严格依据2015年考研数学考试大纲编写

高教版
2015

全国硕士研究生招生考试
数学考试大纲解析（数学三适用）

全国考研数学大纲配套教材
专家委员会

最佳搭配：数学考试大纲解析+大纲配套1000题+冲刺模拟5套卷

登录中国教育考试在线www.eduexam.com.cn分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2015 QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG ZHAOSHENG KAOSHI
SHUXUE KAOSHI DAGANG JIEXI (SHUXUE SAN SHIYONG)

高教版
2015

全国硕士研究生招生考试
数学考试大纲解析

（数学三适用）

全国考研数学大纲配套教材
专家委员会

最佳搭配：数学考试大纲解析+大纲配套1000题+冲刺模拟5套卷

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

在数学考试命题已经规范、成熟和稳定的今天，也是该书出版的第11年，我们联合原考研数学命题和阅卷专家对《2015全国硕士研究生招生考试数学考试大纲解析（数学三适用）》进行了全新修订。这次修订更加注重本书的参考功能——通过对考试内容的详细深入讲解让考生攻克难关、学透数学；通过对大量典型例题的分析让考生对数学产生兴趣并掌握数学的经典思想和方法。

本书的每一章分为四个部分：

第一，考试内容与考试要求。这里明确指出了《考试大纲》对考生提出的要求，考生需严格按照该要求复习，不遗漏任何知识点，也不要超纲复习。

第二，考试内容解析。这里对《考试大纲》所要求的内容进行了较详细的解析。考生一定要在复习的过程中详细理解每个知识点，掌握每种方法，温故知新，熟稔于心。

第三，重点与常见考点。这里对《考试大纲》考查的重点与常见考点进行了归纳、总结。对这部分内容，考生应熟练掌握，灵活应用。

第四，常考经典题型。这部分通过大量的常考经典题型，洞悉考试命题规律、考生应对策略，其中包括考研数学的经典数学思维和方法、考生易错易混知识点的提醒等，让考生知己知彼。

图书在版编目(CIP)数据

2015全国硕士研究生招生考试数学考试大纲解析/全国考研数学大纲配套教材专家委员会编. --北京:高等教育出版社,2014.9

数学三适用

ISBN 978-7-04-040519-4

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第193349号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王 洋　版式设计 于 婕
责任校对 李大鹏　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京中科印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 19.25
字　　数 460千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2014年9月第1版
印　　次 2014年9月第1次印刷
定　　价 38.00元

物 料 号 40519-00

前　言

全国硕士研究生招生考试从测量学角度来说，它应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作应坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又符合高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上重点考查考生的分析问题和解决实际问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定。

为了进一步总结命题工作的经验，同时也是为了让社会和考生进一步了解《考试大纲》的内容和要求，增加考试的透明度，消除考生对命题的神秘感，缓解考生在考试中的焦虑心理，以有利于考生正常发挥水平，继2003年出版《数学考试参考书》以后，今年我们又组织部分多年参加大纲制订和修订的原命题专家及阅卷专家编写了这套《数学考试大纲解析》。

《数学考试大纲解析》分数学一、数学二适用和数学三适用两册出版，对考试内容和要求做了进一步地展开，并通过常考经典题型对考试中的难点和重点予以阐释，力求体现研究生数学考试试题的特点。期望能够帮助考生掌握学习中的重点和难点，提高数学水平，在考试中取得好的成绩。

本书的每一章分为四个部分：

第一，考试内容与考试要求。这里明确指出了《考试大纲》对考生提出的要求，考生需严格按照该要求复习，不遗漏任何知识点，也不要超纲复习。

第二，考试内容解析。这里对《考试大纲》所要求的内容进行了较详细的解析。考生一定要在复习的过程中详细理解每个知识点，掌握每种方法，温故知新，熟稔于心。

第三，重点与常见考点。这里对《考试大纲》考查的重点与常见考点进行了归纳、总结。对这部分内容，考生应熟练掌握，灵活应用。

第四，常考经典题型。这部分通过大量的常考经典题型，洞悉考试命题规律、考生应对策略，其中包括考研数学的经典数学思维和方法、考生易错易混知识点的提醒等，让考生知己知彼。

