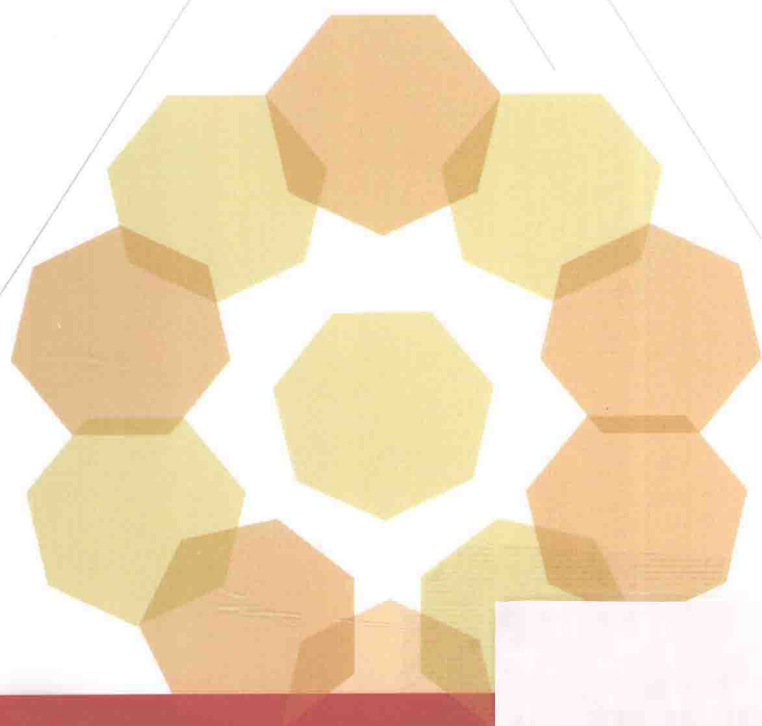


華信
經管
创优系列·管理科学与工程



管理运筹学

Managerial Operations Research

江文奇 编著

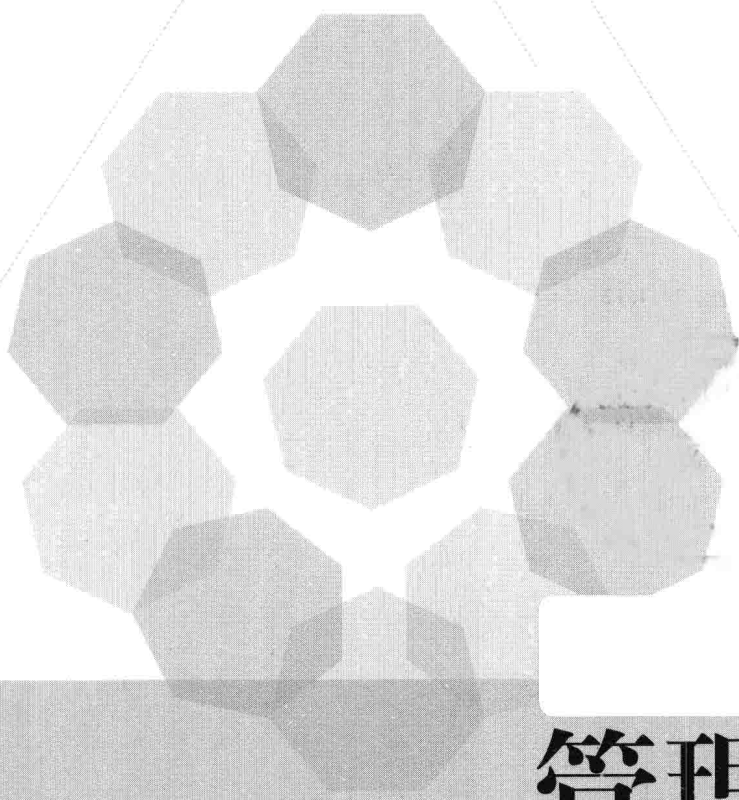


電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>



创优系列·管理科学与工程



管理运筹学

Managerial Operations Research

江文奇 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是南京理工大学课程建设成果,为管理类专业本科生量身定制,以提高学生应用运筹学知识解决实际问题的能力为目的,将管理背景与运筹学知识点有机结合,删减了数学推导内容,增加了贴近管理实践的实用案例。本书通过案例导入的方式,以应用为主线,构建了全书的逻辑框架和知识体系,内容主要包括线性规划、灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、动态规划、图论、存储论、对策论和排队论,并基于LINGO软件编写了相关实验指导,每章后配有练习题。本书提供课件、练习题参考答案等教辅资料,读者可登录华信教育资源网 www.hxedu.com.cn 注册下载。

