应用型本科“十二五”重点规划教材

高等数学（下）

GAODENG SHUXUE (XIA)

北京交通大学海滨学院数学教研室 编

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

应用型本科“十二五”重点规划教材

高等数学（下）

北京交通大学海滨学院数学教研室　编

主　编　杨　冰　肖金桐

主　审　孟庆才　王其元

参　编　朱丽娜　张　坤　张　莹　尹宗明

杨慧贤　陈丙振　李永艳　王宝丽

董立伟　修　春　翟文娟　安玉冉

北京交通大学出版社

·北京·

内容简介

《高等数学》分为上、下两册，共11章。下册内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分和级数，共5章。本书在保证数学的系统性和严密性的基础上，尽量由浅入深、循序渐进，使之通俗易懂；对“极限思想”以及作为“极限思想”之应用的“微元法”做了充分的叙述，使学生在接受抽象的数学概念的基础上，又能将概念延伸到新的应用中去。由于例题选题覆盖面广，难度层次清晰，解题过程分析详细，重点题型解法均有小结，且习题由易到难，书后附有习题参考答案，所以本书特别有利于学生自学。由于书中部分节目标注星号，少量例题和习题有一定难度，故本书可满足不同读者的需求。

本书可作为各类应用型本科院校理工类、经济管理类大学生的《高等数学》教材，也可供各类成人教育和自学考试人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下/北京交通大学海滨学院数学教研室编. —北京：北京交通大学出版社，2012.8

（应用型本科“十二五”重点规划教材）

ISBN 978-7-5121-1103-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①北… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第172619号

责任编辑：郝建芳　郭海云　　特邀编辑：吕　宏
出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010-51686414
地　　址：北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044
印 刷 者：北京市德美印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　印张：13.25　字数：297千字
版　　次：2012年9月第1版　2012年9月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5121-1103-5/O·106
印　　数：1～4 000册　定价：28.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　言

高等数学是普通高校各类工科和管理专业必修的重要基础课程，学好高等数学是学生学好后续许多专业课程的必要条件。同时，该课程对培养学生的逻辑思维能力、数学应用能力、专业实践能力有着不可或缺的作用。因此，高等数学教学也成为应用型本科教学中的重中之重。

北京交通大学海滨学院数学教研室在结合目前应用型本科院校学生实际的基础上，通过对几年来教学实践的总结和多方面的调查研究，积极借鉴各类优秀教材的优点，潜心编写了这套《高等数学》教材。本教材坚持了“力求严谨，贯彻思想，注重应用，利于自学”的原则。

“力求严谨”就是在保证数学的系统性和严密性的基础上，尽量由浅入深、循序渐进，以易于学生逐步接受抽象的数学概念。对于一些要求相对较高的数学推导做了适当的处理。

“贯彻思想”是指本书对“极限思想”及作为“极限思想”之应用的“微元法”做了充分的叙述，使得学生学完本课程就能够自然而然地接受数学的中心思想，并将其运用到实践中去。

“注重应用”体现在每一个新概念的引入尽量从实际出发，将抽象的数学概念与实际联系起来，同时在接受数学概念的基础上，又将概念延伸到新的应用中去，书中多处联系了物理、经济等各方面应用的实际问题。

“利于自学”缘于例题选题覆盖面广，难度层次清晰，解题过程分析详细，重点题型解法配有小结，习题配备由易到难，书后附有内容全面的附录和习题参考答案，便于学生自主学习。

《高等数学》分上、下两册。上册内容包括函数与极限、一元函数微积分学、常微分方程，下册内容包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、线面积分、级数。建议教学时数160～180学时。

本书的编写工作由杨冰、肖金桐主持。参加编写的有：朱丽娜（第一章）、张坤（第二章）、张莹（第三章）、尹宗明（第四章）、杨慧贤（第五章）、陈丙振（第六章和附录）、李永艳（第七章）、王宝丽和董立伟（第八章）、修春（第九章）、翟文娟（第十章）、安玉冉（第十一章）。杨冰和肖金桐分别对上、下册进行了统稿审定。孟庆才和王其元对本书的编写提出了建设性意见，并对参编人员做了悉心的指导。

本书的编写和出版得到了北京交通大学海滨学院领导的大力支持和北京交通大学出版社

的领导和编辑的热情帮助，在此对他们表示衷心的感谢。

尽管在本书出版之前我们经过反复修改，精心推敲，但由于时间和水平所限，纰漏乃至错误在所难免，望读者见谅，请专家、同仁和广大读者指正。

编者

2012 年 9 月

目 录

第七章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何与平面解析几何相仿，是用代数方法来研究空间的几何问题. 空间解析几何的知识对学习多元函数微积分有着重要作用. 本章先引进向量的概念，讨论向量代数，然后应用向量代数讨论空间的平面、直线、曲面、曲线等.