由于时间和经验不足，难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正。

编　者

2014年8月

目　录

第一部分　微　积　分

第二部分　线 性 代 数

第三部分 概率论与数理统计

第一部分
微　积　分

微积分学是数学三考查的内容之一，主要考查考生对微积分学的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握，以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力. 在试卷中占 56% ,84 分.

一、函数、极限、连续

微积分学的研究对象是函数，许多重要的概念需要用极限理论精确定义，因此极限是微积分学的重要基础，对后续内容的学习影响深远，应重点掌握.

近 6 年试题分数统计

年份	2009 年	2010 年	2011 年	2012 年	2013 年	2014 年
分数	12	18	22	14	22	22

考试内容与考试要求

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小量和无穷大量的概念及其关系　无穷小量的性质及无穷小量的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念.

6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

8. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

考试内容解析

1. 函数

（1）函数的概念：设 x 与 y 是两个变量，变量 x 的变域是非空数集 D，如果对 D 中任意一个 x，变量 y 按照一定的法则总有唯一的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x) \quad \text{或} \quad y=y(x),$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

（2）函数的几种特性：

① 有界性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$I\subset D$，如果存在正数 M，使得对任意 $x\in I$，都有对应的函数值满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

② 单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$I\subset D$. 如果对于 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加. 如果对于任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

③ 奇偶性：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

④ 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的常数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $x+l\in D$ 且 $f(x+l)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 l 为周期函数 $f(x)$ 的一个周期.

（3）常见函数类型：

① 反函数：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，若对任意 $y\in W$，都存在唯一的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，即有 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数，一般表示为 $y=f^{-1}(x)$.

注：1° 严格单调的函数必存在反函数；

2° 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合，但与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称；

3° $f^{-1}[f(x)]=x, f[f^{-1}(x)]=x$.

② 复合函数：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 R_φ. 若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，对于任意 $x\in D(D=\{x\mid x\in D_\varphi, u=\varphi(x)\in D_f\})$，有 $u=\varphi(x)$ 与之对应. 进而有 $y=f(u)$ 与之对应，这样通过 u 得到了以 x 为自变量，y 为因变量的函数，称为由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 构成的复合函数. 记为 $y=f[\varphi(x)]$，定义域为 D，u 为中间变量.

③ 基本初等函数与初等函数：常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算而得到的并且可以用一个数学式子来表示的函数，称为初等函数.

④ 分段函数：在自变量的不同变化范围内用不同表达式表示的函数称为分段函数. 注意，分段函数不是多个函数，其一般形式为

$$y=\begin{cases} f_1(x), & x\in I_1, \\ f_2(x), & x\in I_2, \end{cases} \quad \text{或} \quad y=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0, \\ a, & x=x_0. \end{cases}$$

常见的分段函数有绝对值函数 $y=|x|$，符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$，取整函数 $y=[f(x)]$，$y=\max\{f_1(x),f_2(x)\}$ 及 $y=\min\{f_1(x),f_2(x)\}$，等等.

⑤ 由方程所确定的隐函数：以方程 $F(x,y)=0$ 形式给出的，能够确定但没有显化出来的函数 $y=y(x)$，称为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

2. 极限

(1) 数列极限：给定数列 $\{x_n\}$，a 为常数，如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a(n\to\infty).$$

(2) 函数极限：

① 设函数 $f(x)$ 在 $x>b>0$ 上有定义，A 为一个常数，如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正数 $X(X>b)$，使得当 $x>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty).$$

② 设函数 $f(x)$ 在 $x<-b(b>0)$ 上有定义，A 为一个常数，如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正数 $X(X>b)$，使得当 $x<-X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty).$$