本书可作为管理学相关专业本科生和研究生的教材,也可供从事相关管理工作的工程人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学/江文奇编著. —北京:电子工业出版社,2014.12

(华信经管创优系列)

ISBN 978-7-121-24923-5

I. ①管… II. ①江… III. ①管理学—运筹学—高等学校—教材 IV. ①C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 274686 号

策划编辑:秦淑灵

责任编辑:苏颖杰

印 刷:三河市鑫金马印装有限公司

装 订:三河市鑫金马印装有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:18.25 字数:464 千字

版 次:2014 年 12 月第 1 版

印 次:2014 年 12 月第 1 次印刷

印 数:3000 册 定价:39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

运筹学是研究优化问题的一门学科。近年来,有关运筹学的教材很多,但是有关运筹学在管理领域应用的教材偏少。根据我多年来的教学体会和项目应用,认为有必要将运筹学的知识体系与管理实践有机结合起来,并侧重于问题的分析和模型设计,弱化理论过程的推导及验证。为此,我开始搜索管理案例,筹划编写本书。

本书内容分为11章,包括了管理专业学生所运用的必要知识点,分别是绪论、线性规划和单纯形法、对偶理论和灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、动态规划、图与网络分析、存储论、对策论和排队论。

本书的主要特色体现在:

(1)将运筹学的知识点与管理实践有机结合。重视管理运用,注重用实际案例来诠释运筹学的相关理论应用。

(2)弱化理论推导。很多管理专业的学生对理论验证缺乏兴趣,而更关心运筹学的知识架构究竟有助于解决何类管理问题。本书将理论推导过程作为附录,仅供学生参考和借鉴。

(3)体现知识的连贯性和连续性。运筹学的一些知识点具有连贯性,某些知识点也独自成章。兼顾上述特征,本书的章节安排突出了线性规划模型及其应用,而将其他类型的理论体系置于其后。

(4)重视软件应用。目前计算运筹学模型的软件很多,本书介绍了两种较为简单的软件,即Excel和LINGO软件,并结合案例详细介绍了应用步骤,可以帮助读者更好地运用运筹学模型解决实践问题。

本书编写过程中,研究生沈平康和丁健美完成了案例的收集和整理的主要工作,研究生尚优完成了公式的编辑和排版工作,付出了大量的心血和劳动。电子工业出版社的秦淑灵女士为本书的出版提出了诸多创造性的建议,在此一并感谢。

本书在编写过程中力求深入浅出,运用案例导入的方式,以激发读者的阅读和学习兴趣,通俗易懂;对一些较难的知识点进行了较为详细的诠释,重点突出一些容易忽略和出错的环节,力求使读者能够全面深入地掌握运筹学的基本思想和理论。

由于作者水平有限,书中难免存在一些错误,敬请读者批评指正。

江文奇

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 运筹学概述	2
1.1.1 运筹学的发展历程	2
1.1.2 运筹学的研究对象	2
1.2 运筹学应用	3
1.2.1 运筹学的工作步骤	3
1.2.2 运筹学的管理应用	3
第 2 章 线性规划和单纯形法	5
线性规划问题的例子	6
2.1 线性规划问题及其数学模型	6
2.1.1 线性规划问题的提出	6
2.1.2 线性规划模型的标准化的	8
2.1.3 线性规划模型的图解法	10
2.1.4 线性规划模型解的概念	11
2.2 单纯形法	12
2.2.1 初始基可行解的确定	13
2.2.2 最优性检验与解的判别	13
2.2.3 基变换	14
2.2.4 迭代(旋转运算)	16
2.2.5 单纯形法求解	18
2.3 表格单纯形法	19
2.3.1 单纯形表设计	19
2.3.2 表格单纯形法计算步骤	20
2.3.3 人工变量法	22
2.3.4 退化	25
2.4 线性规划模型的应用及软件求解	25
2.4.1 线性规划问题应用	26
2.4.2 线性规划模型的软件求解	32
本章要点	43
关键公式	43
案例解析	44
练习题	49
第 3 章 对偶理论和灵敏度分析	51
对偶理论和灵敏度分析的例子	52

