考研数学命题人士豪金系列丛书

2016

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

# 考研数学命题人历年真题精析

## （数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会　编著

北京大学　尤承业　教授　清华大学　徐　荣　教授
北京大学　刘德荫　教授　首都师范大学　童　武　教授

1 本书每章习题答案与详解 +2 篇北大、清华数学满分秘笈 +2 套原命题组成员密押试卷 +5 大考研命题人快速解题方法 +8 小时命题人数学串讲精华



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人士豪金系列丛书

2016

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

# 考研数学命题人历年真题精析

# （数学三）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐 荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童 武 教授

赠

1 本书每章习题答案与详解 + 2 篇北大、清华数学满分秘笈 + 2 套原命题组成员密押试卷 + 5 大考研命题人快速解题方法 + 8 小时命题人数学串讲精华

登录 www.buaapress.com.cn 获超多增值服务

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

## 内 容 简 介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心研究和分析，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的。

本书收录了1998—2015年考研数学三历年真题，并进行了详细的解析；精辟阐明解题思路，全面剖析考点、重点、疑点和难点。在每章后面还将1987—1997年的相关典型真题作为习题提供，以便考生进一步巩固相关知识。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家，以及一线教师共同编写而成，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，进一步把握考试的特点及命题的思路，从而从容应考，轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

**图书在版编目(CIP)数据**

2016考研数学命题人历年真题精析. 数学三 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社，2015.3

ISBN 978-7-5124-1697-0

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①全… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第030236号



**2016考研数学命题人历年真题精析(数学三)**

**全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著**

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net 邮购电话：(010)82316936

北京宏伟双华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×1 092 1/16 印张：28.5 字数：647千字

2015年4月第1版 2015年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-1697-0 定价：45.80元

# 编委会

# 前　　言

自1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，已有29载。这些历年考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，也是命题组专家智慧的结晶。而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的历年数学真题，则是广大准备考研的同学的期盼。

本书严格按照最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求和精神编写，对历年考研真题逐题给出了详细解答，并尽量做到一题多解。只要认真分析研究，了解消化和掌握历年试题，便能发现数学试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性，也可以发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢，事半功倍。

**本书包括两部分内容：**

一部分是1998—2015年的完整真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象，从总体上了解考研数学命题的基本形式和命题规律。

编者从历年真题和辅导班内部资料中，精选出重点考查且不易解决的题目。这些题目大多是研究生考试中的解答题，分值较高。编者分考点归纳习题，总结各类题型的解题思路和方法，并重点指出考生易错之处。

另一部分是试题精析。我们分章节、考点对题目归类。本部分不仅给出了详解，还在逐题解析历年考研数学试题的基础上，给每题作了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过例举具体题目，分析常犯的错误，使考生引以为戒；各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

**本书的特点：**

1. **内容全面**　汇集了1998年以来的所有真题，以便考生对历年真题有大致的了解并可研究真题。

2. **题型丰富**　本书按考点对历年真题分类，对每种题型都进行了归纳和总结，方便考生复习。

3. **解析详尽**　首先给出本题相应考点，再分析解题思路，给出详解，并尽量给出多

种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注,点出本题应注意之处。

基础复习阶段,考生可以利用第二部分内容,体会各知识点和题型的命题形式和特点。模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼和提高解题速度及准确率。如此复习,既能加深和巩固知识点,又能提高自己的解题能力。

“宝剑锋从磨砺出,梅花香自苦寒来。”成功源于努力拼搏,源于自信。

我们深信,考生仔细研读本书后,必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦!

**编者　于清华园**

# 目　　录

## 第一篇　2015 年考研数学三试题及答案与解析



## 第二篇　1998—2014 年考研数学三试题

## 第三篇　1998—2014年考研数学三试题分类解析

# 第一篇

# 2015年考研数学三试题及答案与解析

# 2015 年全国硕士研究生入学统一考试
# 数学三试题

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目的要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设$\{x_n\}$是数列，下列命题中不正确的是（　　）.

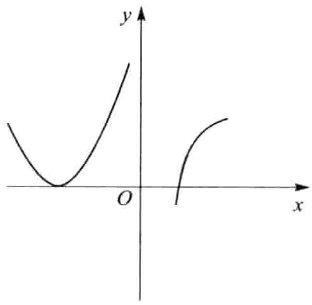
（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

（2）设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，其 2 阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示，则曲线$y=f(x)$的拐点个数为（　　）.




