普通高等教育"十二五"规划教材

大学高等数学类规划教材

丛书主编 王立冬

微积分

（下册）

主 编 王立冬 齐淑华

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
大学高等数学类规划教材
丛书主编　王立冬

微积分

（下　册）

主　编　王立冬　齐淑华
副主编　张　友　余　军

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书由数学教师结合多年的教学实践经验编写而成. 本书编写过程中遵循教育教学的规律，对数学思想的讲解力求简单易懂，注重培养学生的思维方式和独立思考问题的能力以及运用所学数学方法解决实际问题的能力. 每节后都配有相应的习题，习题的选配尽量典型多样，难度上层次分明. 书中还对重要数学概念配备英文词汇，并对微积分的发展做出突出贡献的部分数学家作了简要介绍，使学生能够了解微积分的起源，吸引学生的学习兴趣.

全书分上、下两册出版，本书为下册. 下册的主要内容包括：空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、无穷级数及微分方程等内容. 全书把微积分和相关经济学知识有机结合，内容的深度广度与经济类、管理类各个专业的微积分教学要求相符合.

本书可供普通高等院校经济类、管理类各个专业以及相关专业学生使用，也可以供学生自学使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下册)/王立冬，齐淑华主编. —北京：科学出版社，2015. 1
(普通高等教育“十二五”规划教材·大学高等数学类规划教材)
ISBN 978-7-03-043224-7

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①王… ②齐… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材
Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 020995 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：彭 涛
责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 1 月第一次印刷 印张：12 1/4
字数：246 000
定价：32.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

目 录

第 6 章

空间解析几何与向量代数

Analytic Geometry in Space and Vector Algebra

17 世纪上半叶，法国数学家笛卡儿和费马创立了解析几何，其基本思想是用代数的方法研究几何问题，在中学的平面解析几何中已有所体现. 为了学习多元微积分学，本章先介绍空间直角坐标系，并给出向量的概念和运算；然后，以向量为工具研究空间中的直线、平面、曲线、曲面等的图形和性质.

6.1 空间直角坐标系及两点间的距离公式

6.1.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中，建立了平面直角坐标系，使得平面上的点与二元有序数组 (x,y) 之间有了一一对应关系. 类似地，可以建立空间直角坐标系，使得空间中的点与三元有序数组 (x,y,z) 之间形成一一对应关系，这样，就可以用代数的方法研究几何问题.

过空间一定点 O，作三条相互垂直的数轴，依次称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），并统称为坐标轴. 各轴正向之间的顺序通常按如下的右手法则确定：以右手握住 z 轴，当右手 4 个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 6-1）. 与之相反的还有左手法则，一般习惯上都采用右手法则，这样就建立了空间直角坐标系. 按右手法则建立的坐标系称为右手系，O 称为坐标原点，三条坐标轴中的每两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面，依次为 xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个卦限，共八个卦限. 其中 $x>0,y>0,z>0$ 部分为第 Ⅰ 卦限，第 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限在 xOy 平面的上方并按逆时针方向来确定；$x>0,y>0,z<0$ 部分为第 Ⅴ 卦限，第 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限在 xOy 平面的下方并仍按逆时针方向确定（图 6-2）.