3.1	改进单纯形法	52
3.1.1	线性规划模型矩阵形式	53
3.1.2	改进单纯形法步骤	54
3.2	对偶问题	56
3.2.1	对偶问题的提出	57
3.2.2	原问题与对偶问题关系	58
3.2.3	对偶问题的性质	61
3.2.4	对偶问题的经济解释	63
3.2.5	对偶单纯形法	64
3.3	灵敏度分析	68
3.3.1	价值系数的灵敏度分析	68
3.3.2	资源的灵敏度分析	70
3.3.3	技术系数的灵敏度分析	71
3.3.4	参数规划	72
	本章要点	75
	关键公式	76
	案例解析	76
	练习题	83
第4章	运输问题	86
	运输问题的例子	87
4.1	运输问题的类型	88
4.1.1	产销平衡的运输问题	88
4.1.2	产销不平衡的运输问题	89
4.1.3	有转运的运输问题	91
4.2	运输问题的表上作业法	92
4.2.1	确定初始基可行解	92
4.2.2	最优解的判别	97
4.2.3	迭代	99
4.3	运输问题应用及软件求解	100
4.3.1	运输问题的应用	100
4.3.2	运输问题的软件求解	102
	本章要点	109
	关键公式	109
	案例解析	109
	练习题	111
第5章	目标规划	114
	目标规划问题的案例	115
5.1	目标规划建模	115
5.1.1	目标规划的概念	115
5.1.2	目标规划的应用	118
5.2	目标规划求解及灵敏度分析	123

5.2.1	目标规划的图解法	123
5.2.2	目标规划的单纯形法	125
5.2.3	目标规划的灵敏度分析	126
本章要点		128
关键公式		128
案例解析		128
练习题		140
第6章	整数规划	142
整数规划问题的例子		143
6.1	整数规划问题的求解	143
6.1.1	分枝定界法	143
6.1.2	割平面法	146
6.2	整数规划问题的应用	147
6.2.1	0-1 规划问题	147
6.2.2	指派问题	152
本章要点		155
关键公式		155
案例解析		155
练习题		156
第7章	动态规划	158
动态规划引例		159
7.1	动态规划概述	159
7.1.1	动态规划的概念	159
7.1.2	动态规划求解的基本方程	161
7.1.3	逆推解法	164
7.1.4	顺推解法	165
7.1.5	终端自由的动态规划	167
7.2	动态规划的应用	168
7.2.1	资源分配问题	168
7.2.2	生产与存储问题	170
7.2.3	不确定性采购	172
7.2.4	背包问题	172
7.2.5	复合系统工作可靠性	174
7.2.6	排序问题	175
7.2.7	设备更新问题	176
7.2.8	货郎担问题	177
本章要点		178
关键公式		179
练习题		179
第8章	图与网络分析	181
图与网络分析引例		182