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

定义 1　既有大小，又有方向的量，称为**向量**（或**矢量**）.

例如物理学中的力、速度、位移等均为向量.

向量一般用有向线段表示，线段的长度表示向量的大小，线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$（见图 7 - 1）. 印刷时用黑体字母来表示向量，例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$ 等；书写时一般用字母上面加箭头表示向量，如 $\vec{a}$.

向量的大小称为向量的**模**，记作$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**.

模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看做是任意的.

如果向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$大小相等，方向相同，那么称两向量相等，记作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$（见图 7 - 2）.

只研究向量的大小和方向，而不考虑它的起点位置的向量称为**自由向量**. 在自由向量范畴中，经过平移后能完全重合的向量都是相等的.

记两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 θ（见图 7 - 3），规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 特别地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\theta=0$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\theta=\pi$.

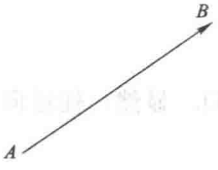

图 7 - 1

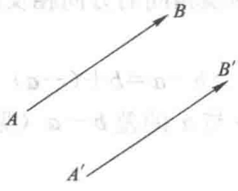

图 7 - 2

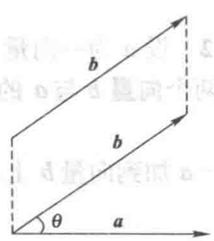

图 7 - 3

如果$\theta=0$或$\theta=\pi$，则称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果$\theta=\frac{\pi}{2}$，则称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$（或正交）. 因为零向量的方向是任意的，因此零向量与任何向量都平行且垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上. 因此，两向量平行，又称**两向量共线**.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

（平行四边形法则） 设有两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，作$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形，则对角线向量$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$（见图 7－4）称为这两个**向量的和**，记作$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，或$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

由图 7－4 可知，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$. 这称为两个向量的和的**三角形法则**.

向量的加法符合下列运算律：

(1) 交换律$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

三角形法则可以推广到任意有限个向量的和，只需将前一向量的终点作为后一向量的起点，相继作向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 7－5 所示，有$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$.

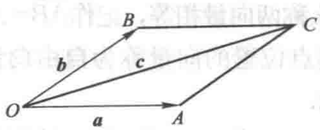

图 7－4

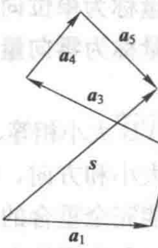

图 7－5

定义 2 设$\boldsymbol{a}$为一向量，与$\boldsymbol{a}$的模相同而方向相反的向量称为$\boldsymbol{a}$的**负向量**，记作$-\boldsymbol{a}$.

规定两个**向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差**

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

即把向量$-\boldsymbol{a}$加到向量$\boldsymbol{b}$上，便得$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（见图 7－6）. 显然，任给向量$\overrightarrow{AB}$及点$O$，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（见图 7-7）.

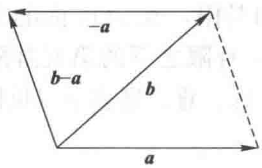

图 7-6

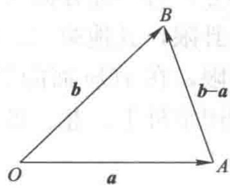

图 7-7

2. 向量与数的乘法

定义 3　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，这种运算称为**向量的数乘**.

数乘运算的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，这时它的方向是任意的.

特别地，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘运算符合下列运算律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

向量相加及数乘运算统称为**向量的线性运算**.

由数乘运算的定义可以得到两个重要结论：

(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ 为某一非零常数；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$，或 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，其中 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致的单位向量.

三、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴），z 轴（竖轴），统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ **坐标系**（见图 7-8）. 三条坐标轴的正方向符合**右手法则**，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（见图 7-9）.

规定右手法则是为了在空间坐标系中同一图形表示唯一.

三条坐标轴中的任意两条分别确定的平面 xOy，yOz，zOx 统称为坐标面. 三个坐标面把空间分割成八个部分，每一部分称为一个**卦限**. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴三个坐标轴正半轴的那个卦限称为第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（见图 7－10）.