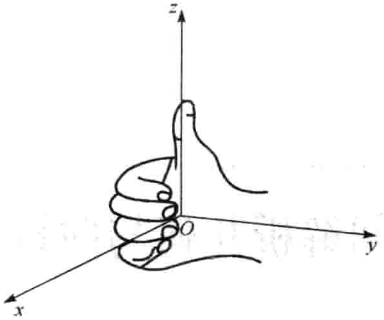

图 6-1

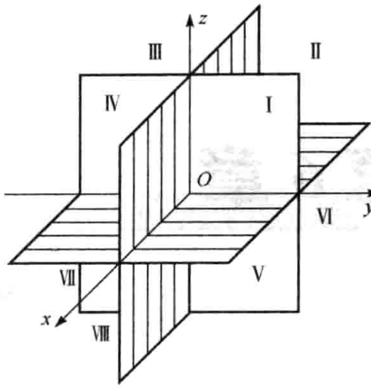

图 6-2

设 M 为空间中的任意的一点,过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面,与三条坐标轴分别相交于 P,Q,R 三点,这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y,z,即任意的点 M 都可以找到唯一的一个三元有序数组 (x,y,z) 与之对应. 反之,对任意的一个三元有序数组 (x,y,z),就可以分别在 x 轴、y 轴、z 轴上找到坐标为 x,y,z 的三个点 P,Q,R,过三个点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面,这三个平面就确定了唯一的交点 M,即任意的一个三元有序数组 (x,y,z) 都可以在空间中找到唯一的一点 M 与之对应. 至此,空间的点 M 与三元有序数组 (x,y,z) 之间就建立了一一对应关系(图 6-3),有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标,记为 $M(x,y,z)$,并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

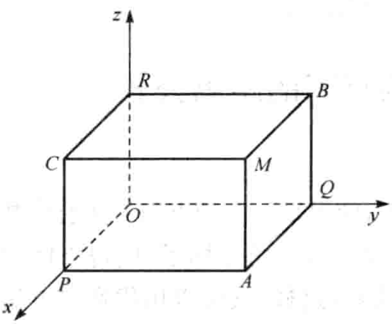

图 6-3

坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$,x 轴上的点的纵坐标和竖坐标均为 0,因而可表示为 $(x,0,0)$;类似地,y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$;z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 面上的点的坐标可表示为 $(x,y,0)$;yOz 面上的点的坐标可表示为 $(0,y,z)$;zOx 面上的点的坐标可表示为 $(x,0,z)$.

设点 $M(x,y,z)$ 为空间直角坐标系中的一点,则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $M_1(x,y,-z)$,关于 z 轴的对称点为 $M_2(-x,-y,z)$,关于原点的对称点为 $M_3(-x,-y,-z)$.

6.1.2 两点间的距离公式

设空间直角坐标系中有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，下面求它们之间的距离 $|M_1M_2|$. 过这两个点各作三个分别垂直于坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 6-4). 因为

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2&=|M_1Q|^2+|QM_2|^2\\&=|M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2\\&=|M_1'P'|^2+|P'M_2'|^2+|QM_2|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

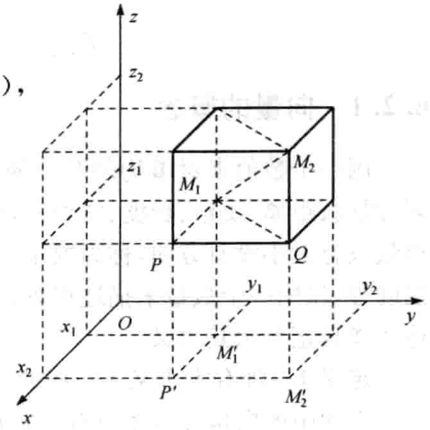

图 6-4

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　证明：以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

证明　根据两点间距离公式有

$$|AB|=\sqrt{(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{14},$$

$$|AC|=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6},$$

$$|BC|=\sqrt{(7-5)^2+(1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6},$$

显然有 $|AC|=|BC|$，故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

习题 6.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点的卦限.

(1) $(1,-5,3)$；　(2) $(2,4,-1)$；　(3) $(1,-5,-6)$；　(4) $(-1,-2,1)$.

2. 根据下列条件求点 B 的未知坐标.

(1) $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；

(2) $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$.

3. 求点 $M(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴之间的距离.

4. 在 z 轴上，求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

5. 求点 $M(a,b,c)$ 在各坐标平面上以及各坐标轴上的垂足的坐标.

6. 求点 $M(a,b,c)$ 分别关于各坐标轴以及各坐标平面的对称点的坐标.

7. 在 yOz 坐标面上，求与三个点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,-1)$ 等距离的点的坐标.

6.2 向量及其运算

6.2.1 向量的概念

用一个数值来对事物的某一属性进行度量或描述是常用的方法. 例如,对时间、温度、距离、质量、长度、体积等,可以用一个数值来度量它们的程度或大小,这类量只有大小没有方向,称为数量(标量);但对另一类事物,如力、位移、速度、电场强度等,仅用一个数量来描述很难说得清楚,只有把它们的大小和方向综合起来描述才能真正显示其含义.

