普通高等教育“十二五”规划教材——物理类
国家特色专业物理学教材

近代物理实验

潘正坤 杨友昌 ◎ 编著

SWJUP 西南交通大學 出版社

普通高等教育“十二五”规划教材——物理类
国家特色专业物理学教材

近代物理实验

潘正坤　杨友昌　编著

西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

本书介绍了在近代物理发展进程中有重大作用的一些著名实验，以及近代物理实验技术中有广泛应用的典型实验，总计 18 个。对物理实验的思想与方法进行了重点阐述，并注重学生实验能力的培养。

本书可作为高等学校物理类专业本科生近代物理实验教材或实验指导用书，也可作为中学物理教师实验培训的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

近代物理实验 / 潘正坤，杨友昌编著. —成都：西南交通大学出版社，2014.8

普通高等教育“十二五”规划教材. 物理类

ISBN 978-7-5643-3208-2

Ⅰ. ①近… Ⅱ. ①潘… ②杨… Ⅲ. ①物理学－实验－高等学校－教材 Ⅳ. ①041-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 161420 号

普通高等教育“十二五”规划教材——物理类

近代物理实验

潘正坤　杨友昌　编著

责任编辑	黄淑文
封面设计	严春燕
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http：//www.xnjdcbs.com
印　　刷	四川川印印刷有限公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印　　张	12.75
字　　数	317 千字
版　　次	2014 年 8 月第 1 版
印　　次	2014 年 8 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-3208-2
定　　价	29.00 元

前　言

“近代物理实验”是物理学专业学生必修的实验课程之一。该门课程涉及的知识面广、难度大，所需的实验设备比较昂贵，在一般高等院校，特别是地方高等院校开设本门课程有较大难度。因此，本书立足于物理专业学生必须掌握的近代物理实验技能技巧和一般高等院校物理专业开设该门课程的实际需求，介绍了氢原子光谱、密立根油滴实验、夫兰克-赫兹实验等18个在近代物理各重要领域发展过程中有代表性的著名实验。

书中各实验所用的仪器设备都是“近代物理实验”课程教学大纲所规定的实验设备。然而，同一个实验可能采用不同的方法来实现，本书尽量选用通用的实验方法。考虑到实验仪器的实际可操作性，本书还参考了复旦天欣提供的实验仪器说明书及相关资料。

本书在编写过程中得到了贵州各兄弟院校的大力支持，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，恳请读者批评指正。

编　者

2014年4月

目　录

误差分析与数据处理

物理实验不仅是定性观察各种自然现象，更重要的是定量测量相关物理量。而对事物进行定量描述，又离不开数学方法和对实验数据的处理。因此，误差分析和数据处理是物理实验课的基础。

一、测量与误差

对物理量进行测量，是物理实验中极其重要的一个组成部分。对某些物理量的大小进行测定，实验上就是将此物理量与规定的作为标准单位的同类量或可借以导出的异类物理量进行比较，得出结论，而这个比较的过程就叫做测量。例如，物体的质量可通过与规定用千克作为标准单位的标准砝码进行比较而得出测量结果；物体运动速度的测定则必须通过与两个不同的物理量，即长度和时间的标准单位进行比较而获得。比较的结果记录下来就叫做实验数据。测量得到的实验数据应包含测量值的大小和单位，二者缺一不可。

国际上规定了七个物理量的单位为基本单位，其他物理量的单位则是由以上基本单位按一定的计算关系式导出的。因此，除基本单位之外的其余单位均称为导出单位。如以上提到的速度以及经常遇到的力、电压、电阻等物理量的单位都是导出单位。

一个被测物理量，除了用数值和单位来表征它外，还有一个很重要的表征它的参数，这便是对测量结果可靠性的定量估计。然而这个重要参数却往往容易被人们忽视。设想如果得到一个测量结果的可靠性几乎为零，那么这种测量结果还有什么价值呢？因此，从表征被测量这个意义上来说,对测量结果可靠性的定量估计与其数值和单位至少具有同等的重要意义，三者是缺一不可的。