8.1	图和树	182
8.1.1	图的基本概念	182
8.1.2	树的基本概念	184
8.2	图论应用	186
8.2.1	最短路问题	186
8.2.2	最大网络流问题	187
8.2.3	最小费用最大网络流问题	190
8.2.4	中国邮递员问题	191
8.3	网络计划与优化	193
8.3.1	网络计划图基本术语	193
8.3.2	网络计划图的时间参数计算	195
8.3.3	网络计划图的优化	198
	本章要点	200
	关键公式	200
	案例解析	200
	练习题	215
第9章	存储论	218
	存储论引例	219
9.1	存储论概述	219
9.1.1	基本概念	219
9.1.2	存储模型	220
9.2	确定型存储模型	221
9.2.1	不允许缺货, 备货时间很短(模型1)	221
9.2.2	不允许缺货, 生产需一定时间(模型2)	222
9.2.3	允许缺货, 备货时间很短(模型3)	223
9.2.4	允许缺货(需补足缺货), 生产需一定时间(模型4)	224
9.2.5	价格有折扣的存储问题	226
9.3	随机型存储模型	227
9.3.1	需求是随机离散的(模型5)	227
9.3.2	需求是连续的随机变量(模型6)	228
9.3.3	(s, S) 型存储策略(模型7)	230
	本章要点	233
	关键公式	233
	练习题	233
第10章	对策论	235
	对策论引例	236
10.1	对策论概述	236
10.1.1	对策行为的三要素	236
10.1.2	矩阵对策概述	238
10.1.3	矩阵对策的混合策略	239
10.1.4	矩阵对策的性质	240

10.2	矩阵对策的解法	242
10.2.1	公式法	242
10.2.2	图解法	243
10.2.3	线性方程组方法	244
10.2.4	线性规划方法	244
10.3	其他对策	246
10.3.1	二人无限零和对策	246
10.3.2	多人非合作对策	247
	本章要点	247
	关键公式	248
	练习题	248
第 11 章	排队论	249
	排队问题的例子	250
11.1	排队论概述	251
11.1.1	基本概念	251
11.1.2	主要指标	254
11.2	单服务台负指数分布排队模型	257
11.2.1	$M/M/1$ 模型	257
11.2.2	$M/M/1/N$ 模型	259
11.2.3	$M/M/1/\infty/m$ 模型	260
11.3	多服务台负指数分布排队模型	262
11.3.1	$M/M/c$ 模型	262
11.3.2	$M/M/c/N$ 模型	264
11.3.3	$M/M/c/\infty/m$ 模型	265
11.4	一般服务时间模型	267
11.4.1	Pollaczek-Kbintchine (P-K) 公式	267
11.4.2	定长服务时间模型	267
11.4.3	爱尔兰服务模型	268
	本章要点	268
	关键公式	269
	案例解析	269
	练习题	270
附录		272
附录 A		272
附录 B		274
附录 C		275
附录 D		277
参考文献		280

第 1 章 绪 论

本章概要

1.1 运筹学概述

1.1.1 运筹学的发展历程

1.1.2 运筹学的研究对象

1.2 运筹学应用

1.2.1 运筹学的工作步骤

1.2.2 运筹学的管理应用

学习目标 学完本章后，你将能够：

1. 了解有关运筹学的主要发展历程。
2. 理解运筹学的主要工作过程。
3. 了解运筹学在管理实践领域的应用。

1.1 运筹学概述

运筹学是一种定量分析的工具和方法。了解运筹学的发展历程和性质特征,将有助于更好地掌握运筹学的核心思想,进而将运筹学的思想应用到管理实践中。

1.1.1 运筹学的发展历程

20世纪30年代末,英国和美国为了对付德国的空袭,开始研究如何合理运用雷达问题,称为“运用研究”(operational research)或运筹学研究。为此,在英国和美国军队中成立了一些专门小组,开展了护航舰队保护商船队的编队问题研究,以及当船队遭受德国潜艇攻击时,如何使船队损失最少的问题研究。同时,他们也研究了反潜深水炸弹的合理爆炸深度,使德国潜艇被摧毁数增加到400%。同时,针对船只受敌机攻击的问题,提出了大船应急转向和小船应缓慢转向的逃避方法,取得了显著成效。

第二次世界大战后,英国和美国军队中相继成立了运筹研究组织,以兰德公司为首的一些组织开始着重研究战略性问题、未来的武器系统的设计等。

20世纪60年代,运筹学除了在军事方面应用以外,在工业、农业、经济和社会等各领域都有应用。同时,运筹学的学科体系也逐渐完善,如数学规划(线性规划、非线性规则、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等)、图论与网络、排队论(随机服务系统理论)、存储论、对策论、决策论、维修更新理论、可靠性和质量管理等。