定义 1 既有大小又有方向的量称为**向量**.

空间中的向量经常用具有一定长度且标有方向的有向线段来表示. 在选定长度单位后,有向线段的长度表示向量的大小,方向表示向量的方向. 如图 6-5 所示,以 A 为起点,B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$,为简便起见,常用小写的粗体字母来表示,如用 $\boldsymbol{a}$(或 $\vec{a}$)表示$\overrightarrow{AB}$.

向量的大小称为向量的**模**(norm),记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$,模为 1 的向量称为**单位向量**(unit vector). 模等于 0 的向量称为**零向量**(zero vector),记为 $\mathbf{0}$. 零向量没有规定方向,可以看成任意方向的.

两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同且模相等,则称这两个向量相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 由此定义可知,不论 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 起点是否一致,只要大小相等,方向相同,即为相等的向量,也就是说一个向量和它经过平行移动(方向不变,起点和终点位置改变)所得的向量都是相等的.

由于向量有方向,两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 经过平行移动起点重合后会形成两个角(图 6-6),分别设为 θ 和 γ,不妨设 $\theta\leqslant\gamma$,显然有 $\theta+\gamma=2\pi$,不难得到 $2\theta\leqslant 2\pi$,即 $\theta\leqslant\pi$. 将两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间所夹的较小的角 θ 定义为两向量的夹角,记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,容易得到夹角 θ 的范围为$[0,\pi]$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\theta=0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\theta=\pi$.

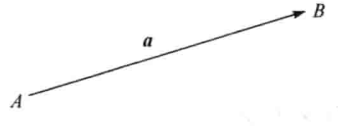

图 6-5

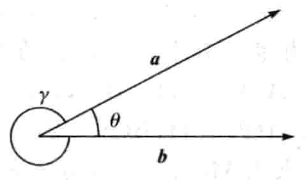

图 6-6

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,就称这两个向量平行,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 因零向量的方向是任意的,所以可以认为零向量平行于任何向量. 若将两个平行向量的起点放在同一点,它们的终点和公共起点将在同一条直线上,所以两个向量

平行也称为两向量共线.

6.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 2　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(图 6-7)，则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这种作出两个向量之和的方法称为向量加法的三角形法则.

由向量加法的定义，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ 是显然成立的. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，根据向量加法的三角形法则，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两向量的长度之和；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中长度较长的向量的方向相同，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两向量长度之差.

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，可通过另种方式作出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 将 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至同一点，以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线所表示的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 6-8)，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两个向量之和的方法称为向量相加的**平行四边形法则**.

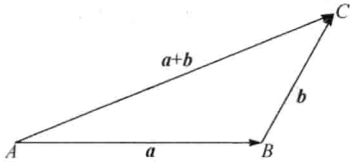

图 6-7

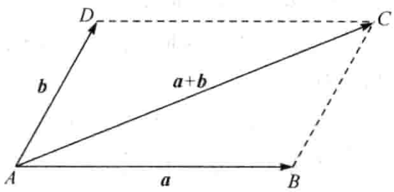

图 6-8

向量的加法满足交换律和结合律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

对于(1)，从图 6-8 中可以看出

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};$$

对于(2)，图 6-9 所示，先作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再将其与 c 相加，得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$；另将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，可见(2)成立.

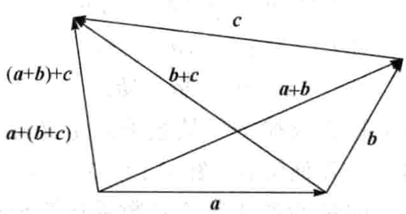

图 6-9

设有向量 $\boldsymbol{a}$，称与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$. 两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差则定义为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

因此向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差可看作是向量 $\boldsymbol{b}$ 与

$-\boldsymbol{a}$ 的和(图 6-10). 特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

若将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,显然,从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 指向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 即是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 6-11).