测量可以分为两类：按照测量结果获得的方法来分，可将测量分为直接测量和间接测量两类；而从测量条件是否相同来分，又有所谓等精度测量和不等精度测量。

直接测量就是把待测量与标准量直接比较得出结果。如用米尺测量物体的长度，用天平称量物体的质量，用电流表测量电流等，都是直接测量。间接测量借助函数关系由直接测量的结果计算出所谓的物理量。例如已知路程和时间，根据速度、时间和路程之间的关系求出速度就是间接测量。

一个物理量能否直接测量不是绝对的。随着科学技术的发展及测量仪器的改进，很多原来只能间接测量的量，现在可以直接测量了。比如电能的测量本来是间接测量，现在也可以用电度表来进行直接测量。物理量的测量，大多数是间接测量，但直接测量是一切测量的基础。

等精度测量是指在同一（相同）条件下进行的多次测量，如同一个人、用同一台仪器、每次测量时周围环境条件相同。等精度测量每次测量的可靠程度相同。反之，若每次测量时的条件不同，或测量仪器改变，或测量方法、条件改变，这样所进行的一系列测量叫做非等精度测量。非等精度测量的结果，其可靠程度自然也不相同。物理实验中大多采用等精度测量。应该指出：重复测量必须是重复进行测量的整个操作过程，而不仅仅是重复读数。

测量仪器是进行测量的必要工具。熟悉仪器性能、掌握仪器的使用方法及正确进行读数，是每个测量者必备的基础知识。下面简单介绍仪器精密度、准确度和量程等基本概念。

仪器精密度是指与仪器的最小分度相当的物理量。仪器最小的分度越小，所测量物理量的位数就越多，仪器精密度就越高。对测量读数最小一位的取值，一般来讲应在仪器最小分度范围内再进行估计读出一位数字。如具有毫米分度的米尺，其精密度为 1 mm，应该估计读出到毫米的十分位；螺旋测微器的精密度为 0.01 mm，应该估计读出到毫米的千分位。

仪器准确度是指仪器测量读数的可靠程度。它一般标在仪器上或写在仪器说明书上。如电学仪表所标示的级别就是该仪器的准确度。对于没有标明准确度的仪器，可粗略地取仪器最小的分度数值或最小分度数值的一半，一般对连续读数的仪器取最小分度数值的一半，对非连续读数的仪器取最小的分度数值。在制造仪器时，其最小的分度数值是受仪器准确度约束的，不同的仪器准确度是不一样的，测量长度的常用仪器米尺、游标卡尺和螺旋测微器，它们的仪器准确度依次提高。

量程是指仪器所能测量的物理量的最大值和最小值之差，即仪器的测量范围（有时也将所能测量的最大值称量程）。测量过程中，超过仪器量程使用仪器是不允许的，否则轻则仪器准确度降低，使用寿命缩短，重则损坏仪器。

二、误差与偏差

测量的目的就是为了得到被测物理量所具有的客观真实数据，但由于受测量方法、测量仪器、测量条件以及观测者水平等多种因素的限制，只能获得该物理量的近似值。也就是说，一个被测量值 N 与真值 N_0 之间总是存在着差值，这种差值称为测量误差，即

$$\Delta N = N - N_0$$

显然误差 ΔN 有正负之分，因为它是指测量值与真值的差值，常称为绝对误差。注意，绝对误差不是误差的绝对值！

误差存在于一切测量之中，测量与误差形影不离，分析测量过程中产生的误差，将影响降到最低程度，并对测量结果中未能消除的误差做出估计，是实验中的一项重要工作，也是实验的基本技能。实验应该根据对测量结果误差限度的一定要求来制定方案和选用仪器，而不是仪器精度越高越好。因为测量的误差是各个因素所引起的误差的总和，要以最小的代价来取得最好的结果，要合理地设计实验方案，选择仪器，确定采用这种或那种测量方法。如比较法、替代法、天平复称法等，都是为了减小测量误差；对测量公式进行这样或那样的修

正，也是为了减少某些误差的影响；在调节仪器时，如调仪器使其处于铅直、水平状态，要考虑到什么程度才能使它的偏离对实验结果造成的影响可以忽略不计；电表接入电路和选择量程都要考虑到引起误差的大小。在测量过程中，某些对结果影响大的关键量，就要努力想办法将它测准；有的测量不太准确对结果也没有什么影响，就不必花太多的时间和精力去对待。在进行处理数据时，某个数据取到多少位，怎样使用近似公式，作图时坐标比例、尺寸大小怎样选取，如何求直线的斜率等，都要考虑到引入误差的大小。

