高等教育“十二五”精品规划教材

大学数学：微积分及其在经济管理中的应用

DAXUE SHUXUE: WEIJIFEN
JIQI ZAI JINGJI GUANLI ZHONG DE YINGYONG

主编　杜聪慧
参编　徐　慧　吴爱娟　赵　昕　马新苗　张瑞亭　路月峰

$$\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{1}{m+n}\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x dx$$
$$= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2 < b^2)$$

北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

高等教育“十二五”精品规划教材

大学数学：微积分及其在经济管理中的应用

主编　杜聪慧
参编　徐　慧　吴爱娟　赵　昕
马新苗　张瑞亭　路月峰

北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是参照教育部“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，从商科学院的实际（课程学时少，生源基础相对薄弱）出发，同时考虑商科各专业对数学的需求而编写的. 全书共分8章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，多元函数微积分学，无穷级数，微分方程与差分方程.

本书强调概念和定理的直观描述和实际背景介绍，把微积分和经济学的有关问题结合，用于解决实际问题. 教材吸收国内外近年来教学研究与改革的最新成果，缩减复杂的理论推导，注重介绍数学思想和方法，探讨微积分在经济管理中的若干应用，同时对现代数学进行梳理，向学生渗透现代数学思想. 全书注意保持理论的完整性和严密性，注重应用. 书中穿插了许多数学小故事、相关的数学史和数学家的阅读材料，增加了教材的趣味性和可读性.

本书可作为普通高等院校经济管理专业的微积分教材和参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学：微积分及其在经济管理中的应用 / 杜聪慧主编. —北京 ：北京交通大学出版社，2014.10

ISBN 978-7-5121-2126-3

Ⅰ.① 大… Ⅱ.① 杜… Ⅲ.① 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.① O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第235463号

责任编辑：井 飞 杨 硕

出版发行：北京交通大学出版社 电话：010-51686414

北京市海淀区高梁桥斜街44号 邮编：100044

印 刷 者：北京时代华都印刷有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：185×260 印张：20.25 字数：505千字

版 次：2014年10月第1版 2014年10月第1次印刷

书 号：ISBN 978-7-5121-2126-3/O・142

印 数：1～1 500册 定价：38.00元

前　　言

本书是参照教育部"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"而编写的，其主要特点是把微积分与经济学和管理学的有关内容进行了有机结合.

本书总的编写原则是：从商科学院的实际（课程学时少，生源基础相对薄弱）出发，适应不同的教学对象和不同专业类别的教学需要，兼顾微积分课程的理论性与应用性，突出经济管理类专业微积分课程的特色，注重适当渗透现代数学思想，加强学生应用数学方法解决经济问题能力的培养，以适应新时代对经济、管理人才的培养要求.

作为一本大学数学教材，虽然不可能有很多新奇的学术观点，但是可以引导学生探索新奇. 这不仅是因为微积分知识是在众多领域求得新知的重要工具，而且还有我们对这本教材编写特色的那份执着与自信.

本书的特色如下.

（1）本书吸收了国内外近年来教学研究与改革的最新成果，缩减复杂的理论推导，注重介绍数学思想和方法及在经济管理中的若干应用，培养学生应用数学解决实际问题的能力.

（2）本书编写与商科各专业类群相适应，注重学生应用数学的意识，培养学生使用数学的能力.

（3）本书的编写从课程学时较少的实际出发，根据大学数学的抽象性和应用广泛性的特点，强调概念和定理的直观描述和实际背景介绍，使之符合人的认识规律.

（4）本书给出了重要数学名词的英文翻译，有利于提高学生阅读外文资料的能力.

（5）教材的始末穿插了许多数学小故事、相关的数学史和数学家的阅读材料，展现了那些数学知识的原生态，这不仅增加了教材的趣味性与可读性，同时也能培养学生勇于探索的精神.

（6）教材涉及了对现代数学的宣传，在附录 C 中对 18 世纪以后的数学进行梳理，将现代数学的思想和方法纳入教材.

（7）参与本书编写的人员都是在高校从事微积分教学近 10 年的一线优秀教师，经验丰富，编写的内容有许多地方都体现了他们的教学体会和心得.