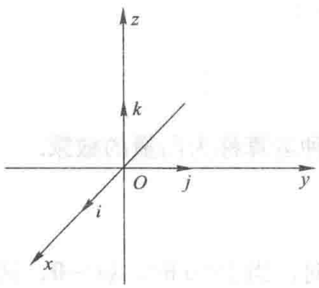

图 7－8

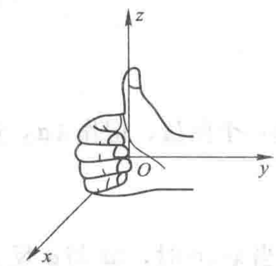

图 7－9

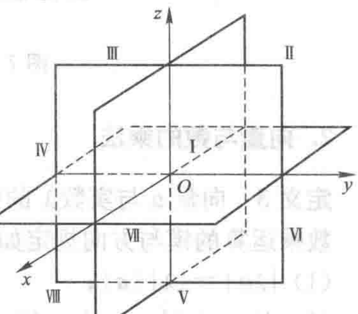

图 7－10

任给向量 $\boldsymbol{r}$，有对应点 M，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$，如图 7－11 所示，有向径

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设 $$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$$

则 $$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

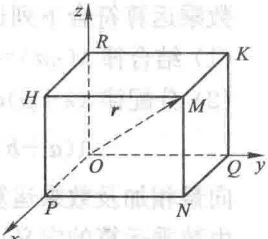

图 7－11

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量. 显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ 三个分向量，进而确定了 x，y，z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x，y，z，也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x，y，z 之间有一一对应的关系. 称有序数 x，y，z 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数 x，y，z 也称为**点 M 的坐标**，记作 $M(x,y,z)$.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，如果点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；如果点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

四、坐标表示下的线性运算

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法、以及数乘的运算如下.

设
$$a=(a_x,\ a_y,\ a_z),\quad b=(b_x,\ b_y,\ b_z)$$
即
$$a=a_x i+a_y j+a_z k,\quad b=b_x i+b_y j+b_z k$$
则
$$a+b=(a_x+b_x)i+(a_y+b_y)j+(a_z+b_z)k$$
$$a-b=(a_x-b_x)i+(a_y-b_y)j+(a_z-b_z)k$$
$$\lambda a=(\lambda a_x)i+(\lambda a_y)j+(\lambda a_z)k\quad (\lambda \text{ 为实数})$$
即
$$a+b=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$$
$$a-b=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z)$$
$$\lambda a=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘运算，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

当向量 $a\neq 0$ 时，向量 $b/\!/a$ 相当于 $b=\lambda a$，坐标表示式为
$$(b_x,\ b_y,\ b_z)=\lambda(a_x,\ a_y,\ a_z)$$
即
$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

这也相当于向量 b 与 a 对应的坐标成比例. 这里规定：若分母中有零，则对应的分子也为零.

例 7-1　设向量 $a=(1,\ -2,\ 1)$，$b=(4,\ -1,\ 1)$，求向量 $3a+2b$.

解　$3a+2b=3(1,\ -2,\ 1)+2(4,\ -1,\ 1)=(11,\ -8,\ 5)$

例 7-2　已知 $a=(2,\ 4,\ 1)$，$b=(3,\ 6,\ k)$ 并且 $a/\!/b$，求 k.

解　$\because\ a/\!/b\ \Leftrightarrow\ a=\lambda b$，即 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{1}{k}$，$\therefore\ k=\frac{3}{2}$

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $r=(x,\ y,\ z)$，作 $\overrightarrow{OM}=r$，如图 7-11 所示，有
$$r=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}$$

由 $$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$$

有 $$|OP|=|x|,\quad |OQ|=|y|,\quad |OR|=|z|$$

于是得向量模的坐标表示式为 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

设有点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $B(x_2, y_2, z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$的模. 由

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

即得 A、B 两点间的距离

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 7-3　求证以 $M_1(3, 3, 1)$、$M_2(1, 2, 4)$、$M_3(5, 1, 4)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

解　因为 $$|M_1M_2|^2=(1-3)^2+(2-3)^2+(4-1)^2=14$$

$$|M_2M_3|^2=(5-1)^2+(1-2)^2+(4-4)^2=17$$

$$|M_3M_1|^2=(5-3)^2+(1-3)^2+(4-1)^2=17$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 7-4　设点 P 在 x 轴的正半轴上，它到点 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离是到点 $P_2(0, 1, -1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解　设点 P 的坐标为 $(x, 0, 0)$

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(-\sqrt{2})^2+(-3)^2}=\sqrt{x^2+11}$$

$$|PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2}$$

$$|PP_1|=2|PP_2|\quad 即\quad \sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$$

解得 $x=1$，-1（舍去）. 故所求点为 $(1, 0, 0)$.