由于客观条件及人们认识的局限性，测量不可能获得待测量的真值，只能是近似值。设某个物理量真值为 x_0，进行 n 次等精度测量，测量值分别为 x_1，x_2，…，x_n（测量过程无明显的系统误差）。它们的误差为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_0$$

……

$$\Delta x_n = x_n - x_0$$

求和

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n x_0$$

即

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - x_0$$

当测量次数 $n \to \infty$ 时，可以证明 $\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}{n} \to 0$，而且 $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$ 是 x_0 的最佳估计值，称 $\bar{x}$ 为测量值的近似真实值。为了估计误差，定义测量值与近似真实值的差值为偏差：即 $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$。偏差又叫做“残差”。实验中真值得不到，因此误差也无法知道，而测量的偏差可以准确知道，实验误差分析中要经常计算这种偏差，用偏差来描述测量结果的精确程度。

三、相对误差

绝对误差与真值之比的百分数叫做相对误差，用 E 表示，即

$$E = \frac{\Delta N}{N_0} \times 100\%$$

由于真值无法知道，所以计算相对误差时常用 N 代替 N_0。在这种情况下，N 可能是公认值，或高一级精密仪器的测量值，或测量值的平均值。相对误差用来表示测量的相对精确度，相对误差用百分数表示，保留两位有效数字。

四、系统误差与随机误差

根据误差的性质和产生的原因，可分为系统误差和随机误差。

1. 系统误差

系统误差是指在一定条件下多次测量的结果总是向一个方向偏离，其数值一定或按一定规律变化。系统误差的特征是具有一定的规律性。系统误差的来源具有以下几个方面：（1）仪器误差。它是由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器而造成的误差。（2）理论误差。它是由于测量所依据的理论公式本身的近似性，或实验条件不能达到理论公式所规定的要求，或测量方法等所带来的误差。（3）观测误差。它是由于观测者本人生理或心理特点造成的误差。例如，用“落球法”测量重力加速度，由于空气阻力的影响，多次测量的结果总是偏小，这是测量方法不完善造成的误差；用停表测量运动物体通过某一段路程所需要的时间，若停表走时太快，即使测量多次，测量的时间 t 总是偏大为一个固定的数值，这是仪器不准确造成的误差；在测量过程中，若环境温度升高或降低，使测量值按一定规律变化，是由于环境因素变化引起的误差。

在任何一项实验工作和具体测量中，必须想尽一切办法，最大限度地消除或减小一切可能存在的系统误差，或者对测量结果进行修正。若有系统误差，则需要改变实验条件和实验方法，反复进行对比。系统误差的消除或减小是比较复杂的一个问题，没有固定不变的方法，要具体问题具体分析。导致系统误差的原因可能不止一个，一般应找出主要影响因素，然后有针对性地消除或减小系统误差。以下介绍几种常用的方法。

检定修正法：指将仪器、量具送计量部门检验取得修正值，以便对某一物理量测量后进行修正的一种方法。

替代法：指测量装置测定待测量后，在测量条件不变的情况下，用一个已知标准量替换被测量来减小系统误差的一种方法。如消除天平的两臂不等对测量的影响可用此办法。

异号法：指对实验时在两次测量中出现符号相反的误差，采取平均值后消除的一种方法。例如在外界磁场作用下，仪表读数会产生一个附加误差，若将仪表转动 180°再进行一次测量，外磁场将对读数产生相反的影响，引起负的附加误差。两次测量结果平均，正负误差可以抵消，从而可以减小系统误差。

2. 随机误差

在实际测量条件下，多次测量同一量时，绝对误差时大时小、时正时负，以不可预定的方式变化着，这种误差叫做随机误差，有时也叫偶然误差。当测量次数很多时，随机误差就显示出明显的规律性。实践和理论都已证明，随机误差服从一定的统计规律（正态分布），其特点是：绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大（单峰性）；绝对值相等的正负误差出现的概率相同（对称性）；绝对值很大的误差出现的概率趋于零（有界性）；误差的算术平均值随着测量次数的增加而趋于零（抵偿性）。因此，增加测量次数可以减小随机误差，但不能完全消除。

