LGB 理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

新编数学分析（下册）

林元重 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

LGB 理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

新编数学分析（下册）

■ 林元重 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编数学分析. 下册/林元重著 . —武汉:武汉大学出版社,2015. 3
21 世纪高等学校数学系列教材. 理工类本科生
ISBN 978-7-307-15291-5

Ⅰ. 新…　Ⅱ. 林…　Ⅲ. 数学分析—高等学校—教材　Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 036667 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@ whu. edu. cn 网址:www. wdp. com. cn)
印刷:湖北省荆州市今印印务有限公司
开本:787 × 1092　1/16　印张:16　字数:386 千字　插页:1
版次:2015 年 3 月第 1 版　2015 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-15291-5　定价:30. 00 元

21世纪高等学校数学系列教材

编　委　会

内 容 提 要

本书是为适应新时期教学与改革的需要而编写的，本书是作者长期教学实践的总结和系统研究的成果。本书的重要特色是：注意结合数学思维的特点，浅入深出，从朴素概念出发，通过揭示概念的本质属性建立了抽象概念及其理论体系。解决了抽象概念、抽象理论引入难、讲解难、理解难、掌握难的问题。全书以清新的笔调，朴实的语言，缜密的构思诠释了数学分析的丰富内涵。

全书分上、下两册。上册包括极限论、一元函数微分学、一元函数积分学。下册包括级数论、多元函数微分学、多元函数积分学。

本书可以供高等学校数学类专业使用，也可以作为理工科专业的参考用书。

——微积分是科学史上最伟大的发现，她是数学王国里的一部史诗。我们应该给她谱上美妙的“音符”。

——数学分析就像一座风光无限的泰山，而那些抽象概念和理论就是挡在通往山顶道路上的峭壁。在峭壁上修筑“栈道”是我们的责任。

——数学分析课程就好比是给数学学子定制的“校服”，校服是否“合身”，取决于它的设计——教材内容的编排是否合适。为莘莘学子量身设计完美的“款式”是我们的义务。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套 21 世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加 21 世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等 20 余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力，武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2014 年 7 月

前　言

数学分析作为数学与应用数学专业(或相近专业)的一门基础课，由于内容多、用途广、教学周期特别长，其重要地位不言而喻。

但是，基于社会发展需求的变化，生源知识基础的变化，教学方法和手段的变化，却未能促使数学分析教材的风格变化。教材的编写忽视了对数学概念、理论引入的直观性和实效性。以“抽象解释抽象”的情况时有发生，严重背离了“分析”二字，使数学分析几乎成了“抽象——抽象”的代名词。学生难学、教师难教的现象十分严重。教材成了制约教学质量和教学效果的“瓶颈”。《新编数学分析》就是在不断解开这些“瓶颈”的过程中应运而生的。

《新编数学分析》是作者长期教学实践的总结和系统研究的成果，具有以下特点：

1. 注意结合数学思维的特点，浅入深出，从朴素概念出发，通过揭示概念的本质属性建立了抽象概念及其理论体系。解决了抽象概念、抽象理论引入难、讲解难、理解难、掌握难的问题。

2. 语言表达精练、逻辑性强、层次结构清晰、图文并茂，重点突出。

3. 将生动有效的教学指导方法融入教材结构，使学生易学，教师易教。

4. 对教材结构的编排体系进行改革与创新，使之更具有条理性和完整性。

全书分上、下两册共6章。为了适应不同层次(如专科、本科)的教学需要，作者将少量难度大的内容用小号字排印，供读者选学之用。在每一章末尾还有用小字号排印的“解题补缀”，以起到解题补充、点缀之作用，同时也可以作为学生今后考研的参考。

2014年2月，国家提出了“加快构建以就业为导向的现代职业教育体系，引导地方本科高校向应用技术型高校转型，向职业教育转型”的发展思路。根据这一思路，师资和教材对于院校的转型发展是重要因素。《新编数学分析》正是顺应了这一历史性变革发展的需要，是对数学教材编排体系和思维方法的改革与创新。

《新编数学分析》承蒙我的同事刘鹏林教授和武汉大学出版社编辑李汉保先生的认真审改，纠正了一些错误和不妥之处，并提出许多宝贵的意见和建议，他们的辛勤劳动使书稿的质量有了明显的提高。武汉大学出版社王金龙先生为本书的策划出版给予了大力支持。在此向他们表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，不妥之处在所难免，恳请专家、同行批评指正。

林元重

2014年8月

目　录

第 4 章　级数论 …… 1
4.1　数项级数的基本概念及性质 …… 1
4.2　正项级数 …… 5
4.3　变号级数 …… 11
4.4　函数项级数及其一致收敛性 …… 20
4.5　一致收敛的函数项级数的性质 …… 29
4.6　幂级数及其性质 …… 34
4.7　函数的幂级数展开 …… 40
4.8　傅里叶级数 …… 45
4.9　*解题补缀 …… 58