例 7-5　已知两点 $M(-1, 0, 3)$，$N(1, -4, 7)$，求与$\overrightarrow{MN}$同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 $$\overrightarrow{MN}=(1, -4, 7)-(-1, 0, 3)=(2, -4, 4)$$

故 $$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=6$$

于是 $$e=\frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}=\frac{1}{6}(2,\ -4,\ 4)=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

2. 方向角和方向余弦

定义 4　非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的正向所成的夹角 α，β，γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**（$0\leqslant\alpha$，β，$\gamma\leqslant\pi$），同时，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

由图 7－11 可知，$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}$，$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}$，$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$.
显然，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\boldsymbol{r}^\circ=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

例 7－6　已知两点 $M_1(1,\ 2,\ 3)$ 和 $M_2(2,\ 1,\ 3+\sqrt{2})$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解　$$\overrightarrow{M_1M_2}=(2-1,\ 1-2,\ 3+\sqrt{2}-3)=(1,\ -1,\ \sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=2$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向角为

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=\frac{2\pi}{3},\quad \gamma=\frac{\pi}{4}$$

3. 向量在轴上的投影

定义 5　设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了 u 轴，过空间一点 M 作垂直于 u 轴的平面 Π，平面 Π 与 u 轴的交点 M' 称为点 M 在 u 轴上的投影；若$\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，即$|\overrightarrow{OM'}|=|\lambda|$，则称 λ 为**向量$\overrightarrow{OM}$在 u 轴上的投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}$或$\overrightarrow{OM}_u$.

因此，在直角坐标系中，向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$ 的三个坐标 a_x，a_y，a_z分别是 $\boldsymbol{a}$ 在 x，y，z 轴上的投影.

向量的投影具有如下性质：

(1) $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi$　（φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角）；

(2) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；

(3) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$　（λ 为实数）.

例 7－7　设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=-1$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解　因为　$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=-1$$

又有
$$|\boldsymbol{b}|=2$$
则
$$\cos\theta=-\frac{1}{2}$$
故
$$\theta=\frac{2\pi}{3}$$

习题 7－1

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，起点为（1，－1，5），求向量的终点.
2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
3. 设点 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(0,1,-1)$，求 $3\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $\overrightarrow{M_1M_2}^{\circ}$.
4. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,-2,2)$，$\boldsymbol{c}=(6,-3,-3)$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.
5. 求下列各对点之间的距离.

(1) (2，3，1)，(2，7，4)； (2) (4，－1，2)，(－1，3，4).

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,4/3,k)$，并且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 k.
7. 已知 $A(2,2,3)$，$B(6,-2,-1)$，求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量.
8. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(0,4,3)$ 平行的单位向量.
9. 设点 $P_1(0,-1,2)$，$P_2(-1,1,0)$，求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦.
10. 证明以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.
11. 证明：三点 $A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$，$C(0,-2,-4)$ 共线.

第二节 向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积（点积）

1. 数量积的概念

设光滑水平面上，在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，物体位移 $\boldsymbol{s}$，又设 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ（见图 7－12). 由物理学知，力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$.

功是由力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 两个向量所唯一确定的一个数量. 除去其中的物理含义，我们就得到两个向量数量积的概念.

定义 1 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，它们的夹角为 θ（见图 7－13)，则称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（或内积、点积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

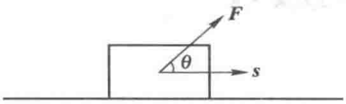

图 7-12

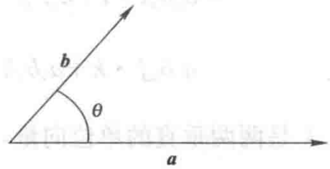

图 7-13

根据这个定义，上述问题中力的做功公式可写成 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

两个向量的数量积是一个实数，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量，则规定 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由数量积定义可推得：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(2) 对于两个夹角为 θ 的非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，从而

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

数量积符合下列运算律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda$ 为实数.

例 7-8　四面体 $OABC$ 中，$OA\perp BC$，$OB\perp AC$（见图 7-14），证明 $OC\perp AB$.

证　记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，

则　$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

因为 $OA\perp BC$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

又因为 $OB\perp AC$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，即 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，所以 $OC\perp AB$.

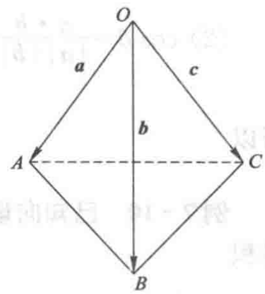

图 7-14

2. 数量积的坐标表达式

设　$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

则　$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+\\&\quad a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

$$=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+$$

$$a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$$

由于 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是两两垂直的单位向量，所以有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

从而得
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

即两向量的数量积等于两向量对应坐标的乘积之和.

设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 间的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

由此可见，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件又可表示为

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

例 7-9 已知 $\boldsymbol{a}=(1,1,-4)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,2)$，求：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-9}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以
$$\theta=\frac{3\pi}{4}$$

例 7-10 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，求向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的数量积.

解
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=2|\boldsymbol{a}|^2+3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°-2|\boldsymbol{b}|^2\\&=2\times2^2+3\times2\times3\times\frac{1}{2}-2\times3^2\\&=-1\end{aligned}$$

例 7-11 求一个单位向量，使它与向量 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$ 都垂直.

解 设所求单位向量为 $\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}$，由条件知

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0,\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=0,\ |\boldsymbol{r}|=1$$