引起随机误差的原因也很多。仪器精密度和观察者感官灵敏度有关。如仪器显示数值的估计读数位偏大和偏小；仪器调节平衡时，平衡点确定不准；测量环境扰动变化以及其他不能预测不能控制的因素，如空间电磁场的干扰，电源电压波动引起测量的变化等。

由于测量者过失，如实验方法不合理、用错仪器、操作不当、读错数值或记错数据等引起的误差，是一种人为的过失误差，不属于测量误差，只要测量者采用严肃认真的态度，过失误差是可以避免的。

五、测量的精密度、准确度和精确度

测量的精密度、准确度和精确度都是评价测量结果的术语，但目前使用时其涵义并不尽一致，以下介绍较为普遍采用的意见。

测量精密度表示在同样测量条件下，对同一物理量进行多次测量，所得结果彼此间相互接近的程度，即测量结果的重复性、测量数据的弥散程度，因而测量精密度是测量偶然误差的反映。测量精密度高，偶然误差小，但系统误差的大小不明确。

测量准确度表示测量结果与真值接近的程度，因而它是系统误差的反映。测量准确度高，则测量数据的算术平均值偏离真值较小，测量的系统误差小，但数据较分散，偶然误差的大小不确定。

测量精确度则是对测量的偶然误差及系统误差的综合评定。精确度高，测量数据较集中在真值附近，测量的偶然误差及系统误差都比较小。

六、随机误差的估算

对某一测量进行多次重复测量，其测量结果服从一定的统计规律，也就是正态分布（或高斯分布）。我们用描述高斯分布的两个参量（x 和 σ）来估算随机误差。设在一组测量值中，n 次测量的值分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。

1. 算术平均值

根据最小二乘法原理可以证明，多次测量的算术平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

是待测量真值 x_0 的最佳估计值，称 $\bar{x}$ 为近似真实值，以后我们将用 $\bar{x}$ 来表示多次测量的近似真实值。

2. 标准偏差

误差理论证明，平均值的标准偏差为

$$S_x=\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}\text{（贝塞尔公式）}\tag{2}$$

其意义表示某次测量值的随机误差在 $-\sigma_x \sim +\sigma_x$ 之间的概率为 68.3%。

1）算术平均值的标准偏差

当测量次数 n 有限，其算术平均值的标准偏差为

$$\sigma_{\overline{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}}\tag{3}$$

其意义是测量平均值的随机误差在 $-\sigma_{\overline{x}} \sim +\sigma_{\overline{x}}$ 之间的概率为 68.3%。或者说，待测量的真值在 $(\overline{x}-\sigma_{\overline{x}})\sim(\overline{x}+\sigma_{\overline{x}})$ 范围内的概率为 68.3%。因此 $\sigma_{\overline{x}}$ 反映了平均值接近真值的程度。

2）标准偏差 σ_x

标准偏差 σ_x 小表示测量值密集，即测量的精密度高；标准偏差 σ_x 大表示测量值分散，即测量的精密度低。估计随机误差还可以用算术平均误差、$2\sigma_x$、$3\sigma_x$ 等其他方法来表示。

七、异常数据的剔除

剔除测量列中异常数据的标准有几种，有 $3\sigma_x$ 准则、肖维准则、格拉布斯准则等。

1. $3\sigma_x$ 准则

统计理论表明，测量值的偏差超过 $3\sigma_x$ 的概率已小于 1%。因此，可以认为偏差超过 $3\sigma_x$ 的测量值是其他因素或过失造成的，为异常数据，应当剔除。剔除的方法是根据多次测量所得的一系列数据，算出各测量值的偏差 Δx_i 和标准偏差 σ_x，把其中最大的 Δx_j 与 $3\sigma_x$ 比较，若 $\Delta x_j>3\sigma_x$，则认为第 j 个测量值是异常数据，舍去不计。剔除 x_j 后，对余下的各测量值重新计算偏差和标准偏差，并继续审查，直到各个偏差均小于 $3\sigma_x$ 为止。

