至少出现 $11 \times 12 = 132$ (次). 根据抽屉原则, 至少有两个标号(记为 A 和 B) 出现在同一条链中, 但这与 A, B 属于 Sperner 族矛盾.

利用对称链的方法我们还可以给出 Sperner 引理的一个新证明.

定义 2 如果 $F_1, F_2, \dots, F_m$ 是 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 的 m 条对称链, 且对于每个 $A \subset X$:

(1) 存在一个 $i, 1 \leq i \leq m$, 使得 $A \in F_i$;

(2) 不存在 $i, j, 1 \leq i \neq j \leq m$, 使得 $A \in F_i \cap F_j$, 则称 $F_1, F_2, \dots, F_m$ 为 m 条互不相交的对称链.

对不相交对称链的条数, 我们有如下定理:

定理 1 设 $F_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 的对称链, $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$, 则 $|F| = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

证明 对 n 用数学归纳法:

(1) 当 $n=1$ 时, 结论显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时结论成立, 即 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的全体子集可以分拆为 $C_{n-1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ 条互不相交的对称链.

(3) 设 $F_j = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ 为其中任一条

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_t \quad (1)$$

考察链

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_t \subset A_t \cup \{n\} \quad (2)$$

与

$$A_1 \cup \{n\} \subset A_2 \cup \{n\} \subset \dots \subset A_{t-1} \cup \{n\} \quad (3)$$

显然 (2), (3) 都是 X 的对称链, 设 $A \subset X$, 则有以下两种情况:

(i) 若 $n \notin A$, 那么 n 必恰在一条形如 (1) 的链中,

从而也必在一条形如 ② 的链中,但它一定不在形如 ③ 的链中.

(ii) 若 $n \in A$, 那么 $A - \{n\}$ 必恰在一条形如 ① 的链中; 在 $A - \{n\} = A_i$ 时, 它恰在一条形如 ② 的链中; 在 $A - \{n\} \neq A_i$ 时, 它恰在一条形如 ③ 的链中.

于是 X 的全部子集被分拆成若干条互不相交的对称链, 显然每个对称链都含有一个 $[\frac{n}{2}]$ 元子集, 所以所有不相交对称链的条数为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

我们从每条链中至多只能选出一个集合组成 S 链, 故 S 链中元素个数最多为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$, 即给出了 Sperner 引理的另一证明.

其实当链不是对称链时, 链的条数不一定恰好等于 S 族的元素个数的最大值. 一般地, 有如下定理:

Dilworth 定理 集族 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, $F = \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$ 是 A 中的 q 条不相交链, 若 $A = \bigcup_{i=1}^q F_i$, 则 $\min |F| = \max |\{A_i \mid A_i \in S\}|$.

即当集族 A 被分拆为不相交链时, 所需用的最少条数为 A 中元素个数最多的 S 族的元素个数.

在 1977 年前苏联大学生数学竞赛试题中也出现过 Sperner 引理的特例:

例 1 由 10 名大学生按照下列条件组织运动队:

- (1) 每个人可以同时报名参加几个运动队;
- (2) 任一运动队不能完全包含在另一个队中或者与其他队重合(但允许部分地重合).

在此两个条件下, 最多可能组织多少个队? 各队包含多少人?

解 设 $M \triangleq \{\text{满足条件 (1), (2), 且所含队数最多的运动队的集合}\}$, 则

$$\begin{aligned} M_i &\in M, |M_i| = i \\ r &= \min\{i \mid M_i \neq \emptyset\} \\ s &= \max\{i \mid M_i \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

(1) 如果 $s > 5$, 设 $N \triangleq \{M_s \mid \text{去掉一名运动员所得到的一切可能的运动队}\}$, 则 $|N| = s - 1$, 故对任意的 $A \in M_s$, 都存在 $B_j \in N, 1 \leq j \leq s$, 使得 $B_j \subseteq A, 1 \leq j \leq s$ (B_j 是由 A 去掉 s 个人之中一个所得到的); 而对每个 $B \in N$, 则存在不多于 $11 - s$ 个

$$A_j, 1 \leq j \leq 11 - s$$

使 $B \subseteq A_j$ (加上至多 $10 - (s - 1) = 11 - s$ (个) 不在 N 中的运动队中的人之一得到的运动队有可能不在 M_s 中), 因此 $(11 - s) |N| \geq s |M_s|$, 故

$$|N| \geq \frac{s}{11-s} |M_s| \geq \frac{6}{5} |M_s| > |M_s|$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=r}^{s-1} |M_j| + |N| &> \sum_{j=r}^{s-1} |M_j| + |M_s| \\ &= \sum_{j=r}^s |M_j| = |M| \end{aligned}$$

下面我们证明 $M_j (r \leq j \leq s - 1), N$ 都满足条件 (1), (2). 满足条件 (1) 是显然的; 再看条件 (2), 若存在 $X \in M_i$, 且 $X \in N$, 由 N 的定义知, 存在一个 $Y \in M_s$, 使得 $X \subseteq Y$, 与 M 的定义矛盾. 又注意到, 对任意 $P \in N, Q \in M_i$ 都有 $|P| \geq |Q|$, 故不能有 $P \subseteq Q$, 而这与 M 的最大性假设矛盾, 故 $s \leq 5$.

(2) 同理可证 $r \geq 5$, 从而 $r = s = 5$, 即运动队全由 5 个人组成, 由 5 个人组成的运动队有 C_{10}^5 个, 显然满