安徽省高等学校“十一五”省级规划教材
大学数学系列规划教材

高等数学 下

GAODENG SHUXUE

（理工类）

主　编／杜先能　孙国正
副主编／蒋　威　王良龙　侯为波　祝东进

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

大学数学系列规划教材

高等数学 下

（理工类）

主　编　杜先能　孙国正

副主编　蒋　威　王良龙

侯为波　祝东进

北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:理工类. 下/杜先能,孙国正主编. —3 版. —合肥:安徽大学出版社,2011.8

大学数学系列规划教材

ISBN 978-7-5664-0300-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杜…②孙… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 165507 号

高等数学下(理工类)

(大学数学系列规划教材)　　**主编**　杜先能　孙国正

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn

经　销:全国新华书店
印　刷:合肥飞腾印刷有限公司
开　本:170mm×240mm
印　张:19.25
字　数:334 千字
版　次:2011 年 8 月第 3 版
印　次:2011 年 8 月第 1 次印刷
定　价:30.00 元
ISBN 978-7-5664-0300-1

责任编辑:钟　蕾　陈志兴　　装帧设计:张同龙　李　军
责任印制:陈　如

高等数学教材编审委员会

高等数学教材参编人员

前 言

微积分是理工科非数学专业最重要的一门基础课,对培养面向21世纪的复合型应用人才起着至关重要的作用.为此,我们根据全国高等学校理工科《高等数学教学大纲》,参照2003、2004年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,在安徽大学原自编系列教材《高等数学》(安徽大学出版社,1999年版)的基础上,集中省内多所高校长期从事高等数学教学,具有丰富教学经验的老师,本着推陈出新、锐意改革的宗旨,编写了这套微积分教材.本书是《高等数学》体系中微积分部分的下册,是数学理论的基础.

我们始终坚持微积分教学不仅仅是讲授基础数学知识,为其他学科提供工具,更重要的是传授现代数学思想,培养科学创新意识,提高应用数学能力.在编写过程中,我们做了以下一些尝试.

1.抓住本质,突出重点,强调微积分的基本思想和基本方法.我们把主要精力集中在最基本、最主要的内容上,真正让读者学深学透.对抽象难懂的概念,抓住其实质,使用通俗流畅的语言阐述清楚,并由应用实例作导引,使读者明白易懂.而对简单和非关键的内容,力求删繁就简,言简意赅,不拖泥带水.例如,我们加强了极限、连续概念的解析,目的是使读者从总体上把握微积分的基本思想;又例如,考虑到读者在中学已经学过了较多的集合和函数的知识,为避免不必要的重复,我们将之作为预备知识进行精简和改写,而对分段函数的内容,则突出其特点,加强对其本质的理解.在微分方程章节中,我们简要回顾其基本概念和基本理论,重点在介绍各类微分方程的求解方法上.另外,本书从始至终以极限为基本线索,注意各章节内容之间的内在联系,立足于为读者传授微积分的基本思想和基本方法.

2.突出数学建模思想,注重培养学生应用数学能力.尽管有不少专业在其后续教学中还要开设数学模型课程,但我们认为,如果在像微积分这样的基础课程教学中能充分体现数学建模思想,在抽象的数学定

理、数学公式与丰富多彩、纷繁复杂的客观世界之间架起一座数学应用桥梁,岂不真正起到学以致用的效果!编写中,我们结合教学进程,适当地介绍了用微积分理论解决实际问题的若干应用实例.例如,在极限与连续章节后,给出连续函数的2个应用实例;在一元函数微分学中,我们介绍了6个应用实例;在积分学中,整个第7章都是在讲解定积分如何应用于几何学、物理学等学科.这些实例,不仅使读者感到抽象的微积分理论趣味无穷,进而激发其学习微积分的兴趣,而且对培养读者的数学应用能力帮助极大.

3.坚持循序渐进原则,注意渗透现代数学思想,促进微积分与相关科学分支的结合.本书从一般的集合、映射入手,引入函数的概念,重点落脚在分段函数的理解上.从数列极限出发,引入各种类型的函数极限概念,导出连续函数的概念及其重要性质,再以极限为基础,引入一元函数微分、积分的概念,着重强调它们的应用.又例如,以微分和积分为基础,介绍了有关数值计算的基本思想和基本方法,结合微分方程介绍数学建模和生态数学模型,许多例题直接来源于自然科学、社会科学的相关前沿领域.所有这些,为微积分和相关数理分支的有机结合提供了一个可供操作使用的应用平台.