这些理论并不是同一时间形成的。例如,排队论是丹麦工程师爱尔朗1917年在哥本哈根电话公司研究电话通信系统时提出的;存储论是在20世纪20年代初提出的;线性规划是由丹捷格在1947年制定美国空军军事规划时提出的,并给出了求解线性规划问题的单纯形法。

最早建立运筹学会的国家是英国(1948年),接着是美国(1952年)、法国(1956年)、日本、印度(1957年)等,我国是在1980年建立运筹学会的。到2005年为止,国际上已有48个国家和地区建立了运筹学会或类似的组织。1959年,英、美、法三国运筹学会发起成立了国际运筹学联合会(IFORS);1975年,欧洲运筹学协会(EURO)成立;1985年,亚太运筹学协会(APORS)成立。

运筹学的快速发展与数学和计算技术的发展密不可分。其中,数学可以为运筹学的相关模型提供求解算法,而计算技术可以解决复杂大规模的运筹学模型,间接提高了运筹学模型的现实适用性。

1.1.2 运筹学的研究对象

运筹学是一门应用性很强的学科,至今仍然没有一个完全确切的定义。总体说来,运筹学是运用科学的方法(如分析、试验、量化等)来决定如何最佳地运营和设计各种系统的一门学科,通过对经济管理系统中的人力、物力、财力等资源进行统筹安排,为决策者提供有依据的最优方案,以实现最有效的管理。其决策目标主要是最优和最佳,要求避开最劣的方案。

英国运筹学会认为运筹学是一系列科学方法的应用,通过科学地建立系统模型,包括度量各种因素,以此预测和比较各种决策、策略或控制的结果,使管理机构科学地确定它的政策及行动。

美国运筹学会认为运筹学是在对有限的资源进行分配的情况下,做出人机系统最优设计和操作的科学决策。

无论何种定义,均认为运筹学是提供以数量化为基础的科学方法,可以为决策者选择最优决策提供定量数据。决策者可以对有关活动中错综复杂的问题进行数量分析,并归纳为一定的模型,运用运筹学的原理和方法提出解决问题的最优途径和方案。

在现实世界中,模型可以划分为三种,即形象模型、模拟模型和数学模型。数学模型是应用最多的模型。构建模型常常需要对现实的问题进行抽象并凝练,分析常量假定变量,按照一定的规则加以设计,而模型的解也将有助于指导实践。

在数学模型中,目标的评价准则一般要求达到最佳(最大或最小)、适中、满意等。准则可以是单一的,也可以是多个的。约束条件可以没有,也可有多个。当模型中没有随机因素时,称为确定性模型,否则为随机模型。随机模型的评价准则可用期望值,也可用方差,还可用某种概率分布来表示。当可控变量只取离散值时,称为离散模型,否则成为连续模型。

模型可以按用途来命名,如分配模型、运输模型、更新模型、排队模型、存储模型等;还可以用研究对象来命名,如能源模型、教育模型、军事对策模型、宏观经济模型等。

1.2 运筹学应用

运筹学能够发挥作用主要体现在应用领域。目前,运筹学的相关理论和方法已经应用到实践中,也取得了较好的成效。

1.2.1 运筹学的工作步骤

运筹学在解决大量实际问题过程中形成了自己的工作步骤,可以描述为:

(1)提出和刻画问题。现实问题很复杂也很抽象,常常需要将一些复杂的问题进行简单化处理。通过收集大量的资料,有效区分常量和变量。要弄清楚问题的目标、可能的约束、问题的可控变量以及有关参数。

(2)建立模型。即把问题中可控变量、参数与约束之间的关系用一定的模型表示出来。这种刻画首先需要了解模型的结构和形式,才能够有针对性地设计模型。

(3)求解。用各种手段(主要是数学方法,也可用其他方法)将模型求解,解可能是最优解、次优解、满意解。复杂模型的求解需要使用计算机,解的精度要求可由决策者提出。解的结果重在应用,能够指导实践的解才是有意义的解。