③ 设函数 $f(x)$ 在 $|x|>b(b>0)$ 上有定义，A 为一个常数，如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正数 $X(X>b)$，使得当 $|x|>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

④ 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义（在 x_0 点可以没有定义），A 为一个常数，如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

⑤ 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧邻域内有定义（在 x_0 点可以没有定义），A 为一个常数，如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A, \quad 或 \quad f(x_0-0)=A, \quad 或 \quad f(x_0^-)=A.$$

⑥ 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右侧邻域内有定义（在 x_0 点可以没有定义），A 为一个常数，如果

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 以 A 为极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A, \quad 或 \quad f(x_0+0)=A, \quad 或 f(x_0^+)=A.$$

(3) 极限的性质和运算法则:下面主要给出函数极限的性质和运算法则.数列极限与函数极限具有相同的性质,可类似地给出数列极限的性质.另外,自变量的几种变化趋势下极限性质也相同.因此,如无特殊情况,不再标注自变量变化趋势.

① 唯一性:若 $\lim f(x)$ 存在,则其极限值唯一.

② 有界性:若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 有界.

若 $\lim f(x)=A$,则存在 $\mathring{U}$,在 $\mathring{U}$ 内 $f(x)$ 有界(对于 $x\to x_0$,$\mathring{U}$ 表示 $0<|x-x_0|<\delta$;对于 $x\to\infty$,$\mathring{U}$ 表示 $|x|>X$).

③ 保号性:若 $\lim f(x)=A>B$,则存在 $\mathring{U}$,在 $\mathring{U}$ 内 $f(x)>B$.

推论 若存在 $\mathring{U}$,在 $\mathring{U}$ 内 $f(x)\geqslant B$,且 $\lim f(x)=A$,则 $A\geqslant B$.

④ 极限的四则运算法则:设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B; \quad \lim[f(x)g(x)]=AB; \quad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

设 $\lim f(x)$ 存在,$\lim g(x)$ 不存在,则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 不存在.

⑤ 复合函数的极限:设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0, \lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且 $\exists\delta>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,$\varphi(x)\neq u_0$,则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] \xlongequal{u=\varphi(x)} \lim_{u\to u_0} f(u)=A(称为变量代换法).$$

(4) 极限存在的两个准则、重要极限:

① 单调有界原理:若数列 $\{x_n\}$ 单调增加(或单调减少)且有上界 M(或有下界 m),则 $\{x_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant M$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant m$).

② 夹逼准则:设三个数列满足 $u_n\leqslant x_n\leqslant v_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

夹逼准则对于函数极限也成立.

③ 两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}, \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}, \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

(5) 无穷小量与无穷大量:

① 无穷小量的定义:设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义(在 x_0 点可以没有定义),如果 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量,简称无穷小.

② 无穷大量的定义:设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义(在 x_0 点可以没有定义),如果对于任意正数 M(无论它有多么大),$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量,简称无穷大.

注:数列和其他极限情况下函数的无穷小量与无穷大量可类似定义.

③ 无穷小量与极限的关系:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\quad 其中\quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

④ 无穷小量与无穷大量的关系:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0;\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=0,且\ f(x)\neq 0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty.$$

⑤ 无穷小量和无穷大量的运算性质:

1° 有限个无穷小量的和、差、积也是无穷小量.

2° 无穷小量与有界函数的积是无穷小量.

3° 设 $\lim f(x)=+\infty,\lim g(x)=+\infty$,则 $\lim[f(x)+g(x)]=+\infty$.

设 $\lim f(x)=-\infty,\lim g(x)=-\infty$,则 $\lim[f(x)+g(x)]=-\infty$.

⑥ 无穷小量的比较:

1° 无穷小量的比较:设 $\lim\alpha=\lim\beta=0$,且 $\alpha\neq 0$.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,称 β 是比 α 高阶的无穷小量(或 α 是比 β 低阶的无穷小量),记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,称 β 与 α 是同阶无穷小量;当 $c=1$ 时,称 β 与 α 是等价无穷小量,记作 $\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0(k>0)$,称 β 是 α 的 k 阶无穷小量.