2. 肖维准则

假定对一物理量重复测量了 n 次，其中某一数据在这 n 次测量中出现的几率不到半次，即小于 $\frac{1}{2n}$，则可以肯定这个数据的出现是不合理的，应当予以剔除。

根据肖维准则，应用随机误差的统计理论可以证明，在标准误差为 σ 的测量列中，若某一个测量值的偏差等于或大于误差的极限值 K_σ，则此值应当剔除。不同测量次数的误差极限值 K_σ（见表 1）。

表 1　肖维系数表

n	K_σ	n	K_σ	n	K_σ
4	1.53σ	10	1.96σ	16	2.16σ
5	1.65σ	11	2.00σ	17	2.18σ
6	1.73σ	12	2.04σ	18	2.20σ
7	1.79σ	13	2.07σ	19	2.22σ
8	1.86σ	14	2.10σ	20	2.24σ
9	1.92σ	15	2.13σ	30	2.39σ

3. 格拉布斯（Grubbs）准则

若有一组测量得出的数值，其中某次测量得出数值的偏差的绝对值$|\Delta x_i|$与该组测量列的标准偏差σ_x之比大于某一阈值$g_0(n,1-p)$，即

$$|\Delta x_i| > g_0(n, 1-p)\cdot\sigma_x$$

则认为此测量值中有异常数据，并可予以剔除。这里$g_0(n,1-p)$中的n为测量数据的个数，p为服从此分布的置信概率。一般取p为 0.95 和 0.99（在处理具体问题时，究竟取哪个值由实验者自己来决定）。表 2 中给出了$p=0.95$（即$1-p=0.05$）和$p=0.99$（即$1-p=0.01$）时，不同的n值所对应的g_0值。

表 2　$g_0(n, 1-p)$值表

n \ $1-p$	0.05	0.01	n \ $1-p$	0.05	0.01
3	1.15	1.15	17	2.48	2.78
4	1.46	1.49	18	2.50	2.82
5	1.67	1.75	19	2.53	2.85
6	1.82	1.94	20	2.56	2.88
7	1.94	2.10	21	2.58	2.91
8	2.03	2.22	22	2.60	2.94
9	2.11	2.32	23	2.62	2.96
10	2.18	2.41	24	2.64	2.99
11	2.23	2.48	25	2.66	3.01
12	2.28	2.55	30	2.74	3.10
13	2.33	2.61	35	2.81	3.18
14	2.37	2.66	40	2.87	3.24
15	2.41	2.70	45	2.91	3.29
16	2.44	2.75	50	2.96	3.34

八、测量结果的评定和不确定度

测量不但要测出待测物理量的近似真实值，而且要对近似真实值的可靠性做出评定（即指出误差范围），这就要求我们必须掌握不确定度的有关概念。下面将对不确定度的概念、分类、合成等问题进行讨论。

1. 不确定度的含义

不确定度是“误差可能数值的测量程度”，表征所得测量结果代表被测量的程度。也就是因测量误差存在而对被测量不能肯定的程度，因而是测量质量的表征，可以用不确定度对测量数据做出比较合理的评定。对一个物理实验的具体数据来说，不确定度是指测量值（近真值）附近的一个范围，测量值与真值之差（误差）可能落于其中。不确定度小，测量结果可信赖程度高；不确定度大，测量结果可信赖程度低。在实验和测量工作中，不确定度一词近似于不确知、不明确、不可靠、有质疑，是作为估计而言的。因为误差是未知的，不可能用指出误差的方法去说明可信赖程度，而只能用误差的某种可能的数值去说明可信赖程度，所以不确定度更能表示测量结果的性质和测量的质量。用不确定度评定实验结果的误差，其中包含了各种来源不同的误差对结果的影响，而它们的计算又反映了这些误差所服从的分布规律，这时更准确地表述了测量结果的可靠程度，因而有必要采用不确定度的概念。