本书由杜聪慧主编. 第 1、2 章由杜聪慧编写，第 3 章由徐慧编写，第 4 章由吴爱娟编写，第 5 章由赵昕编写，第 6 章由马新苗编写，第 7 章由张瑞亭编写，第 8 章由路月峰和杜聪慧合写，附录等内容由杜聪慧撰写. 全书由杜聪慧统稿定稿.

本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材，并得到了北京市民办教育发展促进项目资金资助，北京交通大学出版社对本书的编审、出版给予众多帮助，农业部的崔永伟为本书的撰写和出版给予了热情支持，在此一并致谢！本书成于众人之手，彼此轩轾有别，错误和疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2014 年 5 月

目　　录

第1章　函数、极限与连续

学习目标和要求

1. 正确理解函数概念. 熟练掌握基本初等函数的表达式和简单性质. 理解复合函数的概念，了解函数及存在条件，熟悉常见的经济函数并会建立简单的实际问题的函数关系式.

2. 正确理解函数极限的描述性定义. 会运用描述性定义验证一些简单函数的极限. 熟练掌握极限的求导法则，了解两个重要极限，了解无穷小量的比较.

3. 掌握连续函数的定义，间断点的概念. 了解闭区间连续函数的性质.

4. 了解极限在经济中的应用，并会利用极限知识解决一些简单的经济问题.

函数（function）是微积分学的研究对象，极限是微积分学的基础性概念，是微积分学后续概念（导数、微分、积分、无穷级数）和相应计算方法能够建立和应用的基础. 本章介绍一些基本的初等函数和经济函数，极限及与极限密切相关的函数连续性的基本知识.

§1.1　基本初等函数、复合函数与初等函数

阅读1-1　永恒运动着的世界

天地之间的万物都在时间的长河中流淌着，变化着. 从过去变化到现在，又从现在变化到将来. 静止是暂时的，运动却是永恒!

大概再没有什么能比闪烁在天空中的星星，更能引起远古人的遐想. 他们想象在天庭上有一个如同人世间繁华的街市，那些本身发着亮光的星宿一直忠诚地守护在天宫的特定位置，永恒不动. 后来，这些星星被区别于月亮和行星，称之为恒星. 其实，恒星的称呼是不确切的，只是由于它离我们太远了，以至于它们之间的任何运动，都慢得使人一辈子感觉不出来!

图1-1

北斗七星，是北边最为明显的星座之一. 在北边的夜空是很容易辨认的. 大概所有的人一辈子见到的北斗七星，总是如图1-1那般形状. 人的生命太短暂了，几十年的时光，对于天文数字般的岁月，是几乎可以忽略不计的. 然而有幸的是：现代科学的发展，使我们有可能从容地追溯过去和精确地预测未来. 经过测

算，人类在十万年前、现在和十万年后应该看到的北斗七星，它们的形状是大不一样的.

不仅天在动，地也在动. 火山的喷发，地层的断裂，冰川的推移，泥石的奔流，这一切都还是局部现象. 更令人不可思议的是：我们脚下站立着的大地，也像水面上的船只那样，在地幔上缓慢地漂移着！

由此可见，这个世界的一切量，都跟随着时间的变化而变化. 时间是最原始的自行变化的量，其他量则是因变量. 一般地说，如果在某一变化过程中有两个变量 x，y，对于变量 x 在研究范围内的每一个确定的值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么变量 x 就称为自变量，而变量 y 就称为因变量或变量的函数，记为 $y=f(x)$.

高等数学与初等数学，无论是研究对象还是学习方法上，都存在着较大差异，但又有着密不可分的联系. 学好初等数学，掌握必要的初等数学知识，是学好高等数学的重要前提. 由于微积分主要是在实数范围内来研究函数，故先来复习一下与实数有关的基本知识.

1.1.1 与实数有关的知识

1. 实数与数轴上的点

实数（real number）包括**有理数**（rational number）和**无理数**（irrational number）. 其中无理数就是无限不循环小数，有理数包括整数和分数.

数学上，实数直观地定义为和数轴上的点一一对应的数. 本来实数仅称作数，后来引入了虚数概念，原本的数称作“实数”——意义是“实在的数”. 为了简便起见，经常用同一字母或数字既表示某个实数又表示以实数为坐标的数轴上的对应点. 例如，数 a 与点 a，数 $\sqrt{2}$ 与点 $\sqrt{2}$.