2° 重要的等价无穷小量:当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \arcsin x\sim x,$$
$$\arctan x\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1),\quad e^x-1\sim x,$$
$$\ln(1+x)\sim x,\quad (1+x)^m-1\sim mx.$$

3° 求积、商的极限时利用等价无穷小代换:设在同一极限过程中 $\alpha(x)\sim\alpha'(x),\beta(x)\sim\beta'(x)$ 且 $\lim\left[\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}f(x)\right]$ 存在(或为 ∞),则

$$\lim\left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}f(x)\right]=\lim\left[\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}f(x)\right].$$

⑦ 洛必达法则:

1° $\left(\frac{0}{0}型\right)$ 设(a) $\lim f(x)=\lim g(x)=0$;(b) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathring{U}$ 内可导,且 $g'(x)\neq 0$;(c) $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或为 ∞).则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2° $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$洛必达法则对$\frac{\infty}{\infty}$型极限($\lim f(x)=\lim g(x)=\infty$)也成立.

3. 函数的连续性

(1) 连续定义:设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,并且等于$f(x_0)$,即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,并称 x_0 是$f(x)$的连续点.

如果函数满足条件 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ (或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$)则称函数$f(x)$在点 x_0 处左(右)连续.

(2) 间断点及其分类:设函数$f(x)$在点 x_0 的某个邻域或去心邻域内有定义,如果 x_0 不是$f(x)$的连续点,就称 x_0 是$f(x)$的间断点.也就是说,如果函数$f(x)$在点 x_0 具有下列三种情况之一,那么 x_0 是$f(x)$的间断点:

① $f(x)$在点 x_0 处无定义;

② $f(x)$在点 x_0 处有定义,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

③ $f(x)$在点 x_0 处有定义且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

函数$f(x)$的间断点类型由$f(x)$在间断点处的左、右极限是否都存在分为第一类间断点和第二类间断点,详见下表.

第一类间断点	$f(x_0^-)$与$f(x_0^+)$都存在	可去间断点:$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
		跳跃间断点:$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$
第二类间断点	$f(x_0^-)$与$f(x_0^+)$至少有一个不存在	无穷间断点:$f(x_0^-)$与$f(x_0^+)$至少有一个为∞
		振荡间断点:$f(x_0^-)$与$f(x_0^+)$至少有一个上下振荡

注:第一类间断点只有两类,第二类间断点不止两类.

(3) 连续函数的运算:

① 设$f(x)$,$g(x)$在点 x_0 连续,则$f(x)\pm g(x)$,$f(x)g(x)$,$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$都在点 x_0 连续.

② 连续函数的反函数是连续函数.

③ 连续函数的复合函数是连续函数.

④ 一切初等函数在其定义区间内都连续.

(4) 闭区间上连续函数的性质:设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则

① 有界性定理:$f(x)$在$[a,b]$上有界.

② 最值定理:$\exists\xi_1,\xi_2\in[a,b]$,使

$$f(\xi_1)=M=\max_{x\in[a,b]}f(x),\quad f(\xi_2)=m=\min_{x\in[a,b]}f(x).$$

③ 介值定理:$\forall\mu:m\leqslant\mu\leqslant M$,$\exists\xi\in[a,b]$,使$f(\xi)=\mu$.

④ 零点定理:若$f(a)f(b)<0$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$.

重点与常见考点

本部分内容包括三个部分,即函数、极限和函数的连续性,考查的主要内容和能力有:

(1) 函数的几种特性,包括有界性、单调性、周期性和奇偶性,能够利用定义验证和判断所给函数是否具有上述某种特性.