4.本着学以致用原则,精心设计典型例题和习题.本书精心挑选和设计各类典型例题,一方面巩固和理解所学理论,另一方面加强数学思维的训练,锻炼数学思维能力.此外,本书每节配备了大量习题供读者训练,每章还精心设计了综合练习题,供复习提高使用,目的是扩大读者视野,熟练数学技巧,提高综合应用数学的能力.

5.理顺教学内容体系,推陈出新,体现科学创造意识.数代杰出科学家经过约300年的不懈努力,建成了微积分大厦,改革谈何容易.但是,科学技术的突飞猛进,也为微积分注入了新的活力,因此作为一本改革教材,应充分体现这种数学发展趋势.本书对许多定理的证明,作了简化或采用新的证法.例如,各种微分中值定理,传统教材中均使用直观证明方法,我们在此给出富有发展的、能充分体现创新思维的一套新证明.在教材内容体系上作了精心安排,力求繁简得当,重点突出,不搞平均分配.另外,我们还编写了若干附录,以方便读者使用本教材.

本书的编写是在安徽大学、安徽师范大学、淮北师范大学三校数学系、教务处的领导和许多教师的大力支持下完成的.在此致以感谢.

在本书的编写过程中,我们参阅了国内外许多教材,谨表诚挚谢意.

囿于编者学识,加之任务本身难度大,时间仓促,书中的错误与缺陷在所难免,恳请同行、读者提出宝贵意见,使本书在教学实践中不断完善.

编者

2011年8月

目 录

第 9 章

空间解析几何

空间解析几何是用代数方法研究空间图形的一门学科. 它可以为多元函数提供直观的几何解释;它的思想方法和几何直观性可为许多抽象的数学物理问题提供模型和背景;此外在工程技术上也有广泛的应用. 通过建立空间坐标系,用代数方程来描述空间的几何图形,进而利用其代数方程的性质来刻画几何图形的性质.

本章首先建立空间直角坐标系,然后引入向量的概念,介绍向量代数的基础知识,最后以向量为基本工具讨论空间的平面和直线,以及几种常见的二次曲面.

§9.1 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

在平面解析几何中,我们通过建立平面坐标系,使得平面上的点与一对有序数组对应,平面上的曲线与一个代数方程对应,从而利用代数方法研究平面几何问题. 为了研究空间图形的几何性质, 我们引进空间直角坐标系.

过空间一点 O,作三条相互垂直的数轴 Ox,Oy 和 Oz,它们均以 O 为原点,并且取相同的单位长度,这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系. 点 O 称为**坐标原点**,Ox,Oy 和 Oz 称为**坐标轴**,又分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴. 通常我们规定三个坐标轴符合**右手法则**,即以右手握住 z 轴,让右手的四指以 x 轴的正向转向 y 轴的正向,大拇指的指向就是 z 轴的正方向. 此时的空间直角坐标系称为右手直角坐标系(见图 9.1). 每两条坐标轴所确定的平面称为**坐标平面**,分别称为 xy 平面、yz 平面和 zx 平面(xy 平面也可记为 xoy,xOy,Oxy 等).

2. 空间点的坐标

设 P 为空间中的一点，过 P 分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的平面，它们与坐标轴分别相交于 A,B,C 三点，且这三点在 x 轴，y 轴和 z 轴上的坐标依次为 $\bar{x},\bar{y}$ 和 $\bar{z}$，则点 P 唯一地确定了一组有序数组 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$；反之，设给定一组有序数组 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，在 x 轴，y 轴和 z 轴上确定三个点 A,B 和 C，使得它们在各坐标轴上坐标分别为 $\bar{x},\bar{y}$ 和 $\bar{z}$，过 A,B 和 C 分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的平面，这三个平面确定了唯一的交点 P. 于是我们建立了空间中的点与一组有序数组 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 之间的一一对应关系(见图 9.2). $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 称为点 P 的**坐标**，记为 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，$\bar{x},\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 分别称为点 P 的 x 坐标、y 坐标和 z 坐标.

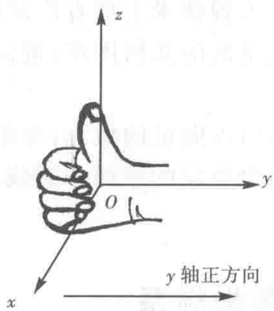

图 9.1

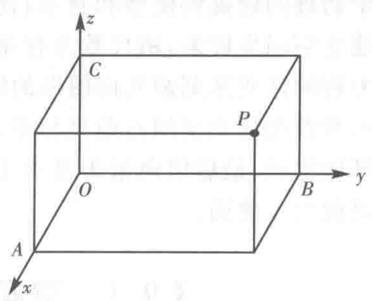

图 9.2

显然，原点 O 的坐标为(0,0,0)，坐标轴上的点至少有两个坐标为 0，坐标平面上的点至少有一个为 0. 例如，P 在 x 轴上，则 $\bar{y}=\bar{z}=0$，P 在 xy 坐标平面上，则 $\bar{z}=0$.