有理数经过四则运算（除数不为零），其结果仍为有理数；而无理数经过四则运算，其结果可能为无理数也可能为有理数.

2. 实数的绝对值

定义 1.1 若 a 为一个实数，定义 a 的**绝对值**为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

若 a，b 为两个实数，由定义 1.1 知

$$|a-b|=\begin{cases} a-b, & a\geqslant b \\ b-a, & a<b \end{cases}$$

绝对值的几何意义：$|a|$表示点 a 到原点 O 的距离；$|a-b|$表示点 a 到点 b 之间的距离.

绝对值及其运算有下列性质：

（1）$|a|\geqslant 0$，$|a|=|-a|$，$|a|=\sqrt{a^2}$；

（2）$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

（3）不等式$|a|\leqslant k(k\geqslant 0)$与不等式$-k\leqslant a\leqslant k$ 等价；

（4）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，一般地，有$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$；

（5）$||a|-|b|| \leqslant |a-b|$；

（6）$|ab|=|a||b|$，一般地，有 $|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|$；

（7）$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$，$b \neq 0$.

（证明从略）

3. 常用的实数集

全体实数的集合记为 **R**，全体自然数的集合记为 **N**. 此外，常用的实数集合还有区间（interval）和邻域（neighbourhood）.

定义 1.2　设 $a,b \in \mathbf{R}$，且 $a<b$，定义：

（1）闭区间 $[a,b]=\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$；

（2）开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

（3）半开区间 $(a,b]=\{x|a<x \leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a \leqslant x<b\}$；

（4）无穷区间 $(-\infty,b]=\{x|-\infty<x \leqslant b\}=\{x|x \leqslant b\}$

$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}=\{x|x<b\}$$

$$[a,+\infty)=\{x|a \leqslant x<+\infty\}=\{x|x \geqslant a\}$$

$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}=\{x|x>a\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$$

通常将上述四类区间统称为**区间**. 区间在数轴上的表示方法如图 1-2 所示.

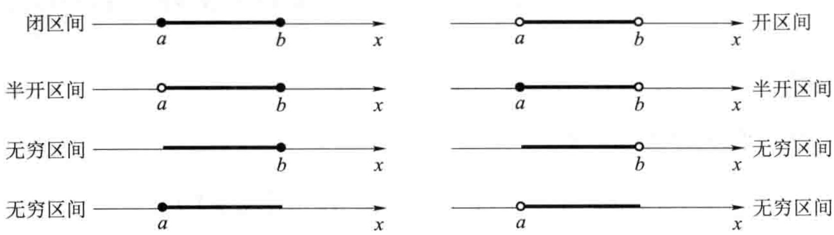

图 1-2

定义 1.3　设 ε 为某个正数，称开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 为点 x_0 的 **ε 邻域**，简称为点 x_0 的**邻域**；称 x_0 为**邻域的中心**，ε 为**邻域的半径**.

点 x_0 的邻域去掉中心 x_0 后的集合 $(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon)$ 称为点 x_0 的**空心 ε 邻域**或**去心 ε 邻域**. 称开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0)$ 为点 x_0 的**左邻域**，$(x_0,x_0+\varepsilon)$ 为点 x_0 的**右邻域**.

阅读 1-2　关于实数的历史发展

埃及人早在大约公元前 1000 年就开始运用分数了. 在公元前 500 年左右，以毕达哥拉斯为首的希腊数学家们意识到了无理数存在的必要性. 印度人于公元 600 年左右发现了负数.

直到 17 世纪，实数才在欧洲被广泛接受. 18 世纪，微积分学在实数的基础上发展起来. 直到 1871 年，德国数学家康托尔第一次提出实数的严格定义. 实数包括有理数和无理数. 到

了19世纪70年代，著名的德国数学家外尔斯特拉斯（1815—1897）、康托尔（1845—1918）和法国的柯西（1789—1857）及戴德金（1831—1916）等都对实数理论进行了研究，获得了几种形异而实同的实数理论，其中以戴德金分割法（1872）、康托尔的有理数“基本序列”法（1872）最具代表性．上述两法与外尔斯特拉斯的实数理论合称实数理论的三大派．

1.1.2　基本初等函数

通常将常量函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数和反三角函数等六类函数称为**基本初等函数**（basic elementary function）．这是分析学中最常见的函数，在研究函数的一般理论中起着重要的作用．下面介绍基本初等函数的表达式、定义域、图像及主要性质．