2. 测量结果的表示和合成不确定度

在做物理实验时，要求表示出测量的最终结果。在这个结果中既要包含待测量的近似真实值 $\bar{x}$，又要包含测量结果的不确定度 σ，还要反映出物理量的单位。因此，要写成物理含意深刻的标准表达形式，即

$$x = \bar{x} \pm \sigma \text{（单位）}$$

式中，x 为待测量；$\bar{x}$ 是测量的近似真实值，σ 是合成不确定度，一般保留一位有效数字。这种表达形式反应了三个基本要素：测量值、合成不确定度和单位。

在物理实验中，直接测量时若不需要对被测量进行系统误差的修正，一般就取多次测量的算术平均值 $\bar{x}$ 作为近似真实值；若在实验中有时只需测一次或只能测一次，则该次测量值就为被测量的近似真实值。如果要求对被测量进行一定系统误差的修正，通常是将一定系统误差（即绝对值和符号都确定的可估计出的误差分量）从算术平均值 $\bar{x}$ 或一次测量值中减去，从而求得被修正后的直接测量结果的近似真实值。例如，用螺旋测微器来测量长度时，从被测量结果中减去螺旋测微器的零误差。在间接测量中，$\bar{x}$ 即为被测量的计算值。

在测量结果的标准表达式中，给出了一个范围 $(\bar{x}-\sigma) \sim (\bar{x}+\sigma)$，它表示待测量的真值在 $(\bar{x}-\sigma) \sim (\bar{x}+\sigma)$ 范围之间的概率为 68.3%，不要误认为真值一定就会落在 $(\bar{x}-\sigma) \sim (\bar{x}+\sigma)$ 之间。认为误差在 $-\sigma \sim +\sigma$ 之间是错误的。

在上述的标准式中，近似真实值、合成不确定度、单位三个要素缺一不可，否则就不能全面表达测量结果。同时，近似真实值 $\bar{x}$ 的末尾数应该与不确定度的所在位数对齐，近似真

实值 $\bar{x}$ 与不确定度 σ 的数量级、单位要相同。在开始实验时，测量结果的正确表示是一个难点，要引起重视，从开始就注意培养良好的实验习惯，才能逐步克服难点，正确书写测量结果的标准形式。

在不确定度的合成问题中，主要是从系统误差和随机误差等方面进行综合考虑的，提出了统计不确定度和非统计不确定度的概念。合成不确定度 σ 是由不确定度的两类分量（A 类和 B 类）求“方和根”计算而得。为使问题简化，本书只讨论简单情况下（即 A 类、B 类分量保持各自独立变化，互不相关）的合成不确定度。

A 类不确定度（统计不确定度）用 S_i 表示，B 类不确定度（非统计不确定度）用 σ_B 表示，则合成不确定度为

$$\sigma = \sqrt{S_i^2 + \sigma_B^2}$$

3. 合成不确定度的两类分量

物理实验中的不确定度，一般主要来源于测量方法、测量人员、环境波动、测量对象变化等。计算不确定度是将可修正的系统误差修正后，将各种来源的误差按计算方法分为两类，即用统计方法计算的不确定度（A 类）和非统计方法计算的不确定度（B 类）。

A 类统计不确定度，是指可以采用统计方法（即具有随机误差性质）计算的不确定度，如测量读数具有分散性，测量时温度波动影响等。通常认为这类统计不确定度服从正态分布规律，因此可以像计算标准偏差那样，用“贝塞尔公式”计算被测量的 A 类不确定度。A 类不确定度 S_i 为

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{n-1}}$$

式中 $i = 1, 2, 3, \cdots n$，表示测量次数。

在计算 A 类不确定度时，也可以用最大偏差法、极差法、最小二乘法等，本书只采用“贝塞尔公式法”，并且着重讨论读数分散对应的不确定度。用“贝塞尔公式”计算 A 类不确定度，可以用函数计算器直接读取，十分方便。