(4)解的检验。检查求解步骤和程序有无错误,然后检查是否反映现实问题。

(5)解的控制。通过控制解的变化过程,决定对解是否要做一定的改变。

(6)解的实施。将解用到实际中必须要考虑到实施的问题,如向实际部门讲清解的用法。对于结构化的问题,解的结果可以直接进行应用;对于半结构化的问题,解在应用过程中可能需要加以调整;对于非结构化的问题,数学模型可能难以解决实际问题。

要说明的是,现实中的很多数学模型较为复杂,软件求解是非常必要的。目前,有 Excel、Lingo、Lindo、Matlab 等软件可以求解运筹学的相关模型。本书中也将进行介绍。

1.2.2 运筹学的管理应用

运筹学的管理应用主要有以下方面:

(1) 市场销售。主要应用在广告预算和媒介的选择、竞争性定价、新产品开发、销售计划的制定等方面。例如美国杜邦公司就将运筹学用于研究如何做好广告工作、产品定价和新产品的引入。

(2) 生产计划。在总体计划方面主要用于总体确定生产、存储和劳动力的配合等计划,以适应波动的需求计划。线性规划和模拟方法等还可用于生产作业计划、日程表的编排等,也应用在合理下料、配料问题、物料管理等方面。

(3) 库存管理。主要应用于多种物资库存量的管理,确定某些设备的能力或容量,如停车场的大小、新增发电设备的容量大小、电子计算机的内存量、合理的水库容量等。目前,国外的新动向是将存储论与计算机的物资管理信息系统相结合。

(4) 运输问题。涉及空运、水运、公路运输、铁路运输、管道运输、厂内运输。空运涉及飞行航班和飞行机组人员服务时间安排等。公路运输除了汽车调度计划外,还有公路网的设计和分析、市内公共汽车路线的选择和行车时刻表的安排、出租汽车的调度和停车场的设立。

(5) 财政和会计。涉及预算、贷款、成本分析、定价、投资、证券管理、现金管理等,可以采用统计分析、数学规划、决策分析、盈亏点分析、价值分析等方法。

(6) 人事管理。主要包括人员的获得和需求估计、人才的开发(即进行教育和训练)、人员的分配(各种指派问题)、各类人员的合理利用问题、人才的评价以及如何测定一个人对组织和社会的贡献、工资和津贴的确定等。

(7) 设备维修、更新和可靠性、项目选择和评价。

(8) 工程的优化设计。在建筑、电子、光学、机械和化工等领域都有应用。

(9) 城市管理。各种紧急服务系统的设计和运用,如救火站、救护车、警车等分布点的设立。此外,还有城市垃圾的清扫、搬运和处理,城市供水和污水处理系统的规划等。

第2章 线性规划和单纯形法

本章概要

- 线性规划问题的例子
- 2.1 线性规划问题及其数学模型
 - 2.1.1 线性规划问题的提出
 - 2.1.2 线性规划模型的标准化的
 - 2.1.3 线性规划模型的图解法
 - 2.1.4 线性规划模型解的概念
 - 2.2 单纯形法
 - 2.2.1 初始基可行解的确定
 - 2.2.2 最优性检验与解的判别
 - 2.2.3 基变换
 - 2.2.4 迭代(旋转运算)
 - 2.2.5 单纯形法求解
 - 2.3 表格单纯形法
 - 2.3.1 单纯形表设计
 - 2.3.2 表格单纯形法计算步骤
 - 2.3.3 人工变量法
 - 2.3.4 退化
 - 2.4 线性规划模型的应用及软件求解
 - 2.4.1 线性规划模型的应用
 - 2.4.2 线性规划模型的软件求解

学习目标 学完本章后,你将能够:

1. 运用图解法求解线性规划问题,并判定解的情况。
2. 系统理解线性规划问题的几何意义。
3. 运用单纯形法求解一般线性规划问题。
4. 学会线性规划问题的建模及运用相关软件求解。