1．常量函数（constant function）

$$y=c \quad (c\text{ 为常数})$$

常量函数的图形是一条与 x 轴平行的一条直线，如图1－3所示．

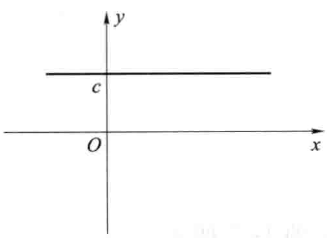

图 1－3

2．指数函数（exponential function）

$$y=a^x \qquad (a\text{ 为常数，}a>0\text{ 且 }a\neq 1)$$

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$．当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为单调减少函数；$a>1$ 时，$y=a^x$ 为单调增加函数．指数函数的图形位于 x 轴上方，且经过点 $(0,1)$，如图1－4所示．

在实际应用中，常出现以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$．

3．对数函数（logarithm function）

$$y=\log_a x \qquad (a\text{ 为常数，}a>0\text{ 且 }a\neq 1)$$

对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$．当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 为单调减少函数；$a>1$ 时 $y=\log_a x$ 为单调增加函数．对数函数的图形位于 y 轴右边，且经过点 $(1,0)$，如图1－5所示．

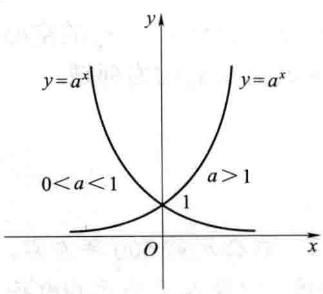

图 1－4

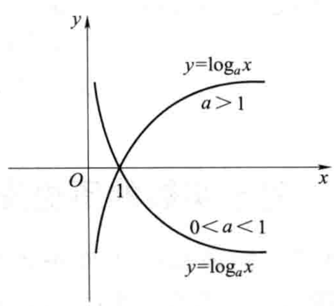

图 1－5

通常，以10为底的对数函数记为 $y=\lg x$，称为**常用对数函数**；以 e 为底的对数函数记为 $y=\ln x$，称为**自然对数函数**．

注：与对数函数有关的如下两个恒等式请熟记：

（1）$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$（换底公式）

（2）$a^x = e^{x\ln a}$

4. 幂函数（power function）

$$y = x^a \qquad (a \text{ 为常数}，a \neq 0)$$

幂函数的定义域随 a 值的不同而不同. 但不论 a 取什么值，$y = x^a$ 在区间 $(0,+\infty)$ 总有定义.

若 $a>0$，则 $y = x^a$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，其图形通过 $(0,0)$，$(1,1)$ 两点；

若 $a<0$，则 $y = x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，其图形通过 $(1,1)$ 两点. 如图 1–6 所示.

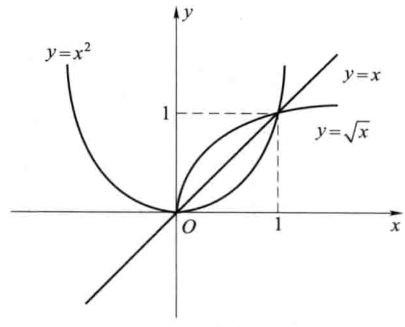

图 1–6

5. 三角函数（circular function）

$y=\sin x$（正弦函数）　　$y=\cos x$（余弦函数）

$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$（正切函数）　　$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$（余切函数）

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$（正割函数）　　$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$（余割函数）

以上六个函数统称为三角函数. 其中 $\sin x$ 为奇函数，$\cos x$ 为偶函数，它们都是周期为 2π的周期函数，定义域都为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$. 其图形如图 1–7 所示.