最后，三个坐标平面将空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**，各卦限内点的坐标的正负号规定为

Ⅰ(+,+,+)，
Ⅱ(−,+,+)，
Ⅲ(−,−,+)，
Ⅳ(+,−,+)，
Ⅴ(+,+,−)，
Ⅵ(−,+,−)，
Ⅶ(−,−,−)，
Ⅷ(+,−,−).

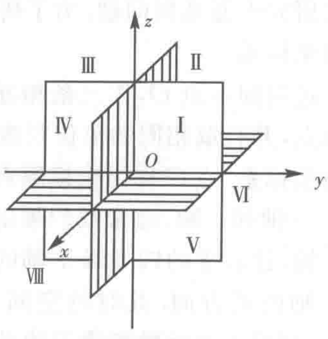

图 9.3

3. 空间两点之间的距离

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点. 分别过 P_1 和 P_2 作 xy 坐标平面的垂线,垂足分别为 M_1 和 M_2,过 P_1 作 P_2M_2 的垂线,垂足为 P_3. 易知 P_3 的坐标为 (x_2,y_2,z_1),并且

$$|P_1P_3|=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},\ |P_2P_3|=|z_2-z_1|.$$

由勾股定理得,P_1,P_2 两点的距离为

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

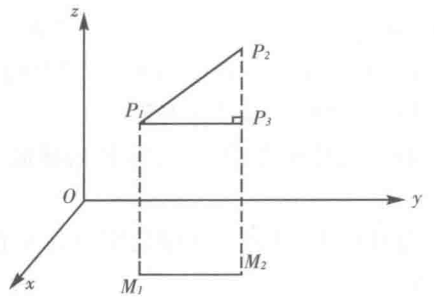

图 9.4

特别地,点 $P(x,y,z)$ 到原点 $(0,0,0)$ 的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

例 1　求点 $P(2,1,5)$ 到 z 轴的距离.

解　过点 P 作 z 轴的垂线,垂足为 M,则 M 的坐标为 $M(0,0,5)$,并且 P 到 z 轴的距离就是 $|PM|$.

$$|PM|=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(5-5)^2}=\sqrt{5}.$$

例 2　求 x 轴上一点 M,使得 M 到 $A(-4,5,2)$ 和 $B(3,1,-7)$ 的距离相等.

解　设 M 的坐标为 $(x,0,0)$,依题意有 $|MA|=|MB|$,即

$$\sqrt{(x+4)^2+(0-5)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(0-1)^2+(0+7)^2},$$

解得 $x=1$,故所求的点为 $M(1,0,0)$.

4. 空间曲面与曲线方程

空间的曲面可以看做是满足某一条件的点的轨迹. 例如,圆柱面是

到一直线的距离为定长的点的轨迹.

设曲面 S 上的点的坐标为 (x,y,z),用方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

表示曲面 S 上点的坐标所满足的条件. 如果方程(3)和曲面之间有下列关系:

(ⅰ)曲面 S 上所有点的坐标都满足方程(3);

(ⅱ)坐标满足方程(3)的所有点都在曲面 S 上,

则称方程(3)为曲面 S 的方程,而曲面 S 称为方程(3)对应的曲面.

例 3 求以 (x_0,y_0,z_0) 为球心,R 为半径的球面方程.

解 设 (x,y,z) 为球面上任一点,由已知得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{4}$$

反之,满足(4)式的任一点 (x,y,z) 到 (x_0,y_0,z_0) 的距离为 R,从而这点在球面上. 因此,方程(4)为所求的球面方程.

由例 3 可知,球心为坐标原点 O,半径为 R 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 4 求以 Oz 为对称轴,且到对称轴的距离为 R 的圆柱面方程,其中 R 称为圆柱面的半径.