线性规划问题的例子

北方某金属罐铸造厂的主要产品有 4 种, 分别用代号 A、B、C、D 表示。近年来, 产品销售情况良好, 预测结果表明, 需求还有进一步扩大的趋势, 客户希望能有更多的不同功能的新产品问世。工厂面临进一步扩大再生产、努力开发适销对路新产品的问题。

生产 A、B、C、D 这 4 种金属罐主要经过以下 4 个阶段。

第 1 阶段是冲压: 金属板经冲压机冲压, 制造成金属罐产品所需要的零件。

第 2 阶段是成型: 在该车间里把零件制成符合规格的形状。

第 3 阶段是装配: 在装配车间, 各种成型的零件按技术要求焊接在一起成为完整金属罐。

第 4 阶段是喷漆: 将装配好的金属罐送到喷漆车间, 喷上防火的瓷漆以装饰外表。

根据工艺要求及成本核算单位产品所需的加工时间、利润以及可利用总工时如表 2-1 所示。

表 2-1 单位产品所需的加工时间、利润及可利用总工时表

工 时 / 件 工 序	产 品	A	B	C	D	可利用总工时 (min/天)
冲压		1	1	1	1	480
成型		4	8	2	5	2400
装配		4	2	5	5	2000
喷漆		6	4	8	4	3000
单产利润/元		9	6	11	8	

该厂仅有一台冲压机, 每天工作 8 h, 即共计 480 min 可供加工用。另有若干个成型中心, 装配中心、喷漆中心分属各车间, 除承担本厂生产任务外, 还承担着科研试验、新产品开发试制等工作, 因此这些生产中心每天可利用的总工时分别不超过 2400 min、2000 min 和 3000 min。

根据当前的生产条件, 工厂每天该如何安排 A、B、C、D 这 4 种产品的产量, 才能使得利润最大化?

2.1 线性规划问题及其数学模型

在生产经营管理中, 需要经常进行计划或者规划。虽然各行业的计划或规划千差万别, 但其共同点可归纳为: 在各项资源条件的限制下, 如何确定方案, 使预期的目标达到最优。即如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源, 以得到最好的经济效果。以最优的经济效果为目标函数, 以有限的各种资源为约束条件建立模型, 即为这类规划问题的数学模型。

2.1.1 线性规划问题的提出

【例 2-1】(生产计划) 某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品, 已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗, 如表 2-2 所示。

表 2-2 设备台时和原材料消耗表

	I	II	
设备	3	2	8 台时
原材料 A	2	5	16 kg
原材料 B	1	2	12 kg

每生产一件产品 I 和产品 II 分别获利 2 元和 3 元, 如何安排计划使该工厂获利最多?

【解】 设 x_1, x_2 分别表示在计划期内产品 I、II 的产量。

两种产品的产量计划制定受到两类资源的影响, 设备约束表示为 $3x_1 + 2x_2 \leq 8$, 原材料 A、B 的约束可以分别表示为 $2x_1 + 5x_2 \leq 16$ 和 $x_1 + 2x_2 \leq 12$ 。

如果用 z 表示利润, 利润的变动受到两类产品产量的影响, 而产品产量受到资源限量的影响, 故获利最大生产计划的数学模型可以表示为

$$\begin{aligned} \text{目标函数} \quad & \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{满足约束条件(s.t):} \quad & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2-1)$$

类似于【例 2-1】的优化问题属于线性规划问题。这类问题具有一些共同特征:

(1) 用一组决策变量 (x_1, \dots, x_n) 表示决策方案的取值, 而且这些决策变量在目标函数和约束条件中的幂均为 1, 具备线性特征。同时, 决策变量可以取负值、正值或未知符号值 (无约束值)。