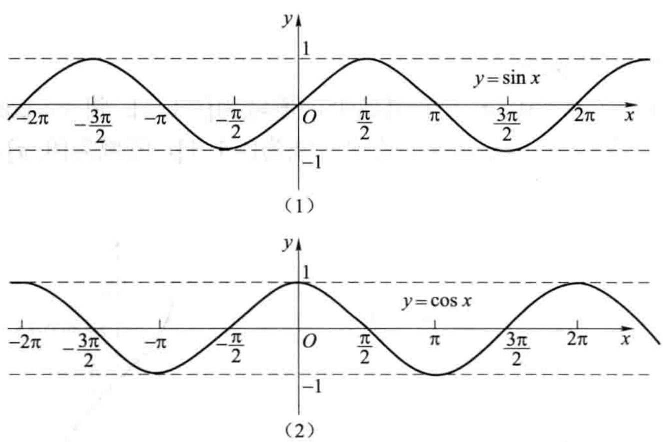

图 1–7

$\tan x$ 与 $\cot x$ 都是奇函数，它们都是周期为π的周期函数，$\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，$\cot x$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，它们的图形如图 1–8 所示.

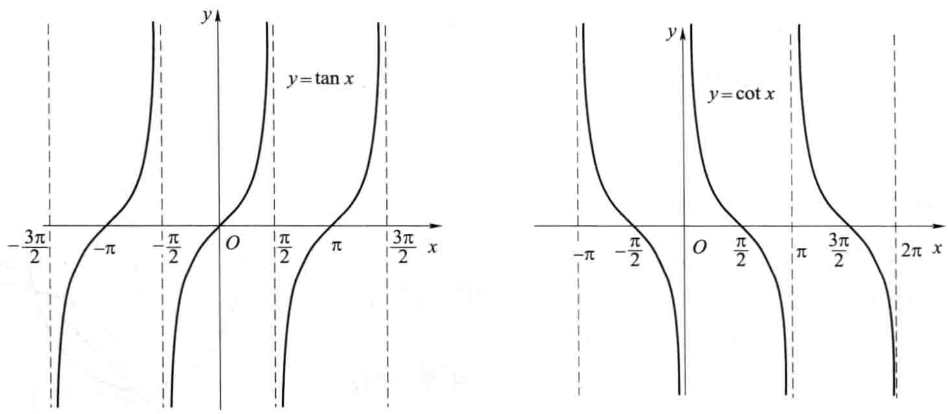

图 1－8

6. 反三角函数（inverse circular function）

由于三角函数都是周期函数，对值域中的任何 y 值，自变量 x 都有无穷多个值与之对应，故在整个定义域上三角函数不存在反函数. 但是，如果限制 x 的取值区间，使三角函数在选取的区间上为单调函数，则可考虑三角函数的反函数.

（1）反正弦函数：$y=\arcsin x$

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，值域为$[-1, 1]$. 将 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数定义为反正弦函数，记为 $y=\arcsin x$，其定义域为$[-1, 1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，图形如图 1－9（1）所示.

（2）反余弦函数：$y=\arccos x$

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0, \pi]$上单调减少，值域为$[-1, 1]$. 将 $y=\cos x$ 在$[0, \pi]$上的反函数定义为反余弦函数，记为 $y=\arccos x$，其定义域为$[-1, 1]$，值域为$[0, \pi]$，图形如图 1－9（2）所示.

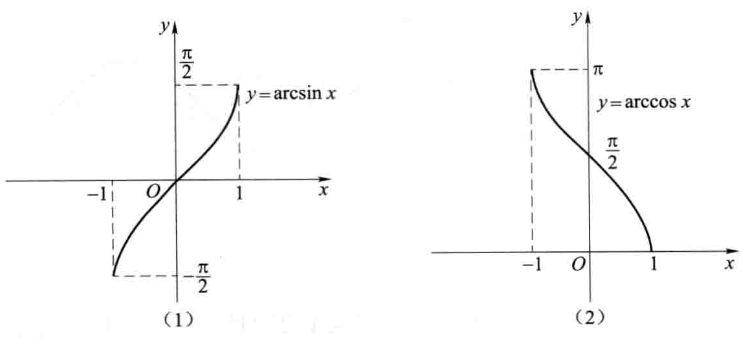

图 1－9

（3）反正切函数：$y=\arctan x$

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增加，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 将 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

上的反函数定义为反正切函数，记为 $y=\arctan x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，图形如图 1−10（1）所示.

（4）反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$

余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$内单调减少，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 将 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$内的反函数定义为反余切函数，记为 $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，图形如图 1−10（2）所示.