(2) 函数的常见类型,包括初等函数、反函数、复合函数、分段函数和隐函数,要做到:

① 准确使用函数的记号.由于错用函数及其导数的记号是丢分的原因之一;

② 清楚函数的复合关系,尤其是要会求分段函数的复合函数的表达式;

③ 熟悉函数的几种表示法,并能够识别函数的类型.

其中复合函数和分段函数是经常考查的主要对象.后续学习中还有积分上限函数和级数的和函数,也是考查的重点.

(3) 本部分重点内容是极限,前后内容交叉的地方多,综合性强.既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的充分必要条件,又要掌握求极限的方法.整体上看,求极限的方法很多,要能够针对不同类型的极限采用相应的方法正确求出各种极限.主要考查的方法有:

① 利用极限的四则运算法则求极限;

② 利用函数的连续性求极限;

③ 利用两个重要极限求极限;

④ 利用等价无穷小代换简化极限的计算;

⑤ 利用准则法证明极限的存在性,并求出极限.包括利用"单调有界准则"证明数列极限的存在性,并能够利用关系式求出极限;利用"夹逼准则"证明数列和函数极限的存在性,并能够根据结论确定极限,特别要注意准则法的主要解题步骤、模式和方法;

⑥ 重视导数的定义与极限的联系,能够根据导数的定义计算出相关形式的极限,但要注意函数可导的充分必要条件;

⑦ 利用洛必达法则求未定式的极限,熟悉求七种常见未定式极限的方法和计算;

⑧ 利用泰勒公式(主要是麦克劳林公式)求未定式的极限,熟记几个简单初等函数的麦克劳林公式;

⑨ 利用定积分的定义和性质求极限.

每种方法一般都对应不同类型的极限问题,某些极限问题涉及几种不同的方法,要区别不同方法的针对性,熟练掌握其解题模式和规律.

(4) 函数连续性的概念、判断和讨论:

① 能够找到间断点,并能够根据定义结合求极限的方法判断间断点的类型;

② 熟记闭区间上连续函数的性质,能够根据介值定理讨论连续函数在给定区间的零点或方程根的存在性.

(5) 熟悉本部分内容常考题型,主要有:

① 直接计算各种极限;

② 极限的局部逆问题,即给定极限值或函数的连续点反过来确定式子中的常数;

③ 无穷小量阶的比较和确定,能够判断谁是更高阶的无穷小量、阶数是多少;

④ 讨论函数的连续性,判断间断点的类型;

⑤ 讨论函数的零点或方程根的个数,这部分内容往往与微分中值定理构造出综合性的证明题,也是考生普遍感到较难掌握的地方.

整体上来看,广大考生对这一部分内容普遍掌握得比较好,但需要与后续内容的交叉,不断勤思多练,做到前后知识融会贯通,灵活应用.

常考经典题型

1. 求函数的表达式和讨论函数的性质

例 1.1.1 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$________,其定义域为________.

【答案】 $\arcsin(1-x^2)$;$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 或 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

【考点】 本题主要考查函数记号的运算和复合函数的定义域.

【解】 因 $1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$,故 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$.

从而要求 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$,即 $0\leqslant x^2\leqslant 2$,解之得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

【典型错误】 本题主要错在粗心上,由不等式 $0\leqslant x^2\leqslant 2$ 得到的解为 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

例 1.1.2 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$

【答案】 1.

【考点】 本题考查分段函数的复合函数.

【解】 由 $f(x)$ 的定义知,对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|f(x)|\leqslant 1$. 由 $f[f(x)]$ 定义知,当 $|f(x)|\leqslant 1$ 时,$f[f(x)]=1$,因而对每一 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f[f(x)]=1$.

【典型错误】 由于没有看到 $|f(x)|\leqslant 1$ 而将复合函数的表达式写错.

2. 数列的极限

例 1.1.3 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小.　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

【答案】 (D).

【考点】 本题考查数列极限及其运算规律.