B 类非统计不确定度，是指用非统计方法求出或评定的不确定度，如实验室中的测量仪器不准确、量具磨损老化等。评定 B 类不确定度常用估计方法，要估计适当，需要确定分布规律，同时要参照标准，更需要估计者的实践经验、学识水平等。因此，往往是意见纷纭，争论颇多。本书对 B 类不确定度的估计同样只作简化处理。仪器不准确的程度主要用仪器误差来表示，所以因仪器不准确对应的 B 类不确定度为

$$\sigma_B = \Delta_{仪}$$

$\Delta_{仪}$ 为仪器误差或仪器的基本误差，或允许误差，或显示数值误差。一般的仪器说明书中都以某种方式注明仪器误差，由制造厂或计量检定部门给定。物理实验教学中，由实验室提供。对于单次测量的随机误差一般是以最大误差进行估计，以下分两种情况处理。

已知仪器准确度时，以其准确度作为误差大小。例如，一个量程 150 mA、准确度 0.2 级

的电流表，测某一次电流，读数为 131.2 mA，为估计其误差，则按准确度 0.2 级可算出最大绝对误差为 0.3 mA，因而该次测量的结果可写成 $I = 131.2 \pm 0.3$ mA。又如，用物理天平称量某个物体的质量，当天平平衡时砝码为 $P = 145.02$ g，让游码在天平横梁上偏离平衡位置一个刻度（相当于 0.05 g），天平指针偏过 1.8 分度，则该天平这时的灵敏度为（$1.8 \div 0.05$）分度/g，其感量为 0.03 g/分度，这就是该天平称衡物体质量时的准确度，于是测量结果可写成 $P = 145.02 \pm 0.03$ g。

未知仪器准确度时，单次测量误差的估计，应根据所用仪器的精密度、仪器灵敏度、测试者感觉器官的分辨能力以及观测时的环境条件等因素具体考虑，以使估计误差的大小尽可能符合实际情况。一般，最大读数误差，对连续读数的仪器可取仪器最小刻度值的一半，而无法进行估计的非连续读数的仪器（如数字式仪表），则取其最末位数的一个最小单位。

4. 直接测量的不确定度

在对直接测量的不确定度的合成问题中，对 A 类不确定度主要讨论在多次等精度测量条件下，读数分散对应的不确定度，并且用“贝塞尔公式”计算 A 类不确定度。对 B 类不确定度，主要讨论仪器不准确对应的不确定度，将测量结果写成标准形式。因此，实验结果的获得，应包括待测量近似真实值的确定，A、B 两类不确定度以及合成不确定度的计算。增加重复测量次数对于减小平均值的标准误差、提高测量的精密度有利。但是当次数增大时，平均值的标准误差减小渐为缓慢，当次数大于 10 时平均值的标准误差减小便不明显了。因此通常取测量次数为 5 ~ 10 为宜。下面通过两个例子加以说明。

【例 1】 采用感量为 0.1 g 的物理天平称量某物体的质量，其读数值为 35.41 g，求物体质量的测量结果。

【解】 采用物理天平称物体的质量，重复测量读数值往往相同，故一般只须进行单次测量即可。单次测量的读数即为近似真实值，$m = 35.41$ g。

物理天平的“示值误差”通常取感量的一半，并且作为仪器误差，即

$$\sigma_B = \Delta_{仪} = 0.05\ (\mathrm{g}) = \sigma$$

故测量结果为

$$m = 35.41 \pm 0.05\ (\mathrm{g})$$

在例 1 中，因为是单次测量（$n = 1$），合成不确定度 $\sigma = \sqrt{S_1^2 + \sigma_B^2}$ 中的 $S_1 = 0$，所以 $\sigma = \sigma_B$，即单次测量的合成不确定度等于非统计不确定度。但是这个结论并不表明单次测量的 σ 就小，因为 $n = 1$ ⩾时，S_x 发散。其随机分布特征是客观存在的，测量次数 n 越大，置信概率就越高，因而测量的平均值就越接近真值。

【例 2】 用螺旋测微器测量小钢球的直径，5 次的测量值分别为 d（mm）= 11.922，11.923，11.922，11.922，11.922 螺旋测微器的最小分度数值为 0.01 mm，试写出测量结果的标准式。

【解】（1）求直径 d 的算术平均值。

$$\overline{d}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{5}d_i=\frac{1}{5}(11.922+11.923+11.922+11.922+11.922)$$
$$=11.922\ (\text{mm})$$