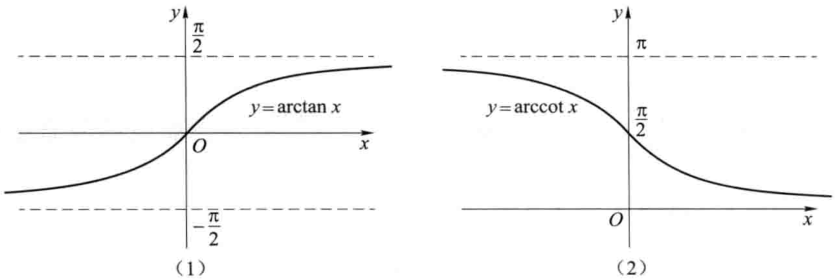

图 1−10

1.1.3 复合函数

一些客观事物，在质的方面存在着复合关系，在量的方面也存在着复合关系. 例如，在教育领域，师范教育的质量影响着中小学教师的质量，而中小学教师的质量影响着中小学的教学质量，那么国民素质的高低与师范教育质量构成复合关系. 在经济领域，某一商品的需求量影响着商品的价格，而商品的价格又由生产商品的成本所决定，因此，商品的需求量和生产商品的成本存在着复合关系.

定义 1.4　已知函数

$$y=f(u),u\in D(f),y\in Z(f)$$
$$u=g(x),x\in D(g),u\in Z(g)$$

如果 $D(f)\cap Z(g)\neq\varnothing$（空集），则称函数

$$y=f[g(x)],x\in\{x|g(x)\in D(f)\}$$

为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**（function of functions）. 其中 y 为因变量，x 为自变量，u 为中间变量，而复合函数的定义域为集合：$\{x|g(x)\in D(f)\}$.

例 1−1　讨论下列各组函数可否复合成复合函数？若可以，求出复合函数及其定义域.

（1）$y=f(u)=\ln u$，$u=g(x)=\sin x$；

（2）$y=f(u)=\sqrt{u-3}$，$u=g(x)=2\cos x$.

解：（1）因 $D(f)=\{u|u>0\}$，$Z(g)=[-1,1]$，故

$$D(f)\cap Z(g)=(0,+\infty)\cap[-1,1]=(0,1]\neq\varnothing,$$

所以 $y=f(u)=\ln u$ 与 $u=g(x)=\sin x$ 可以复合成复合函数. 其表达式为

$$y=\ln\sin x$$

其定义域为

$$\{x|\sin x\in(0,+\infty)\}=\{x|2k\pi<x<(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}.$$

（2）因 $D(f)=[3,+\infty)$，$Z(g)=[-2,2]$，故

$$D(f)\bigcap Z(g)=[3,+\infty)\bigcap[-2,2]=\varnothing,$$

所以 $y=f(u)=\sqrt{u-3}$ 与 $u=g(x)=2\cos x$ 不能复合成复合函数.

注：（1）只要 $D(f)\cap Z(g)\neq\varnothing$，适当限制 x 的取值范围，$f(u)$与 $g(x)$就可以复合成复合函数；（2）不是任何两个函数都能复合成复合函数的.

例 1–2　求复合函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域.

解：由于 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 是由 $y=\arcsin u$，$u=\dfrac{2x-1}{3}$ 复合而成的复合函数，故要求 $|u|\leqslant1$，即 $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant2$.

即 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域为$[-1,2]$.

利用复合函数的概念，可以将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成，这样便于对函数进行研究. 如函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 可以看成是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 三个函数复合而成.

例 1–3　某人准备从中国去韩国旅游，将 10 000 人民币以 1:169 的比率换成韩元，但临时因故去不了，只好又将换好的韩元以 1:0.005 9 的比率换成人民币. 问在此过程中人民币损失多少？

解：如果首先以人民币数 x 作为变量，以韩元数 y 作因变量，则人民币换成韩元的公式是：$y=f(x)=169x$.

又以韩元数 y 作自变量，人民币 z 作因变量，则韩元换成人民币的公式是：$z=g(y)=0.0059y$.

则整个兑换过程是一个复合函数：

$$z=g[f(x)]=0.0059\times169x\approx0.997x.$$

所以此人约损失了 $(1-0.997)\times10000=30$ 元.

1.1.4　初等函数

定义 1.5　由基本的初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合，并在定义域内由一个解析表达式表示的函数，称为**初等函数**（elementary function）.

例如，$y=e^{\sin x}$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=xe^x$ 等都是初等函数.