【解】 若取 $x_n=n, y_n\equiv 0$,则否定了(A);

若取 $x_n=n+(-1)^{n-1}n, y_n=n+(-1)^n n$,则否定了(B);

若取 $x_n\equiv 0$,则 y_n 可以为任何数列而不必是无穷小,这也否定了(C);

事实上,当 $\dfrac{1}{x_n}(n\to\infty)$ 为无穷小时,$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小 x_ny_n 与无穷小 $\dfrac{1}{x_n}$ 的乘积,从而必为无穷小,故选(D).

【变式】 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+x_ny_n)=0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必无界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小. (D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

【答案】 (D).

【解】 若取 $x_n=n, y_n=0$,则否定了(A);

若取 $x_n=n+(-1)^{n-1}n, y_n=n+(-1)^n n$,则否定了(B);

若取 $x_n\equiv 0$,则 y_n 可以为任何数列而不必是无穷小,这也否定了(C);

由对数函数的连续性,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$,当 $\dfrac{1}{x_n}(n\to\infty)$ 为无穷小时,$y_n=x_n y_n\cdot\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小 $x_n y_n$ 与无穷小 $\dfrac{1}{x_n}$ 的乘积,从而必为无穷小,故选(D).

【典型错误】 部分考生由于对"无界"与"无穷大"的区别没有掌握而选(B).

例 1.1.4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【考点】 本题考查数列极限存在的"夹逼准则",以及用定积分的定义求极限的方法.

【解】 由于

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)<\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}<$$

$$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n};$$

而由定积分的定义知,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}=\displaystyle\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$,

另一方面,$\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{2}{\pi};$$

所以由"夹逼准则"得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}$.

【典型错误】 主要问题是不会将极限化为定积分.

例 1.1.5 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,并求此极限.

【考点】 本题主要考查数列收敛的准则——单调有界数列必收敛以及逻辑推理能力.

【证法 1】 由题设 $0<x_1<3$ 知,$x_1, 3-x_1$ 均为正数,故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设当 $k>1$ 时，$0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2},$$

故由数学归纳法知，对任意正整数 $n>1$，均有 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$，即数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

又当 $n>1$ 时，

$$x_{n-1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0\left(\text{因 } x_n\leqslant\frac{3}{2}\right),$$

故当 $n>1$ 时，$x_{n+1}\geqslant x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

所以由"单调有界数列必收敛"知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)}$，得 $a=\sqrt{a(3-a)}$，解之得 $a=\dfrac{3}{2}$，$a=0$（舍去）. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

【证法 2】 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 a，则有 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)}=\sqrt{a(3-a)}$，解之得 $a=\dfrac{3}{2}$ 和 $a=0$（舍去）. 再证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

因为

$$x_{n+1}-\frac{3}{2}=\sqrt{x_n(3-x_n)}-\frac{3}{2}=\frac{-\left(x_n-\dfrac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+\dfrac{3}{2}}\leqslant 0,$$

即 $x_{n+1}\leqslant\dfrac{3}{2}$，$n=1,2,\cdots$，从而数列 $\{x_n\}$ 有上界.

又当 $n>1$ 时，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\frac{3x_n-2x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\frac{2x_n\left(\dfrac{3}{2}-x_n\right)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0,$$

所以数列 $\{x_n\}$（$n>1$）单调增加. 综上，由"单调有界数列必收敛"知该数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

【典型错误】 部分考生推理不严密，证明数列 $\{x_n\}$ 有界时，没有用数学归纳法证明对任意 $n>1$ 都有 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$.

【变式】 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\displaystyle\int_0^{x_n}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$（$n=1,2,\cdots$），证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

【证】 $x_{n+1}=\displaystyle\int_0^{x_n}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln|1+x_n|$.

由于 $x_1>0$，因此，$x_2=\ln|1+x_1|>0$. 设 $x_n>0$，则 $x_{n+1}=\ln|1+x_n|>0$. 即数列 $\{x_n\}$ 是有下界的.

设 $f(x)=\ln|1+x|-x$，则当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}<0$，因此 $f(x)$ 单调减少.