（2）计算 B 类不确定度。

螺旋测微器的仪器误差为 $\varDelta_{仪}=0.005$（mm）

$$\sigma_{\mathrm{B}}=\varDelta_{仪}=0.005\ (\text{mm})$$

（3）计算 A 类不确定度。

$$S_d=\sqrt{\frac{\sum_{1}^{5}(d_i-\overline{d})^2}{n-1}}$$
$$=\sqrt{\frac{(11.922-11.922)^2+(11.923-11.922)^2+\cdots}{5-1}}$$
$$=0.000\,5\ (\text{mm})$$

（4）计算合成不确定度。

$$\sigma=\sqrt{S_d^2+\sigma_{\mathrm{B}}^2}=\sqrt{0.000\,5^2+0.005^2}$$

式中，由于 $0.000\,5<\frac{1}{3}\times0.005$，故可略去 S_d，于是：

$$\sigma=0.005\ (\text{mm})$$

（5）测量结果为

$$d=\overline{d}\pm\sigma=11.922\pm0.005\ (\text{mm})$$

从上例中可以看出，在计算合成不确定度中求“方和根”时，若某一平方值小于另一平方值的 $\frac{1}{9}$，则这一项就可以略去不计。这一结论叫做微小误差准则。在进行数据处理时，利用微小误差准则可减少不必要的计算。不确定度的计算结果，一般应保留一位有效数字，多余的位数按有效数字的修约原则进行取舍。

评价测量结果，有时候需要引入相对不确定度的概念。相对不确定度定义为

$$E_\sigma=\frac{\sigma}{\overline{x}}\times100\%$$

E_σ 的结果一般应取 2 位有效数字。

此外，有时候还需要将测量结果的近似真实值 $\overline{x}$ 与公认值 $x_{公}$ 进行比较，得到测量结果的百分偏差 B。百分偏差定义为

$$B=\frac{\left|\overline{x}-x_{公}\right|}{x_{公}}\times100\%$$

百分偏差其结果一般应取 2 位有效数字。

测量不确定度表达涉及深广的知识领域和误差理论问题,大大超出了本课程的教学范围。同时，有关它的概念、理论和应用规范还在不断地发展和完善。因此，我们在教学中也在进行摸索，以期在保证科学性的前提下，尽量把方法简化。

5. 间接测量结果的合成不确定度

间接测量的近似真实值和合成不确定度是由直接测量结果通过函数式计算出来的，既然直接测量有误差，那么间接测量也必有误差，这就是误差的传递。由直接测量值及其误差来计算间接测量值的误差的关系式，称为误差的传递公式。设间接测量的函数式为

$$N=F(x,y,z,\cdots)$$

N 为间接测量的量，它有 K 个直接测量的物理量 x，y，z，…，各直接测量的测量结果分别为

$$x=\bar{x}\pm\sigma_x$$

$$y=\bar{y}\pm\sigma_y$$

$$z=\bar{z}\pm\sigma_z$$

……

（1）将各个直接测量量的近似真实值 $\bar{x}$ 代入函数表达式中，即可得到间接测量的近似真实值。

$$\bar{N}=F(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots)$$

（2）求间接测量的合成不确定度。由于不确定度均为微小量，类似于数学中的微小增量，对函数式 $N=F$（x，y，z，…）求全微分，即得

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

式中 $\mathrm{d}N$，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，… 均为微小量，代表各变量的微小变化，$\mathrm{d}N$ 的变化由各自变量的变化决定，$\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z},\cdots$ 为函数对自变量的偏导数，记为 $\frac{\partial F}{\partial A_K}$。将上面全微分式中的微分符号 d 改写为不确定度符号 σ，并将微分式中的各项求“方和根”，即为间接测量的合成不确定度。

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sigma_x\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\sigma_y\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\sigma_z\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial A_K}\sigma_{AK}\right)^2} \tag{4}$$

式中，k 为直接测量量的个数，A 代表 x，y，z，…各个自变量（直接测量量）。

上式表明，间接测量的函数式确定后，测出它所包含的直接测量量的结果，将各个直接测量量的不确定度 σ_{AK} 乘以函数对各变量（直测量）的偏导数 $\left(\frac{\partial F}{\partial A_K}\sigma_{AK}\right)$，求“方和根”，即