第 5 章　多元函数微分学 …… 64
5.1　多元函数与极限 …… 64
5.2　多元连续函数 …… 72
5.3　偏导数与全微分 …… 79
5.4　复合函数微分法与方向导数 …… 89
5.5　多元函数的泰勒公式 …… 97
5.6　隐函数定理及其微分法 …… 99
5.7　多元函数偏导数的几何应用 …… 109
5.8　多元函数的极值与条件极值 …… 115
5.9　*解题补缀 …… 123

第 6 章　多元函数积分学 …… 128
6.1　二重积分 …… 128
6.2　三重积分 …… 146
6.3　*n 重积分与广义重积分 …… 159
6.4　重积分的应用 …… 164
6.5　第一型曲线积分 …… 170
6.6　第二型曲线积分 …… 174
6.7　格林公式 …… 182
6.8　第一型曲面积分 …… 189
6.9　第二型曲面积分 …… 193
6.10　高斯公式与斯托克斯公式 …… 204

6.11 含参变量的积分 …… 211
6.12 *解题补缀 …… 224

附录1 正交变换在曲线积分、曲面积分计算中的应用 …… 230

附录2 习题答案 …… 235

参考文献 …… 246

第4章 级 数 论

级数是数学分析的三大组成部分之一，是逼近理论的基础，是研究函数、进行近似计算的有力工具．级数理论的主要内容是研究级数的收敛性以及级数的应用，级数分为数项级数和函数项级数两部分内容，其中函数项级数又包括了具有重要意义的幂级数和傅里叶级数.

4.1 数项级数的基本概念及性质

4.1.1 基本概念

我们在中学课程中遇到过无穷等比数列各项之和的问题，即

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

这无穷多个数相加的情形，其实在无限小数的表示中也使用着，比如

$$\pi = 3.14159\cdots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots$$

这种无穷多个数相加的式子就是级数.

定义 4.1 给定一个数列 $\{u_n\}$，用加号把数列的项依次连接起来的式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{4-1}$$

称为数项级数(也称无穷级数，简称级数)，其中 u_n 称为级数(4-1)的通项或一般项．

数项级数(4-1)也常写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或 $\sum u_n$.

数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项之和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{4-2}$$

称为该数项级数的前 n 项部分和．

级数表示无限个数相加，其和是否存在？又怎么来求和？比如级数

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

如果把它写成

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

其结果无疑是 0，但如果写成

$$1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \cdots$$

其结果则是 1，两个结果完全不同．可见，我们对有限个数之和的认识是不能直接移植到“级数”上来，需要建立级数自身的理论.

类似于中学课程中关于无穷等比数列的求和过程，我们有下面的定义：

定义4.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S，则称该级数收敛，并称 S 为其和，记为 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = S$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 如果 $\{S_n\}$ 发散，则称该级数发散.

例如，等比级数(也称几何级数)

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

当 $|q| < 1$ 时收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$；当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

例4.1 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

解 (1) 级数的前 n 项部分和数列为

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ \cdots,\ S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0,\ \cdots$$

显然 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，因此该级数发散.

(2) 级数的前 n 项部分和数列的一般项为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1\ (n \to \infty)$$

因此该级数收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(3) 级数的前 n 项部分和数列的一般项为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1) \to +\infty\ (n \to \infty)$$

因此该级数发散，并有 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

4.1.2 基本性质

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性是通过其部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性来定义的，因此根据数列的柯西收敛准则即可得到级数收敛的柯西准则.

定理4.1(柯西准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，使得当 $n > N$ 时，对一切正整数 p，都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon \tag{4-3}$$

推论4.1(必要条件) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

例如等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 当 $|q| \geqslant 1$ 时，$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(aq^{n-1}) \neq 0$，故此时级数发散.

◎ **思考题** 按柯西准则叙述级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的充要条件．试问 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛吗？

例 4.2　考查调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性.

解　虽然 $u_n=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，但由此并不能推出该级数是收敛还是发散，考虑用柯西准则．由于

$$\begin{aligned}|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+n}|&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\\&>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{p\text{个项}}=\frac{p}{2n}\left(\text{取 } p=n\text{，有}\frac{p}{2n}=\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，则对任何正整数 N，只要取 $n>N$ 及 $p=n$，就有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|>\frac{p}{2n}=\varepsilon_0$$

因此调和级数发散.

例 4.3　考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ 的敛散性.

解　仍然考虑用柯西准则．由于

$$\begin{aligned}|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}\end{aligned}$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛．

根据级数的定义以及收敛数列的性质容易推得级数的以下线性运算性质.

性质 4.1(线性性质)　如果级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛，c，d 为两个任意常数，则级数 $\sum(cu_n\pm dv_n)$ 也收敛，且

$$\sum(cu_n\pm dv_n)=c\sum u_n\pm d\sum v_n \tag{4-4}$$

由柯西准则容易推知下面性质.

性质 4.2　去掉、增加或改变级数的有限个项，不改变级数的敛散性．

由性质 4.2 知道，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，其和为 S，则级数

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots \tag{4-5}$$

也收敛，其和 $R_n = S - S_n$，级数 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项.