（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（3）设 $D\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$，函数$f(x,y)$在 $D$ 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（　　）.

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2sin\theta} (r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

（B）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2sin\theta} (r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

（C）$2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

（D）$2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

（4）下列级数中发散的是（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

（5）设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为（　　）.

（A）$a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　（B）$a\notin\Omega,d\in\Omega$

（C）$a\in\Omega,d\notin\Omega$　　（D）$a\in\Omega,d\in\Omega$

（6）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$。若$\boldsymbol{Q}=(e_1,-e_3,e_2)$，则$f=(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为（　　）.

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

（7）若$A,B$为任意两个随机事件，则有（　　）.

（A）$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$　　（B）$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$

（C）$P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　（D）$P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

（8）设总体$X\sim B(m,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots X_n$为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，则$E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$（　　）.

（A）$(m-1)n\theta(1-\theta)$　　（B）$m(n-1)\theta(1-\theta)$

（C）$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$　　（D）$mn\theta(1-\theta)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

（10）设函数$f(x)$连续，$\varphi(x)\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$，若$\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，则$f(1)=$________.

（11）若函数$z=z(x,y)$由方程$\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，则$\mathrm{d}z|_{(0,0)}=$________.

（12）设函数$y=y(x)$是微分方程$y''+y'-2y=0$的解，且在$x=0$处取得极值 3，则$y(x)=$________.

（13）设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为 3 阶单位矩阵，则行列式$|\boldsymbol{B}|=$________.

（14）设二维随机变量$(X,Y)$服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，则$P\{XY-Y<0\}=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$. 若$f(x)$与$g(x)$在$x\to0$是等价无穷小，求$a,b,k$的值.

（16）（本题满分 10 分）计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant2,y\geqslant x^2\}$.

（17）（本题满分 10 分）为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设$Q$为该商品的需求量，$P$为价格，$MC$为边际成本，$\eta$为需求弹性（$\eta>0$）.

（Ⅰ）证明定价模型为 $P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

（Ⅱ）若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由（Ⅰ）中的定价模型确定此商品的价格.

(18)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在定义域 $I$ 上的导数大于零，若对任意的 $X_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 $x$ 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

(19)（本题满分 10 分）（Ⅰ）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（Ⅱ）设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

(20)（本题满分 11 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

（Ⅰ）求 $a$ 的值；

（Ⅱ）若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

(21)（本题满分 11 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{bmatrix}$.

（Ⅰ）求 $a,b$ 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

(22)（本题满分 11 分）设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\0, & x\leqslant 0\end{cases}$，对 $X$ 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 $Y$ 为观测次数.

（Ⅰ）求 $Y$ 的概率分布；

（Ⅱ）求 $E(Y)$.

(23)（本题满分 11 分）设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1\\0, & 其他\end{cases}$，其中 $\theta$ 为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

（Ⅰ）求 $\theta$ 的矩估计量；

（Ⅱ）求 $\theta$ 的最大似然估计量.

# 2015 年全国硕士研究生入学统一考试
# 数学三试题答案与解析

一、选择题

1.【答案】 D

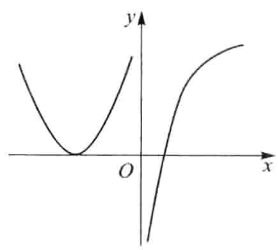
【考点提示】 数列极限与子列极限的关系.

【解题分析】 数列 $x_n \to a(n\to\infty) \Leftrightarrow$ 对任意的子列 $\{x_{n_k}\}$ 均有 $\{x_{n_k}\}\to a(k\to\infty)$，因此 A、B、C 三个选项正确；D 选项错误（D 选项缺少 $x_{3n+2}$ 的敛散性），故选 D.

2.【答案】 C

【考点提示】 函数的拐点

【解题分析】 由图像可以看出，$x>0$ 时存在一点，使二阶导数变号，因此拐点个数为2 个. 本题选 C.




3.【答案】 B

【考点提示】 二重积分的计算

【解题分析】 在极坐标系下该二重积分要分成两个积分区域：

$$D_1 = \left\{(r,\theta)\ \middle|\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}, 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta\right\},$$

$$D_2 = \left\{(r,\theta)\ \middle|\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\right\},$$

所以，

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

因此本题选 B.