例 1–4　判断函数 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 是否为初等函数？

解：因为 $y=x^{\sin x}=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\ln x}$，故 $y=x^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin x\ln x$ 复合而成的，$y=x^{\sin x}$ 是初等函数.

一般地，可以证明**幂指函数**（power exponential function），即形如 $y=u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0)$ 的

函数都是初等函数.

在微积分运算中，常把一个初等函数分解成基本初等函数或简单函数来研究，学会分析初等函数的结构是非常重要的. 一般情况下，分段函数是非初等函数，如**符号函数** $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 是非初等函数（如图 1-11 所示），但其定义域的每个分段区间上的表达式是由初等函数来表示，故仍可以通过初等函数来研究它.

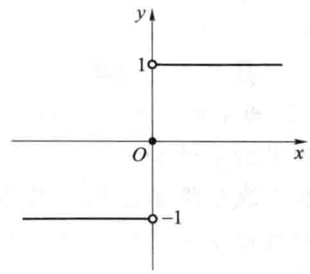

图 1-11

在以后的章节中，还会遇到隐函数、变限积分函数和幂级数函数等非初等函数，但对它们的研究也离不开初等函数.

注：绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 是初等函数，因为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$.

阅读 1-3　“函数”的由来

“函数”一词最初是由德国的数学家莱布尼茨在 17 世纪首先采用的，当时莱布尼茨用“函数”这一词来表示变量 x 的幂，即 x^2，x^3，…接下来莱布尼茨又将“函数”这一词用来表示曲线上的横坐标、纵坐标、切线的长度、垂线的长度等所有与曲线上的点有关的变量. 就这样“函数”一词逐渐盛行.

在中国，古时候的人将“函”字与“含”字通用，都有“包含”的意思，清代数学家、天文学家、翻译家和教育家，近代科学的先驱者李善兰给出的定义是：“凡式中含天，为天之函数.”中国的古代人还用“天、地、人、物”4 个字来表示 4 个不同的未知数或变量. 显然，李善兰这个定义中含义就是“凡是公式中含有变量 x，则该式子叫作 x 的函数.”

瑞士数学家雅克 · 柏努意给出了和莱布尼茨相同的函数定义. 1718 年，雅克 · 柏努意的弟弟约翰 · 柏努意给出了如下的函数定义：由任一变数和常数的任意形式所构成的量叫做这一变数的函数. 换句话说，由 x 和常量所构成的任一式子都可称之为关于 x 的函数. 1775 年，欧拉把函数定义为：“如果某些变量，以某一种方式依赖于另一些变量. 即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随着变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数.”法国数学家柯西引入了新的函数定义：“在某些变数间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值也可随之而确定时，则将最初的变数称之为‘自变数’，其他各变数则称为‘函数’”. 在柯西的定义中，首先出现了“自变量”一词. 1834 年，俄国数学家罗巴契夫斯基进一步提出函数的定义：“x 的函数是这样的一个数，它对于每一个 x 都有确定的值，并且随着 x 一起变化. 函数值可以由解析式给出，也可以由一个条件给出，这个条件提供了一种寻求全部对应值的方法. 函数的这种依赖关系可以存在，但仍然是未知的”. 这个定义指出了对应关系. 即条件的必要性，利用这个关系以求出每一个 x 的对应值.

1837 年德国数学家狄里克雷的定义是：“如果对于 x 的每一个值，y 总有一个完全确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数.”德国数学家黎曼引入了函数的新定义：“对于 y 的每

一个值，y 总有完全确定了的值与之对应，而不拘建立 x，y 之间的对应方法如何，均将 y 称为 x 的函数.”

我们从上面函数概念的演变可以知道，函数的定义必须抓住函数的本质属性，变量 y 称为 x 的函数，只需有一个法则存在，使得这个函数取值范围中的每一个值，有一个确定的 y 值和它对应就行了，不管这个法则是公式或图像或表格或其他形式. 由此，就有了我们课本上的函数的定义：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 y 是 x 的函数.

练一练

1. 下列给出的关系是不是函数关系？

（1）$y=\sqrt{-x}$　　（2）$y=\lg(-x^2)$

（3）$y=\sqrt{-x^2-1}$　　（4）$y=\sqrt{-x^2+1}$

（5）$y=\arcsin(x^2+2)$　　（6）$y^2=x+1$

2. 分析下列函数由哪些基本的初等函数复合而成.