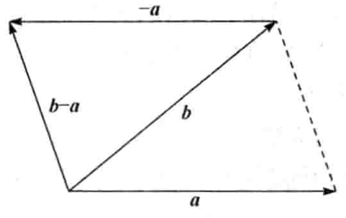

图 6-10

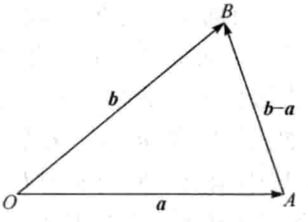

图 6-11

2. 向量的数乘

定义 3 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量,λ 是一个实数,规定数 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 该向量的大小、方向按如下方法确定:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 λ 倍,方向不变;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 $|\lambda|$ 倍,方向相反(图 6-12).

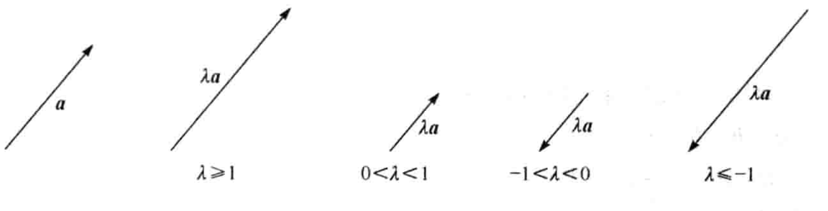

图 6-12

向量的数乘满足结合律与分配律(λ,μ 为实数):

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

以上运算规律均可从数乘的定义给出证明. 请读者自己完成. 这里仅以(3)为例,给出一个几何解释(图 6-13)($\lambda>0$).

向量的加法运算和数乘运算统称为向量的线性运算.

通常把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记为 $\boldsymbol{a}^0$,显然,$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$,

$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$(图 6-14).

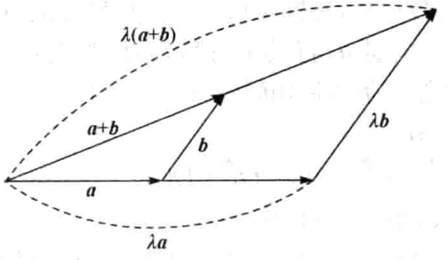

图 6-13

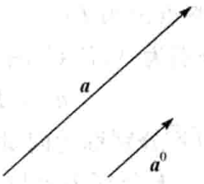

图 6-14

由数乘向量的定义易得下面的结论.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

定理 1 为数轴的建立提供了理论基础. 数轴是确定了原点、单位长度和正方向的一条直线. 由于一个单位向量已经确定了方向,同时又确定了单位长度,所以,只需给定一个点就行了,也就是说,给定一个单位向量和一点即可确定一条数轴.

设点 O 和单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了一个数轴,如图 6-15 所示,对于数轴上任意一点 P,对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$,因为 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$,由定理 1 知,必存在唯一的实数 x,使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$. 这样向量 $\overrightarrow{OP}$ 就与实数 x 建立了一一对应关系. 以后也称 x 为有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值,并将其定义为点 P 的坐标. 这样就完成了数轴上的点与实数的一一对应.

图 6-15

例 1 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{DA}$.

解 如图 6-16 所示,由向量的平行四边形法则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

同理,$\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\overrightarrow{DA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

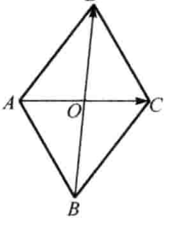

图 6-16

6.2.3 向量的分解与向量的坐标表示

为了将向量的几何运算转化为代数运算,将向量按三个坐标轴方向进行分解,用三元有序数组表示向量.任给空间一向量 $\boldsymbol{a}$,将其平行移动,使其起点与坐标原点重合,终点记为 $P(x,y,z)$.过 P 点作三条坐标轴的垂直平面,与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 A,B,C(图 6-17).于是有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$分别称为向量$\overrightarrow{OP}$在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量.

以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴、z 轴正向一致的单位向量,并称为**基本单位向量**,于是

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}.$$

因而

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量$\overrightarrow{OP}$的坐标分解式.x,y,z 称为$\overrightarrow{OP}$的坐标,记为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.