解 设 (x,y,z) 为柱面上的点,取参数 u,v,其中 $z=v$;u 为过 z 轴及点 (x,y,z) 的平面与 xOz 面所围成的角,于是得到

$$\begin{cases} x=R\cos u, & \\ y=R\sin u, & 0\leqslant u<2\pi, \\ z=v, & -\infty<v<+\infty. \end{cases} \tag{5}$$

消去 u,v,得到圆柱面的一般方程为

$$x^2+y^2=R^2. \tag{6}$$

从例 4 可知,曲面的方程还可以用参数表示,(5)式也称为圆柱面的参数方程.

一般地,如果曲面 S 上点的坐标可以表示成两个参数 (u,v) 的函数,则称方程组

$$\begin{cases} x=f_1(u,v), & \\ y=f_2(u,v), & a\leqslant u\leqslant b, \\ z=f_3(u,v), & c\leqslant v\leqslant d. \end{cases} \tag{7}$$

为曲面 S 的参数方程.

空间的曲线可以看做两个曲面的交线. 设这两个曲面的方程为 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$,若它们的交线 L 和方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{8}$$

有如下关系：

（ⅰ）曲线 L 上所有点的坐标都满足方程组(8)；

（ⅱ）坐标满足方程组(8)的所有点都在曲线 L 上，

则称方程组(8)为曲线 L 的一般方程，而曲线 L 称为方程组(8)对应的曲线.

例 5　方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 表示空间中的一个圆；

方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 表示空间中的一个椭圆.

习题 9.1

1. 指出下列各点位于第几卦限？

(1) $(1,-1,2)$；　　(2) $(2,3,-4)$；

(3) $(2,-3,-4)$；　　(4) $(-2,-3,1)$.

2. 指出下列各点在哪条坐标轴上或哪个坐标平面上？

(1) $(-3,0,0)$；　　(2) $(0,-8,0)$；

(3) $(0,-5,3)$；　　(4) $(-4,0,2)$.

3. 求点 $P(x,y,z)$ 分别关于(1)各坐标平面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 求点 $P(-3,4,-5)$ 与原点及各坐标轴间的距离.

5. 求在 yOz 平面上，与三个已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 及 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

6. 在 y 轴上，求与点 $A(4,2,-1)$ 和 $B(3,-5,1)$ 等距离的点.

7. 求与 z 轴和点 $(1,3,-1)$ 等距离的点的轨迹方程.

8. 已知动点在 xOz 平面内，且它与原点的距离等于它与点 $(5,-3,1)$ 的距离，求动点的轨迹方程.

9. 已知球面过原点，球心坐标为 $(3,-2,1)$，求该球面方程.

10. 求经过 $(0,0,0)$，$(0,4,0)$，$(0,2,-2)$，$(2,2,0)$ 四个点的球面方程.

§9.2　向量代数

本节主要介绍向量的基本概念及其代数运算，利用向量法可解决一些初等几何问题，在研究平面和直线时，方程的向量表示使用起来更加方便；此外向量也是研究物理学等其他一些学科的重要工具.

1. 向量的概念

在自然科学研究中,有一些量只需用一个实数就可以明确表示,我们称之为数量,如距离、时间、温度等;而另外一些量不但有大小而且还有方向,如位移、速度、加速度、力等,我们称之为向量(或矢量),用符号 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\cdots$,或 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$来表示.

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 还可以用一个有向线段 AB 来表示,其中$\overrightarrow{AB}$的长度表示向量的模(或长度),记作$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$;从始点 A 到终点 B 的指向表示向量的方向.

定义 1　如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,方向相同,则称这两个**向量相等**,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

由定义可知,一个向量在空间平移后得到的向量与原来的向量相等.

定义 2　与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等,但方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(或反向量),记为$-\boldsymbol{a}$.

定义 3　模为零的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$.

零向量的始点和终点重合,它的方向可看做是任意的.

定义 4　模等于 1 的向量称为**单位向量**.

当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ 时,与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\boldsymbol{e}_a$.

2. 向量的线性运算

定义 5　对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,作有向线段使得$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$称为**向量** $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **的和**,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,或 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

上述向量加法定义称为**三角形法则**(见图 9.5).

由加法法则易知,若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,以 OA,OB 为边作一平行四边形(见图 9.6),则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,此方法又称为向量加法的**平行四边形法则**.

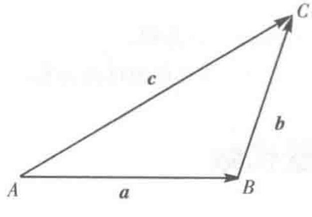

图 9.5

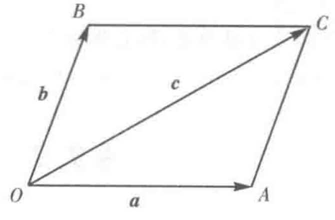

图 9.6

由定义容易验证，向量加法满足下列运算律：

（ⅰ）交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（ⅱ）结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

（ⅲ）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

（ⅳ）$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

根据**向量**的**减法**是加法的逆运算，我们给出向量减法的定义.