4.【答案】 C

【考点提示】 无穷级数的敛散性

【解题分析】 A 为正项级数，$\lim\dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n} = \dfrac{1}{3} < 1$，由比值判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} i\,\dfrac{n}{3^n}$ 收敛；B 为正项级数，因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n^{3/2}}$，根据 $P$ 级数收敛准则，可知 $\sum\limits_{n+1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛；C 中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$，第一项为交错级数，根

据莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，第二项 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，由级数收敛定义知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ 发散；D 为正项级数，$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1$，由正项级数的比值判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛，所以本题选 C.

5.【答案】 D

【考点提示】 线性方程组求解

【解题分析】 对矩阵进行行变换，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{bmatrix},$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，所以 $a=1$ 或 $a=2$. 相应地，$d=1$ 或 $d=2$. 因此本题选 D.

6.【答案】 A

【考点提示】 二次型的标准形

【解题分析】 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，因此 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

又因为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，得 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}$，所以

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

所以 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. 本题选 A.

7.【答案】 C

【考点提示】 概论的基本性质

【解题分析】 由于 $AB\subset A, AB\subset B$，所以 $P(AB)\leqslant P(A), P(AB)\leqslant P(B)$，从而有 $P(AB)\leqslant\sqrt{P(A)\cdot P(B)}\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$，选 C.

8.【答案】 B

【考点提示】 数理统计的基本概念

【解题分析】 根据样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-X)^2$ 的性质，$E(S^2)=D(X)$，二项分布 $D(X)=m\theta(1-\theta)$，因此，$E[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-X)^2]=(n-1)E(S^2)=m(n-1)\theta(1-\theta)$，本题选 B.

## 二、填空题

9.【答案】 $-\dfrac{1}{2}$

【考点提示】 极限的性质

【解题分析】 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

10.【答案】 2

【考点提示】 复合函数求导

【解题分析】 由 $f(x)$ 连续，知 $\varphi(x)$ 可导，所以有 $\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$. 因为 $\varphi(1)=1$，即 $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1$. 又因为 $\varphi'(1)=5$，所以

$$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+2f(1)=5$$

代入数值，得 $f(1)=2$.

11.【答案】 $-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$

【考点提示】 多元函数微分法

【解题分析】 当 $x=0,y=0$ 时，代入 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$，解得 $z=0$.

对 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$，求微分，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz)&=\mathrm{e}^{x+2y+3z}\mathrm{d}(x+2y+3z)+\mathrm{d}(xyz)\\&=\mathrm{e}^{x+2y+3z}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=0.\end{aligned}$$

把 $x=0,y=0,z=0$ 代入上式，有 $\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z=0$，因此

$$\mathrm{d}z|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

12.【答案】 $\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{x}$

【考点提示】 二阶齐次线性微分方程通解结构

【解题分析】 函数 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值为 3，所以 $y(0)=3,y'(0)=0$. 解特征方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$，得 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$.

微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

把 $y(0)=3,y'(0)=0$ 代入通解，得 $C_1=2,C_2=1$.

因此，$y=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}$.

13.【答案】 21

【考点提示】 矩阵的特征值

【解题分析】 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $2,-2,1$. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值为 $3,7,1$. 所以 $|\boldsymbol{B}|=3\times 7\times 1=21$.

14.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考点提示】 多维随机变量及其概论分布

【解题分析】 由服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，得 $(X,Y)X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$，又因为 $X,Y$ 相互独立，所以有

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$

$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题

15.【考点提示】 等价无穷小

【解题分析】 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$，

因为 $\lim\limits_{x\to0}3kx^2=0$，则分子 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right)=\lim\limits_{x\to0}(1+a)=0$，$a=-1$. 于是

$$1=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+b\sin x+b(1+x)\cos x+b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x}{6kx}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}6kx=0$，所以

$$\lim_{x\to0}[1+b\sin x+2b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x]=\lim_{x\to0}(1+2b\cos x)=0.$$

求得 $b=-\dfrac{1}{2}$；把 $a,b$ 的值代入原式，则

$$1=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{2}\sin x-(1+x)\cos x-\dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{1}{2}x(1+x)\sin x}{6kx}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{-\dfrac{1}{2}\cos x-\cos x+(1+x)\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x}{6k}+\frac{\dfrac{1}{2}(1+x)\sin x+\dfrac{1}{2}x\sin x+\dfrac{1}{2}x(1+x)\cos x}{6k}\right)$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{2}}{6k}$$