显然,给定向量 $\boldsymbol{a}$,就确定了点 P 以及$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$三个分量,进而确定三个有序数 x,y,z.反过来,给定三个有序数 x,y,z,也可确定向量 $\boldsymbol{a}$ 与点 P.可见,向量 $\boldsymbol{a}$、点 P 与三个有序数 x,y,z 之间存在一一对应关系.

设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的坐标表示分别为(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),就可将空间任一起点为 $A(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $B(x_2,y_2,z_2)$的向量$\overrightarrow{AB}$用坐标表示,如图 6-18 所示.

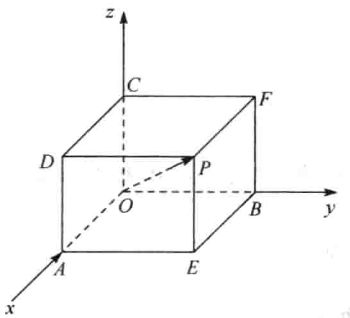

图 6-17

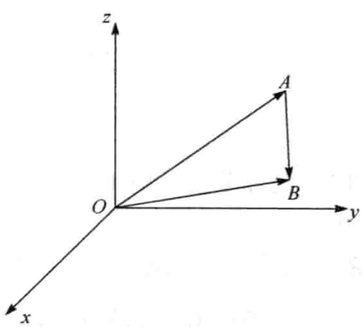

图 6-18

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

故$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，这说明向量$\overrightarrow{AB}$的坐标等于终点坐标与起点坐标之差. 有了向量的坐标表示就可以把向量的几何运算转化为代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，也即 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\&=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2),\\\lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).\end{aligned}$$

例 2　设 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$，并求 $\boldsymbol{d}$ 的各个分量及在 y 轴上的坐标.

解　$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}&=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}\\&=2(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})-(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&=2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{d}$ 在 x 轴上、y 轴、z 轴上的分量分别为 $2\boldsymbol{i}$，$-8\boldsymbol{j}$，$-\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{d}$ 在 y 轴上的坐标为 -8.

例 3　在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上一点，若$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，求证 D 是 BC 的中点.

证明　如图 6-19 所示，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})&\Rightarrow 2\,\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\&\Rightarrow\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},\end{aligned}$$

根据向量加法的三角形法则，有

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}，即|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DB}|,$$

因 D 点在 BC 上，故 D 是 BC 的中点.

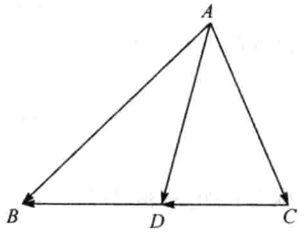

图 6-19

6.2.4　向量的模和方向余弦

与平面解析几何中用倾斜角表示直线对坐标轴的倾斜程度相类似，这里可以用向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$与三条坐标轴正向之间的夹角 α,β,γ 来表示向量的方向. 由于是向量之间的夹角，因此各夹角的范围均为$[0,\pi]$，α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，相应的 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

如图 6-20 所示，作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，根据两点间的距离公式可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

在$\triangle OPM$，$\triangle OQM$，$\triangle OMR$ 中，有

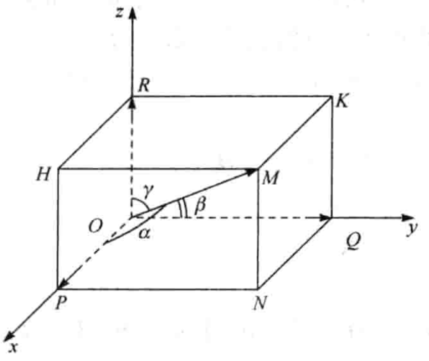

图 6-20

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

将以上三式平方后相加,即可得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

即任一向量的方向余弦的平方和等于 1,同时也说明方向余弦所构成的向量$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是单位向量,且与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同.