定义 6 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何意义如图 9.7 所示.

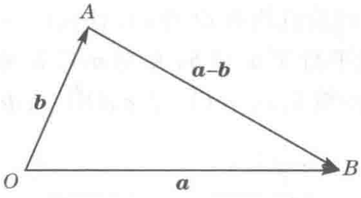

图 9.7

定义 7 数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍是一个向量，它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向为：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

显然有 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，$k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{e}_a=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$.

向量的**数乘**满足以下运算律：

（ⅰ）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

（ⅱ）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

（ⅲ）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

下面介绍向量共线和共面的一些基本知识.

定义 8 平行于同一直线（或平面）的向量组称为**共线**的（**共面**的）向量组.

定理 1 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是，存在不全为零的数 λ_1 和 λ_2，使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证明 必要性.

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，显然有 $1\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，取非负实数 k 使得 $|\boldsymbol{b}|=k|\boldsymbol{a}|$，则当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，结论均成立.

充分性.

不妨设 $\lambda_1\neq0$，则 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{b}$. 由数乘的定义可知，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或

反向,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

定理 2　设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线,则向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是,存在数 λ_1,λ_2,使得 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$.

证明　充分性.

设 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$,若 $\lambda_1\lambda_2=0$,例如 $\lambda_1=0$,则 $\boldsymbol{c}=\lambda_2\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,故 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面;若 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$,则由向量加法定义知,$\boldsymbol{c}$ 与 $\lambda_1\boldsymbol{a},\lambda_2\boldsymbol{b}$ 共面,亦即 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

必要性.

不妨设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的始点均在 O 点,并且在同一个平面内. 过向量 $\boldsymbol{c}$ 的终点 C 分别作直线平行于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,并交 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线于点 A 和 B,则由定理 1 知,存在数 λ_1,λ_2,$\overrightarrow{OA}=\lambda_1\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\lambda_2\boldsymbol{b}$,因此,$\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$.

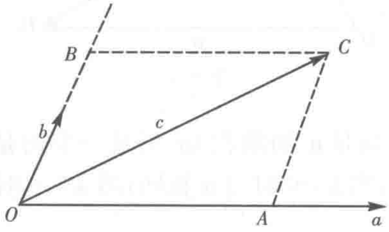

图 9.8

3. 向量的坐标表示

设 $\boldsymbol{r}$ 是空间直角坐标系中任一向量,将 $\boldsymbol{r}$ 的始点平移到坐标原点 O 时,其终点 P 的坐标(x,y,z)称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标.

显然,相等的向量有相同的坐标表示.

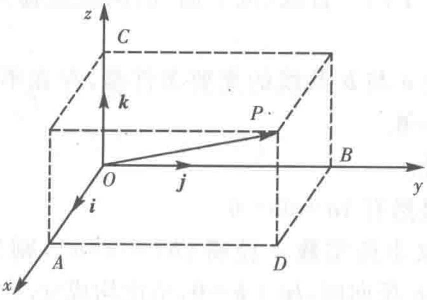

图 9.9

设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示 x,y,z 轴正向的单位向量，并称它们为这一坐标系的**基本单位向量**. 过 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$ 的终点作三个分别垂直于 x,y,z 轴的平面，并交各坐标轴于点 A,B,C，则有

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k},$$

由于 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，故 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，
称此式为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**.

对于始点不在原点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，下面给出其坐标表示.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

故

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

有了向量的坐标表示式后，向量之间的运算就化为向量的坐标的代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,c_1+c_2),$$
$$k\boldsymbol{a}=(ka_1,ka_2,ka_3),k\in\mathbb{R},$$
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

另外易知，两个向量共线的充要条件是它们的坐标对应成比例；三个向量共面的充要条件是它们的坐标构成的行列式为零.

以上结果请读者自己验证.

最后，介绍向量的方向角及方向余弦的表示.

对于 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)\neq\boldsymbol{0}$，设向量 $\boldsymbol{r}$ 与坐标轴 Ox,Oy,Oz 的正向夹角分别为 α,β 和 γ $(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$，称 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角，并称 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

因为向量的坐标就是向量在坐标轴上的投影，所以

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,$$
$$y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,$$
$$z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma,$$