（1）$y=\log_a\sqrt{x}$　　（2）$y=\arctan[\tan^2(a^2+x^2)]$

（3）$y=\mathrm{e}^{2x/(1-x^2)}$　　（4）$y=\cos^2\sqrt{x^2-x-1}$

3. 旅客乘飞机可免费携带不超过 20 kg 的行李，若超过 20 kg，每千克交运费 a 元，试建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系.

§1.2　简单的经济函数

经济学家在用数学方法解决实际经济问题时，经常需要建立经济问题的数学模型，即将问题涉及的变量之间相互依赖的关系用数学公式表达出来，也就是建立各变量之间的函数关系. 然后根据此函数关系，建立数学模型进行分析，以达到解决问题的目的. 本节介绍经济学中常见的几个函数：需求函数和供给函数；成本函数、收入函数和利润函数.

1.2.1　需求函数与供给函数

需求函数（demand function）是指在某一特定时期内，市场上某种商品的各种可能的购买量和决定这些购买量的诸因素之间的数量关系.

假定其他因素（如消费者的货币收入、偏好和相关商品的价格等）不变，则决定某种商品需求量的因素就是这种商品的**价格**（price）. 此时，需求函数就表示商品需求量和价格这两个经济量之间的数量关系

$$Q_d=Q_d(P)$$

其中 Q_d 表示需求量，P 表示价格. 需求函数的反函数 $P=Q_d^{-1}(Q_d)$ 称为**价格函数**（price function)，习惯上将价格函数也统称为需求函数.

一般地，商品的需求量随价格的下降而增加，随价格的上涨而减少. 因此，需求函数是单调减少函数. 最简单，最常见的需求函数为线性需求函数

$$Q_d = Q_d(P) = a - bP$$

其中 a，b 为正的常数，a 表示价格为零时的最大需求量，$\dfrac{a}{b}$ 为最高销售价格（此时需求量为零）.

除了用线性函数表示需求函数外，还常用下面的简单初等函数来近似表示需求函数：

幂函数：$Q = kP^{-a}$，$k > 0, a > 0$

指数函数：$Q = a\mathrm{e}^{-bP}$，$a > 0, b > 0$

供给函数（supply function）是指在某一特定时期内，市场上某种商品的各种可能的供给量和决定这些供给量的诸因素之间的数量关系. 商品的市场供给量 Q_s 也与商品的价格 P 有密切关系. 价格上涨，将刺激生产者向市场提供更多的商品，供给量增加；反之，价格下跌，将使供给量减少. 类似地，供给量 Q_s 也可视为价格 P 的函数，称为供给函数，记为

$$Q_s = Q_s(P).$$

供给函数是单调增加函数. 最简单、最常见的供给函数为线性供给函数

$$Q_s = Q_s(P) = -c + dP$$

其中 c，d 为正的常数，$\dfrac{c}{d}$ 为最低销售价格（此时供给量为零）.

除了用线性函数表示供给函数外，还常用下面的简单初等函数来近似表示供给函数：

幂函数：$Q = kP^{a}$，$k > 0, a > 0$

指数函数：$Q = a\mathrm{e}^{bP}$，$a > 0, b > 0$

对一种商品而言，如果需求量等于供给量，则这种商品就达到了**市场均衡**（market equilibrium）. 以线性需求函数和线性供给函数为例，令

$$Q_d = Q_s$$

即

$$a - bP = -c + dP$$

故

$$P = \frac{a+c}{b+d} \equiv P_0$$

上式中 P_0 称为该商品的**市场均衡价格**（equilibrium market price）. 如图 1–12 所示.

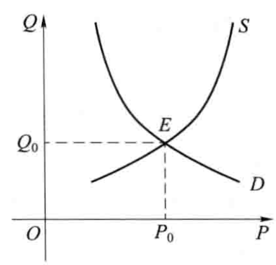

图 1–12

市场均衡价格就是需求函数和供给函数两条曲线交点的横坐标. 当市场价格高于均衡价格时，将出现**供过于求**的现象，而当市场价格低于均衡价格时，将出现**供不应求**的现象. 当市场均衡时有

$$Q_d = Q_s = Q_0,$$

称 Q_0 为**市场均衡数量**（equilibrium market quantity）.