例 4　设两点 $A(2,0,-3)$ 和 $B(3,\sqrt{2},-2)$,求向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦、方向角、以及与向量$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解　设坐标原点为 $O(0,0,0)$,则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3-2,\sqrt{2}-0,-2-(-3))=(1,\sqrt{2},1),$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$

向量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2},$$

根据方向角的范围为$[0,\pi]$,所以得到 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$,与向量$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量为

$$\boldsymbol{e}=\pm\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\pm\frac{1}{2}(1,\sqrt{2},1).$$

习题 6.2

1. 下列说法是否正确,为什么?

(1) 是 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 单位向量;　　(2) $-\boldsymbol{i}$ 不是单位向量;

(3) 与三坐标轴的正向夹角相等的向量,其方向角为$\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$.

2. 设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求下列向量.

(1) $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$;　　(2) $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$;

(3) $\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{p}$;　　(4) $2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$.

3. 已知 $\boldsymbol{m}=(2,3,1)$，$\boldsymbol{n}=(1,-4,0)$，求下列向量的模、方向余弦以及方向角.

(1) $\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$；　　　　(2) $2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$.

4. 已知向量 $\boldsymbol{m}=a\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，和向量 $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$ 共线，求系数 a 和 b.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 两个方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$，$\cos\beta=\frac{3}{7}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的方向角是钝角，求 $\cos\gamma$.

6. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模，方向余弦和方向角.

7. 设向量 $\boldsymbol{m}$ 的方向余弦分别满足下列条件，给出向量与坐标轴或坐标平面的位置关系：

(1) $\cos\alpha=0$；　(2) $\cos\beta=1$；　(3) $\cos\gamma=-1$；　(4) $\cos\alpha=\cos\beta=0$.

8. 试用向量方法证明：若四边形的对角线互相平分，则该四边形是平行四边形.

6.3　向量的数量积与向量积

6.3.1　向量的数量积

若有质点在常力作用下，沿直线从点 A 移动到点 B，其位移为 $\overrightarrow{AB}$，则常力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta,$$

其中 θ 为常力 $\boldsymbol{F}$ 的方向与位移方向的夹角(图 6-21).

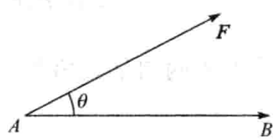

图 6-21

与之相类似的问题在工程技术中很常见，都涉及两个向量的模及夹角的余弦的乘积的运算，于是，可抽象出向量的数量积的概念.

定义 1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两个向量的夹角为 θ，则称 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(scalar product)，或称**内积**(inner product)，或称**点积**(dot product)，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

由此定义可知，上述常力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\overrightarrow{AB}$ 的内积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

内积满足以下运算性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

由内积的定义，容易得出下面的结论：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

对上述结论(2)给予证明.

证明 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,且 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,$|\boldsymbol{b}|\neq0$,则有 $\cos\theta=0$,从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$,故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则有 $\theta=\frac{\pi}{2}$,从而 $\cos\theta=0$,于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,下面推导内积的坐标表达式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两互相垂直的单位向量,所以有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

因此,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

即两向量的数量积等于它们同名坐标的乘积之和. 由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

此式即为两向量夹角余弦的表示式. 不难看出,两非零向量互相垂直的充要条件为

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

6.3.2 向量在轴上的投影

设有一轴 u,它由单位向量 $\boldsymbol{e}$ 及定点 O 确定(图 6-22),则对任给的向量 $\boldsymbol{a}$,作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$,并由 P 点作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 P',则点 P' 称为点 P 在 u 轴上的投影,向量 $\overrightarrow{OP'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OP'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的**投影**(projection),记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 a_u.

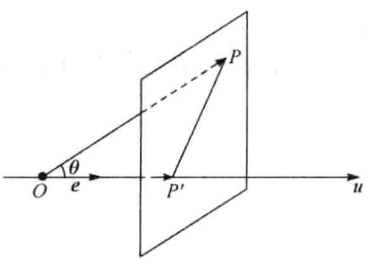

图 6-22

设向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 (a_x,a_y,a_z),即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,由此定义可知

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=a_x,\quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=a_y,\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=a_z.$$

关于向量在轴上的投影有下面两个定理.

定理 1 设 u 轴与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的