性质 4.3(结合律) 在收敛级数的和式中任意添加括号，不改变其敛散性及其和的值.

证 设收敛级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = S$，加括号后成为

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$$

将上式记为 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$，其中 $v_k = u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \cdots + u_{n_k}$.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 的部分和数列为原级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子列：$S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}, \cdots$，于是 $\{S_{n_k}\}$ 也存在极限且为 S，因此级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛，其和等于 S.

◎ **思考题** 发散级数加括号后，所得级数一定发散吗$\left(\text{考查} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \text{加括号后的变化}\right)$？级数的部分和 $\sum_{k=1}^{n} u_k$ 与函数的积分和 $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ 之间有何区别？

习 题 4.1

1. 研究下列级数的收敛性并求收敛级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$；

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$； (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 是发散还是收敛？

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆收敛，且 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆发散，且 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，试问 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 是否也发散.

4. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，证明：

(1)级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 发散； (2)若 $a_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ 收敛；

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 收敛，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

6. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$.

7. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且对一切 n 有 $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$，证明 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

4.2 正项级数

在级数理论中，正项级数是非常重要的一种，对一般级数的研究有时可以通过对正项级数的研究来获得结果．就像非负函数广义积分和一般广义积分的关系一样.

所谓正项级数是这样一类级数：级数的每一项都是非负的．由于正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 为递增数列，根据单调有界定理便得以下定理.

定理 4.2 正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：其部分和数列 $\{S_n\}$ 为有界数列.

4.2.1 比较判别法

研究级数，首要的是研究其敛散性，其次才考虑求级数的和或和的近似值.

根据定理 4.2 即可推得下面的比较判别定理.

定理 4.3(比较判别法) 设 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都为正项级数，若存在正整数 N，使得

$$u_n \leqslant v_n (n = N, N+1, \cdots) \tag{4-6}$$

则当 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；当 $\sum u_n$ 发散时，$\sum v_n$ 也发散.

证 设两级数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 的部分和数列分别为 $\{S_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$，由于改变级数的有限个项不改变级数的敛散性，因此不妨设不等式(4-6)对一切正整数都成立，则对一切正整数 n，也都有

$$S_n \leqslant \sigma_n$$

若 $\sum v_n$ 收敛 $\Rightarrow \{\sigma_n\}$ 有界，从而 $\{S_n\}$ 有界 $\Rightarrow \sum u_n$ 收敛（定理 4.2）.

结论的后半部分是前半部分的逆否命题，自然成立.

例 4.4 将级数 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ 与调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 相比较，便知 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是发散的.

例 4.5 讨论正项级数 $\sum \frac{1}{1+a^n}(a>0)$ 的敛散性.

解 当 $0 < a \leqslant 1$ 时，对一切 n 都有 $\frac{1}{1+a^n} \geqslant \frac{1}{2}$，因此级数发散．当 $a > 1$ 时，对一切 n 都有 $\frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$，而 $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$ 为收敛的等比数列，因此级数 $\sum \frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

推论 4.2(比较判别法的极限形式) 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都为正项级数，如果存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l \tag{4-7}$$

则有：

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，$\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 具有相同的敛散性；

(2) 当 $l=0$ 时，由 $\sum v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 收敛，或由 $\sum u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum v_n$ 发散；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，由 $\sum v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum u_n$ 发散，或由 $\sum u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum v_n$ 收敛.

证 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(0<l<+\infty)$ 知，对于 $\varepsilon=\frac{l}{2}$，存在 N，使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\frac{l}{2}，\text{ 即有 }\quad \frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3l}{2}v_n$$

于是根据定理4.3知，级数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 具有相同的敛散性.

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，则对于 $\varepsilon=1$，存在 N，使得当 $n>N$ 时有

$$\frac{u_n}{v_n}<1，\text{ 即有 }\quad u_n<v_n$$

根据定理4.3知，由 $\sum v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 收敛，或由 $\sum u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum v_n$ 发散.

(3) 当 $l=+\infty$ 时，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$，于是根据(2)便证得(3)的结论.

例4.6 讨论下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{2n-1}{n^3+3n}$； (2) $\sum \sin\frac{\pi}{n}$； (3) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

解 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n^3+3n}\Big/\frac{1}{n^2}\right)=2$，又 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛(例4.3)，故 $\sum\frac{2n-1}{n^3+3n}$ 收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\Big/\frac{1}{n}\right)=\pi$，又 $\sum\frac{1}{n}$ 发散(例4.3)，故 $\sum\sin\frac{\pi}{n}$ 发散.

(3) 由于 $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$，故知 $\sum\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

4.2.2 积分判别法

对于某些通项为递减数列的正项级数，通过积分判别法，可以把这类级数与非负函数的无穷积分等同起来，并由此来判断其敛散性.

定理4.4(积分判别法) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 内非负递减，取正整数 $n_0>a+1$，则级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}f(n)$ 与无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性.

证 因为函数 $f(x)$ 非负递减，所以对一切 $k\geqslant n_0$，$\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x$ 都存在，且有

$$\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)\leqslant\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x$$