(2) 根据资源约束, 设计线性表达式 (即约束条件), 可以用等式或不等式来表示。

(3) 目标函数是决策变量的线性函数, 一般取最大或者最小。

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划的数学模型。其一般形式为

$$\begin{aligned} \text{目标函数} \quad & \max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{满足约束条件(s.t)} \quad & \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =) b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq, =) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq, =) b_m \\ x_i \geq 0, \text{ or } \leq 0, \text{ or 无约束} (i = 1, \dots, n) \end{cases} \end{aligned} \quad (2-2)$$

$$(2-3)$$

在线性规划的数学模型中, 式(2-2)称为目标函数, 式(2-3)称为约束条件, 可以写成 subject to, 以下简称 s.t。

从模型(2-1)获知, 一个现实的管理优化问题要转化为线性规划模型, 首先需要假设变量, 进而设计目标函数和约束条件。变量的寻求主要与目标有关, 通过对目标进行分解而设计变量, 再将变量与相关常数加以组合而设计约束条件即可。

【例 2-2】 (农业投资问题) 某农场要新买一批拖拉机以完成每年三季的工作量: 春种 330 hm^2 , 夏管 130 hm^2 , 秋收 470 hm^2 。可供选择的拖拉机型号、单台投资额及工作能力如表 2-3 所示。

表 2-3 拖拉机型号、单台投资额及工作能力表

拖拉机型号	单台投资额/元	单台工作能力/ hm^2		
		春种	夏管	秋收
东方红	5000	30	17	41
丰收	4500	29	14	43
跃进	4400	32	16	42
胜利	5200	31	18	44

问配购哪几种拖拉机各几台,才能完成上述每年工作量且使总投资最少?

【解】构建本例的规划模型,需要了解总投资目标的组成部分,即四大类拖拉机。于是可以假设东方红、丰收、跃进和胜利的拖拉机台数分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 ,约束可以划分为春种、夏管和秋收的公顷数,其线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min z &= 5000x_1 + 4500x_2 + 4400x_3 + 5200x_4 \\ \text{s. t.} &\begin{cases} 30x_1 + 29x_2 + 32x_3 + 31x_4 \geq 330 \\ 17x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 18x_4 \geq 130 \\ 41x_1 + 43x_2 + 42x_3 + 44x_4 \geq 470 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \text{为整数} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-4)$$

尽管该线性规划模型与【例 2-1】的模型类似,但目标函数和约束条件均发生了改变。

实际上,线性优化模型可以划分成两大类,即最大和最小。前者表示在资源约束既定的情况下实现产出最大,而后者表示在产出固定的情况下投入最小。

2.1.2 线性规划模型的标准化的

模型(2-1)和模型(2-4)的目标函数和约束条件的符号均不同,增加了求解线性规划模型解的难度。为此,需要将各类线性规划模型转化为统一的标准形式,从而有利于设计一致的求解算法,这个过程即是线性规划模型的标准化的过程。

线性规划模型的标准化的特征主要包括:

- (1) 目标函数取最大值。
- (2) 所有约束条件为等式。
- (3) 所有变量为非负。
- (4) 所有约束条件等式的右端为非负。

在标准化的四个特征中,变量的符号对目标函数和约束条件影响最大。因此,线性规划模型的标准化的首先需要对变量标准化,才能保证目标函数和约束条件的变量均符合标准化的要求。标准化的步骤如下。

步骤 1: 对线性规划模型的变量实施标准化。

如果变量 $x_i \leq 0$,则将其转化为非负,令 $x_j = -x_i$,将规划模型中所有的 x_i 替换为 $-x_j$ 。

如果某个变量 x_i 无约束,即 x_i 符号未知,可以用两个非负的变量替代 x_i ,令 $x_i = x_k - x_{k+1}$,将规划模型中所有的 x_i 替换为 $x_k - x_{k+1}$ 。

如果某个变量本身为非负,则不用变换。

步骤 2: 判断目标函数为最大值还是最小值。

如果目标函数是最大值,则符合标准化的条件,不用变换;如果目标函数是最小值,则需要将目标函数乘以“-1”,变成最大值。

步骤 3: 分析每个约束式右端的常数的符号。

如果符号为负,则需要约束式左右两边均乘以“-1”,将右端变成非负。

步骤 4: 将所有约束式变成等式。

如果约束式的左端 \leq 右端,则需要左端加上一个非负变量(松弛变量),变成等式。

如果约束式的左端 \geq 右端,则需要左端减去一个非负变量(剩余变量),变成等式。